А. Д. НАХМАН, Д. Н. ПРОТАСОВ, А. Н. ПЧЕЛИНЦЕВ

ЭЛЕМЕНТЫ СТОХАСТИКИ – КОМПЕТЕНТНОСТНЫЙ ПОДХОД

Тамбов
Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2020

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Тамбовский государственный технический университет»

А. Д. НАХМАН, Д. Н. ПРОТАСОВ, А. Н. ПЧЕЛИНЦЕВ

ЭЛЕМЕНТЫ СТОХАСТИКИ – КОМПЕТЕНТНОСТНЫЙ ПОДХОД

Утверждено Учёным советом университета в качестве учебного пособия
для студентов 2 курса дневного отделения инженерных направлений подготовки,
изучающих дисциплину «Теория вероятностей и математическая статистика»

Учебное электронное издание

Тамбов
Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2020

УДК 519.21(075)
ББК 22.171
Н34

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики ФГБОУ ВО «ТГУ им. Г. Р. Державина»
Е. С. Жуковский

Доктор технических наук, профессор ФГБОУ ВО «ТГТУ»
Ю. В. Родионов

Нахман, А. Д.

Н34 Элементы стохастики – компетентностный подход [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. Д. Нахман, Д. Н. Протасов, А. Н. Пчелинцев. – Тамбов : Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2020. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Системные требования : ПК не ниже класса Pentium II ; CD-ROM-дисковод ; 41.2 Mb ; RAM ; Windows 95/98/XP ; мышь. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-8265-2227-1

Приведены краткие теоретические сведения по основным разделам стохастики: комбинаторике, теории вероятностей, элементам математической статистики. Предложены образцы решения типовых задач и значительное количество задач компетентностно-ориентированного содержания для самостоятельного решения обучающимися.

Предназначено для студентов 2 курса дневного отделения инженерных направлений подготовки, изучающих дисциплину «Теория вероятностей и математическая статистика».

УДК 519.21(075)
ББК 22.171

ISBN 978-5-8265-2227-1

ВВЕДЕНИЕ

Современный этап развития науки, техники, производства, экономики характеризуется возрастающим интересом к теории вероятностей, математической статистике, теории случайных процессов. Изучение различного рода случайных явлений, стохастических отклонений от нормы является важным средством предотвращения чрезвычайных ситуаций, техногенных катастроф, выпуска некачественной и ненадёжной продукции и т.п. По этой причине стохастические знания становятся неотъемлемым компонентом содержания профессионального образования. Без минимальной вероятностно-статистической грамотности нельзя в наши дни адекватно воспринимать разнообразную социальную, политическую, экономическую информацию, выдвигать и оценивать гипотезы и принимать обоснованные решения. Без соответствующей подготовки невозможно полноценное изучение естественнонаучных и социально-экономических дисциплин. В этой связи в системе математического образования в последние десятилетия выстраивается новая, стохастическая линия. Она представляет собой объединение взаимосвязанных составляющих – элементов комбинаторики, теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов.

Целью настоящего пособия является повышение уровня теоретических знаний и практических умений студентов инженерных направлений подготовки.

Авторы предлагают интегрированный подход к изучению стохастики, использующий в основном конкретные модели понятия вероятности, но вместе с тем акцентирующий общие свойства различных моделей вероятности, аналогии между действиями над событиями и над множествами, над событиями и над высказываниями и т.п. В частности, в адаптированной форме излагается теоретико-функциональная идея введения вероятности как счётно-аддитивной меры на борелевской алгебре событий (аксиомы А. Н. Колмогорова).

В то же время утвердившийся в образовательной практике компетентностный подход предполагает формирование у обучающихся способности переносить полученные знания и умения на новую ситуацию применять их в практических задачах. С этой целью представлен обширный задачный материал на актуальные темы (классические сюжеты с монетами, игральными кубиками, шарами в урнах и стрельбой сведены к минимуму), а в приложениях приводятся примеры использования вероятностных методов в решении современных научных задач.

В соответствии с требованиями актуализированных ФГОС высшего образования по различным направлениям бакалаврской подготовки, у обучающихся должна быть сформирована общепрофессиональная компетенция, предполагающая способность применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.

Индикаторы соответствующих результатов приведены в табл. В.1.

Мониторинг выполнения студентами заданий, предложенных в каждом из контрольных блоков пособия, позволит оценить уровень достижения результатов в соответствии с вышеприведёнными индикаторами.

В.1. Результаты обучения

Код, наименование индикатора	Результаты обучения по дисциплине
ИД-1 (ОПК-1) Знать: основы высшей математики, физики, основы вычислительной техники и программирования	знает основы теории вероятностей и математической статистики, основные законы распределения случайных величин и методы статистического анализа данных, позволяющие строить статистические модели прикладных задач
ИД-2 (ОПК-1) Уметь: решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования	умеет вычислять вероятности случайных событий, составлять и исследовать функции распределения случайных величин, обрабатывать статистическую информацию для оценки значений параметров и проверки значимости гипотез при проведении статистического моделирования
	умеет строить, применять и интерпретировать вероятностно-статистические модели исследуемых процессов, явлений и объектов, относящиеся к сфере профессиональной деятельности
ИД-3 (ОПК-1) Владеть: навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности	владеет вероятностно-статистическим подходом к постановке и решению задач при проведении инженерных расчётов

Формирование способностей применять математические (в том числе вероятностно-статистические) методы, естественнонаучные и общеинженерные знания, методы моделирования достигается средствами решения задач следующих трёх уровней:

– практико-ориентированные и прикладные математические задачи;
– задачи профессионально ориентированного характера;
– квазипрофессиональные задачи.

При этом в рамках предметной области «Математика» решаются преимущественно задачи первого уровня. Сюжеты стохастических задач, предлагаемых читателям данного пособия, следующие:

– выборки (формирование комплектов, телефонные номера, варианты аренды в каршеринговых компаниях и др.);

– составные события (электрические схемы, варианты попаданий в мишень при стрельбе, навязчивая реклама и т.п.);

– классическая вероятность, вероятность суммы и произведения (задачи о выборке, распределение квартир по жребию, контроль стандартности изделий, вероятность поступления фейковой информации, банковские операции и др.);

– схема гипотез (погода и рыбалка, ошибки при компьютерной диагностике, наличие вакансий и вероятность трудоустройства);

– схема Бернулли и предельные теоремы (наивероятнейшее число побед в спортивных соревнованиях, опечатки на странице книги, задержки авиарейсов, продажа акций, демография);

– дискретные случайные величины (участки, требующие ремонта, индикаторы событий, контроль качества продукции, сигнализаторы аварийных ситуаций, буллиты);

– непрерывные случайные величины (фармацевтическое производство, время безотказной работы прибора, положение указателя на измерительной шкале и др.);

– элементы математической статистики (отклонение размеров изделий от стандарта, курс доллара, измерения артериального давления, контрафактная продукция).

Окончательное овладение навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности с использованием стохастических знаний должно быть сформировано в процессе изучения специальных дисциплин.

Структура пособия такова. По каждой из тем «Элементы комбинаторики», «Случайные события», «Случайные величины», «Элементы математической статистики» предлагаются обучающий и контрольный модули. Обучающий модуль содержит основные понятия и факты по соответствующей теме. Основные утверждения приведены с доказательствами. Теоретический материал иллюстрируется многочисленными примерами практико-ориентированного характера. Контрольный модуль содержит ряд теоретических упражнений и задания для самостоятельного решения.

Таким образом, пособие представляет собою лекционно-практический курс, направленный на формирование у обучающихся навыков простейшего стохастического моделирования. Для более основательного ознакомления с понятиями и методами стохастики адресуем читателя к книгам, например [1] и [2].

Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

ОБУЧАЮЩИЙ МОДУЛЬ

Решение задач на вычисление классической вероятности тесно связано с методами перечислительной *комбинаторики*. ***Комбинаторика – это раздел дискретной*** математики, изучающий методы нахождения количества всевозможных конечных подмножеств данного множества по заданным характеристикам этих подмножеств.

1. КОРТЕЖИ. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1.1. Пусть даны множества $G_1, ..., G_n$. ***Кортежем длины*** n, составленным из элементов этих множеств, называется любая последовательность вида $g = (g_1, ..., g_n)$, где $g_k \in G_k$, $1 \le k \le n$.

Кортежи длины 2, т.е. кортежи вида (g_1, g_2), называются ***упорядоченными парами***; кортежи длины 3 – упорядоченными тройками и т.д.

Декартовым произведением $G_1 \times ... \times G_n$ ***множеств*** $G_1, ..., G_n$ называется множество всех G кортежей вида $g = (g_1, ..., g_n)$.

Например, декартово произведение множеств $G_1 \times G_2$ состоит из всевозможных упорядоченных пар (g_1, g_2), где $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$.

Пример. Двое друзей решили воспользоваться каршерингом для путешествия. У фирмы имеются шесть свободных автомобилей «Рено» и пять авто «Тойота». Сколько возможно вариантов выбора автомобилей, если друзья выбирают авто разных марок?

Решение. Следует найти количество всех упорядоченных пар (g_1, g_2), где g_1 – принимает шесть возможных значений, а g_2 – пять значений. В паре с фиксированным (выбранным) g_1 может оказаться любое $g_2 \in \{1, 2, ..., 5\}$, т.е. таких пар будет 5, соответственно количеству возможных значений g_2. Учитывая, что выбор g_1 возможен шестью способами, имеем все упорядоченные пары в количестве $5 \cdot 6 = 30$.

1.2. Обозначим через $\nu(M)$ количество элементов конечного множества M.

Теорема 1.1 («принцип умножения»). Имеет место равенство

$$\nu(G_1 \times G_2) = \nu(G_1) \cdot \nu(G_2).$$

Для доказательства надо повторить рассуждения, приведённые при решении примера п. 1.1. Используя результат теоремы 1 и метод математической индукции, получаем следующее утверждение:

$$\nu(G_1 \times ... \times G_n) = \nu(G_1) \cdot ... \cdot \nu(G_n).$$

1.3. В частности, если имеется *n экземпляров одного и того же множества G* и требуется найти число кортежей длины *n*, в которые входит *по одному* (и только одному) элементу из каждого экземпляра, то такие кортежи называются ***размеще-***

ниями с повторениями; другими словами, размещения с повторениями – это кортежи вида $g = (g_1, ..., g_n) \in G \times ... \times G$. Число таких кортежей, согласно принципу умножения, очевидно, есть

$$\nu(G^n) = m^n,$$

где $m = \nu(G)$.

Пример. Какое максимальное число телефонных номеров может быть у мобильного оператора, если каждый номер должен начинаться с цифр 953?

Решение. Поскольку все номера мобильных операторов одиннадцатизначные, то в каждом номере +7953XXXXXXX могут варьироваться 7 цифр. Имеем кортежи длины k = 7, в которых каждый элемент принадлежит множеству G = {0, 1, 2, ..., 9}, содержащему m = 10 элементов. Следовательно, число таких кортежей $\nu(G^7) = 10^7$. Однако телефонного номера, состоящего сплошь из нулей, обычно не бывает. Следовательно, искомое число номеров равно $10^7 - 1 = 9999999$.

2. РАЗМЕЩЕНИЯ, ПЕРЕСТАНОВКИ, СОЧЕТАНИЯ

2.1. Если строить *кортежи длины k из элементов одного и того же множества G* так, чтобы *элементы в кортеже не повторялись*, то такие кортежи называются ***размещениями без повторений.***

Теорема 2.1. Количество размещений (из m элементов по k элементов) есть число

$$A_m^k = m(m-1)...(m-k+1).$$

Доказательство теоремы вытекает из принципа умножения (п. 1.2).

Если использовать обозначение $m! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (m-1)m$, считая 0! = 1! = 1, то легко проверить, что

$$A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}.$$

2.2. В частности, размещения из m по m элементов называют ***перестановками***; число всевозможных перестановок из m элементов есть

$$P_m = m!.$$

2.3. Пример 1. Сколькими способами можно разложить в ряд на витрине магазина пять DVD-дисков?

Решение. Имеем кортежи длиной в 5 элементов, составленные из элементов множества G, для которого $\nu(G) = 5$. Следовательно, ищем количество перестановок из 5 элементов:

$$P_5 = 5! = 120.$$

Пример 2. Сколькими способами можно расставить на полке шесть книг, если:

а) две определённые книги должны всегда стоять рядом,

б) эти две книги не должны стоять рядом?

Решение.

а) Пару книг, которые должны стоять рядом, условимся пока рассматривать как одну книгу. Тогда нужно расставить пять книг по пяти местам, что можно сделать $P_5 = 5!$ способами. Учитывая теперь порядок расположения тех двух книг, которые мы посчитали за одну, имеем P_2 перестановок между ними. Согласно принципу умножения, получаем окончательно число способов $P_5 \times P_2 = 120 \times 2 = 240$.

б) Способов переставить шесть книг существует $P_6 = 720,$ но из них, как установлено в п. а) существует 240 способов поставить определённые книги вместе. Следовательно, число способов поставить книги так, чтобы две заданные книги не стояли, равно разности 720 – 240 = 480.

2.4. Если теперь строить из элементов множества G, для которого $\nu(G) = m$, *неупорядоченные* подмножества по k элементов, то такие подмножества называют ***сочетаниями из*** m ***по*** k ***элементов.***

Теорема 2.2. Количество всевозможных сочетаний из m по k элементов может быть вычислено по формуле

$$C_m^k = \frac{A_m^k}{P_k}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Чтобы получить всевозможные *размещения* из m по k элементов, можно сначала «организовать» всевозможные сочетания (неупорядоченные подмножества из m по k) в количестве C_m^k, а затем в каждом таком подмножестве произвести всевозможные упорядочения, т.е. произвести всевозможные перестановки в количестве P_k. Рассуждая как в п. 1.2, получаем тогда $A_m^k = C_m^k P_k$, откуда и вытекает утверждение теоремы.

2.5. Имеют место равенства

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}; \tag{2.2}$$

$$C_m^k = C_m^{m-k}; \tag{2.3}$$

$$C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k. \tag{2.4}$$

Соотношение (2.2) вытекает из (2.1) и формулы для вычисления числа размещений; соотношения (2.3) и (2.4) нетрудно проверить, если воспользоваться представлением (2.2).

Пример. Имеется 10 различных игрушек, из которых формируют комплекты подарков по три игрушки в каждом. Сколько различных комплектов подарков можно сформировать?

Решение. Имеем всевозможные неупорядоченные подмножества по 3 элемента из 10. Согласно п.п. 2.4, 2.5 ищем количество сочетаний, т.е.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!.} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{3!7!} = 120.$$

Итак, можно сформировать 120 различных комплектов подарков.

2.6. Размещения, перестановки, сочетания можно интерпретировать как всевозможные *выборки* заданного количества элементов из некоторой совокупности, содержащей m элементов. При этом выборки-размещения различаются как самими элементами, так и их порядком; выборки-сочетания разнятся только самими элементами (порядок их следования несущественен), выборки перестановки из m элементов друг от друга могут отличаться лишь порядком следования элементов. Именно такие признаки обычно используются для распознавания вида выборок в теории вероятностей.

3. ЧИСЛО ЭЛЕМЕНТОВ В ОБЪЕДИНЕНИИ МНОЖЕСТВ

3.1. Напомним, что ***объединением множеств*** A и B называется множество $A \cup B$, каждый элемент которого содержится хотя бы в одном из множеств A или B, т.е. содержится или в A, или в B, или в обоих этих множествах. Общая же часть $A \cap B$ этих множеств называется их ***пересечением***.

3.2. Теорема 3.1. Если конечные множества A и B имеют пустое пересечение, то количество элементов

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Теорема 3.2. Если конечные множества A и B имеют непустое пересечение, то

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Доказательства теорем 1 и 2 легко вытекают из геометрических интерпретаций объединения непересекающихся и пересекающихся множеств (диаграмм Вьена).

Пример. Все акционеры ЗАО переводят дивиденды на счета в банках. При этом известно, что четыре акционера имеют счета в Сбербанке, шесть человек – в Почта-банке, но из них двое имеют также счета и в Сбербанке. Сколько всего акционеров в данном ЗАО?

Решение. Пусть A – множество акционеров, имеющих счета в Сбербанке, B – множество акционеров, имеющих счета в Почта-банке. Тогда требуется найти $n(A \cup B)$. Имеем

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 6 - 2 = 8.$$

4. БИНОМ НЬЮТОНА

4.1. Известные формулы квадрата, куба суммы могут быть обобщены следующим образом.

Теорема 4.1. Для любого натурального m имеет место соотношение

$$(\alpha + \beta)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \alpha^{m-k} \beta^k. \tag{4.1}$$

Числа C_m^k в формуле (4.1) здесь называют биномиальными коэффициентами.

Общий член суммы (4.1), т.е. слагаемое, стоящее на k + 1 месте, считают k-м членом разложения и обозначают T_k, т.е.

$$T_k = C_m^k \alpha^{m-k} \beta^k, \; k = 0, 1, ..., m.$$

С равенством (4.1) связана техника получения результатов для одного из важнейших распределений случайных величин – биномиального; это распределение будет изложено ниже.

Один из возможных способов доказательства формулы (4.1) бинома Ньютона состоит в следующем. Сначала определяем коэффициенты a_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ в разложении

$$(1+x)^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^{m-1} + a_m x^m. \quad (4.2)$$

Для этого полагаем в соотношении (4.2) $x = 0$; тогда $a_0 = 1 = C_m^0$. Далее дифференцируем обе части (4.2):

$$m(1+x)^{m-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + m a_m x^{m-1}.$$

Если выбрать $x = 0$, то получим $a_1 = m = C_m^1$. После второго дифференцирования имеем

$$m(m-1)(1+x)^{m-2} = 2!a_2 + 3\cdot 2x + \ldots + m(m-1)a_m x^{m-2}.$$

В случае $x = 0$ получаем $m(m-1) = 2!a_2$, откуда

$$a_2 = \frac{A_m^2}{P_2} = C_m^2.$$

Теперь процесс ясен: в общем случае

$$a_k = C_m^k, k = 0, 1, \ldots, m.$$

Следовательно, соотношение (4.2) приобретает вид

$$(1+x)^m = 1 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \ldots + C_m^{m-1} x^{m-1} + C_m^m x^m. \quad (4.3)$$

Переход к утверждению (4.1) осуществляется, если положить теперь $x = \dfrac{\beta}{\alpha}$ в равенстве (4.3).

4.2. Важным следствием (4.1), получаемым при $\alpha = \beta = 1$, является следующий результат:

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m.$$

Если вспомнить, что C_m^k есть количество всех неупорядоченных k-элементных подмножеств данного множества (содержащего всего m элементов), то указанная сумма выражает собой количество всех различных подмножеств данного множества. Итак, *число всех подмножеств множества, содержащего m элементов, равно* 2^m.

Пример. В аудитории восемь люминесцентных ламп. Сколько существует различных способов освещения данной аудитории?

Решение. Любая комбинация из включённых в данный момент ламп есть некоторое подмножество данного множества, содержащего восемь элементов. Число всевозможных комбинаций (подмножеств) есть тогда 2^8, т.е. 512. Исключая случай нуль-элементного подмножества (случай, когда ни одна лампа не горит), получаем в ответе 511 способов освещения.

КОМБИНАТОРИКА. КОНТРОЛЬНЫЙ МОДУЛЬ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать равенство $C_m^k = C_m^{m-k}$.

2. Доказать равенство $P_m = A_m^k P_{m-k}$.

3. Пользуясь результатом $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, вывести формулу для подсчёта количества элементов $n(A \cup B \cup C)$ в объединении трёх множеств.

4. Каков наибольший из биномиальных коэффициентов в разложении $(1+x)^{2n}$?

5. Равны ли тождественно суммы $\sum_{k=0}^{m} C_m^k x^{m-k}$ и $\sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k$?

2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Логин должен начинаться с буквы S и состоять из четырёх букв английского алфавита (в английском алфавите 26 букв). Сколько можно образовать таких логинов, если:

а) все буквы в нём должны быть различными;

б) буквы могут повторяться.

2. Каждый из студентов группы во время каникул работал в стройотряде или побывал в спортивном лагере. В стройотряде было 75% студентов, а в лагере – 60%, причём некоторые успели и поработать, и побывать на спортивных сборах. Каков процент таких студентов?

3. Сколько существует различных автомобильных номеров, которые состоят из четырёх цифр, если первая из них не равна нулю?

4. Из восьми депутатов надо выбрать председателя счётной комиссии и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

5. Сколько существует различных перестановок букв в слове «договор»?

6. Сколько существует различных диагоналей в выпуклом n-угольнике?

7. В отделении связи продают 10 видов конвертов и 5 видов марок. Сколькими способами можно купить конверт и марку к нему?

8. Шесть меломанов спешат занять очередь к филармонической кассе. Сколькими способами может быть сформирована такая очередь?

9. В понедельник у студентов должно быть 4 учебные пары. Сколько можно составить расписаний на понедельник, если всего имеется 10 учебных дисциплин?

10. Группа из 17 человек должна быть разделена на две подгруппы для изучения английского и французского языка, причём в «английской» группе должно быть 10 человек. Сколько существует способов формирования подгрупп, если сами учащиеся не высказывают никаких предпочтений по поводу выбора иностранного языка?

Глава 2. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

ОБУЧАЮЩИЙ МОДУЛЬ

Основными понятиями теории вероятностей являются понятия события и его вероятности. На основании нашего жизненного опыта события можно разбить на три категории:

– достоверные, т.е. наверняка происходящие при выполнении данного комплекса условий; достоверные события обозначаем символом E;

– невозможные, т.е. наверняка не происходящие; невозможные события обозначаем символом $\varnothing$;

– случайные, которые могут как произойти, так и не произойти при выполнении данного комплекса условий; обозначения: $A, B, C, \dots$.

Вероятность понимается как некоторая численная мера степени объективной возможности появления данного события, так что каждому событию A сопоставляется (единственным образом) некоторое число $P = P(A)$.

1. АЛГЕБРА СОБЫТИЙ

1.1. ***Сложение событий.*** Событие $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ называется суммой событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, если событие A состоит в наступлении хотя бы одного из указанных A_k, $k = 1, \dots, n$.

Событие $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$ называется суммой бесконечного количества событий, если событие A состоит в наступлении хотя бы одного из указанных A_k, $k = 1, 2, \dots$.

Умножение событий. Событие $B = A_1A_2\dots A_n$ называется произведением событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, если событие B состоит в совместном наступлении всех указанных A_k, $k = 1, \dots, n$.

Произведение бесконечного количества событий $B = A_1A_2\dots A_n\dots$ состоит также в наступлении всех указанных событий.

1.2. Имеют место следующие свойства:

а) коммутативность операций сложения и умножения:

$$A_1 + A_2 = A_2 + A_1,\ A_1A_2 = A_2A_1;$$

б) ассоциативность операций сложения и умножения (соответственно):

$$A_1 + A_2 + A_3 = (A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3),$$
$$A_1A_2A_3 = (A_1A_2)A_3 = A_1(A_2A_3);$$

в) дистрибутивное свойство

$$(A_1 + A_2)A_3 = A_1A_3 + A_2A_3.$$

Доказательства указанных свойств и других равенств между событиями можно формализовать, если обучающиеся владеют таблицами истинности для основных логических операций. Дело в том, что высказывание «наступит хотя бы одно из событий A_1 или A_2» («наступят оба события A_1 и A_2») истинно тогда и только тогда, когда истинна дизъюнкция (конъюнкция) высказываний «наступит A_1», «наступит A_2». Следовательно, имеет место взаимно-однозначное соответствие между операциями сложения (умножения) событий и дизъюнкцией (конъюнкцией) соответствующих высказываний.

Так, например, установим справедливость дистрибутивного свойства на основании следующей таблицы истинности. Как обычно, в ней символ 1 означает истинность высказывания «событие наступит» (функция истинности принимает значение, равное 1), а символ 0 – его ложность (функция истинности принимает значение, равное 0). Свойство будет установлено сравнением пятой и седьмой колонок табл. 1.

1. Значения функции истинности

A_1	A_2	A_3	$A_1 + A_2$	$(A_1 + A_2)A_3$	A_1A_3	A_2A_3	$A_1A_3 + A_2A_3$
1	1	1	1	1	1	1	1
И	И	0	И	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1.3. С помощью введённых операций определяется теперь понятие несовместности событий: события A_1 и A_2 несовместны, если $A_1A_2 = \varnothing$, т.е. в результате опыта наступление одного из них исключает наступление другого. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются попарно несовместными, если любые два из них несовместны.

Говорят, что группа событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ полна, если $A_1 + A_2 + \ldots A_n = E$, т.е. в результате опыта наступление хотя бы одного из указанных событий является достоверным.

События A и $\overline{A}$ называются противоположными, если они несовместны и образуют полную группу:

$$A\overline{A} = \varnothing, \quad A + \overline{A} = E.$$

Можно также сказать, что $\overline{A}$ состоит в ненаступлении A: высказывание «наступит $\overline{A}$» есть отрицание высказывания «наступит A».

Пример 1. Блок в электрической схеме содержит два параллельно соединённых элемента; событие A_1 есть исправность первого элемента, A_2 – второго. Выразить через A_1 и A_2 следующие события: A блок пропускает ток; B блок не пропускает тока.

Здесь рассуждения состоят в следующем. Поскольку наступление события A означает исправность *хотя бы одного* из элементов, то $A = A_1 + A_2$. Событие B означает *неисправность* каждого элемента, т.е. *совместное наступление* $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$, а значит, $B = \overline{A}_1\overline{A}_2$.

Пример 2. Выразить (при наличии той же электрической схемы) следующее событие C: в блоке исправен только один элемент.

Рассуждаем так: событие C равносильно одному из двух следующих: исправен первый элемент (событие A_1), и неисправен второй ($\overline{A}_2$), так что наступает $A_1\overline{A}_2$, или (наоборот) наступает $\overline{A}_1 A_2$; следовательно,

$$C = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2.$$

Читателю предлагаем распространить результат на случай наступления ровно одного из трёх, …, из n данных событий, т.е. доказать, что наступление ровно двух из трёх данных событий есть событие

$$A = A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 \text{ и т.п.}$$

1.4. Совокупность U всех рассматриваемых событий именуется *алгеброй событий*. Она характеризуется тем, что

– в ней введены операции сложения и умножения, результаты выполнения которых также содержатся в U;

– U содержит достоверные события;

– вместе с каждым событием A множество U содержит противоположное событие $\overline{A}$.

Алгебра событий, содержащая также всевозможные бесконечные суммы и произведения, называется σ-алгеброй (борелевской алгеброй).

2. КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

2.1. Будем рассматривать события A, B, C, ... как исходы некоторого опыта; число исходов считаем конечным. Каждому опыту сопоставим множество всех его ***элементарных*** (простейших, «неразложимых») ***исходов*** $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, которое даёт полную информацию о предполагаемых результатах этого опыта.

Элементарными называются такие исходы ω_i опыта, которые удовлетворяют следующим условиям:

а) группа исходов полна, т.е. обязательно произойдёт хотя бы один из ω_i;

б) исходы попарно несовместны;

в) все ω_i – равновозможны, т.е. объективно ни один из исходов не является более возможным, чем любой другой.

2.2. Среди элементов множества Ω имеются исходы, благоприятствующие событию A, т.е. те, в результате которых событие A наступает.

Классической вероятностью события A называется отношение числа $m = m_A$ элементарных исходов, благоприятствующих A, к общему числу n всевозможных элементарных исходов опыта:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{2.1}$$

2.3. Очевидны следующие свойства классической вероятности:

$$P(E)=1,\ P(\varnothing)=0, \tag{2.2}$$

$$0<P(A)<1 \text{ для всякого случайного события } A. \tag{2.3}$$

Действительно, в первом случае все исходы благоприятны, т.е. $m_E=n$, а во втором $m_\varnothing=0$, так что соотношения (2.2) – в силу определения (2.1) – очевидны; наконец, $0<m_A<n$ для всякого случайного события A, а поэтому оценка (2.3) имеет место.

2.4. Многие практические задачи могут быть смоделированы в виде следующей задачи о выборке.

Пусть среди N объектов имеется M меченых (например, окрашенных; $0<M<N$). Какова вероятность, что среди извлечённых случайным образом K объектов окажется ровно L меченых ($0\le L\le M$)?

Решение. Обозначим через A событие, вероятность которого мы ищем. Всевозможные выборки объёма K образуют пространство элементарных исходов (они попарно несовместны, равновозможны, и их группа полна). Различаясь лишь отобранными объектами, исходы являются сочетаниями, так что возможное их число есть $n=C_N^K$. Благоприятный исход наступает, когда одновременно извлечено ровно L объектов из M, остальные $K-L$ извлечены из $N-M$ немеченых.

Число возможных извлечений L объектов (из M) есть C_M^L, тогда как число остальных извлечений есть C_{N-M}^{K-L}; при этом на каждое из C_M^L извлечений меченых объектов приходится ровно C_{N-M}^{K-L} извлечений объектов немеченых. Согласно принципу умножения количество благоприятных исходов есть $C_M^L\, C_{N-M}^{K-L}$. Следовательно,

$$P(A)=\frac{C_M^L\, C_{N-M}^{K-L}}{C_N^K}.$$

3. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

3.1. Понятие относительной частоты события вводится в результате анализа проведённых опытов. Если событие A появилось $m=m_A$ раз, то относительной частотой события A называют число

$$W(A)=W_n(A)=\frac{m}{n}.$$

3.2. Практика показывает, что с ростом числа однотипных опытов относительная частота приобретает свойство устойчивости, колеблясь относительно некоторого числа $P=P(A)$, которое называется статистической вероятностью события A. Ниже будет предложено математическое обоснование этого свойства, называемое законом больших чисел Бернулли.

3.3. Очевидно, что относительная частота $W(A)$ удовлетворяет свойствам, аналогичным (2.2), (2.3); в частности, $0\le W(A)\le 1$.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

4.1. Рассмотрим следующий опыт: в некоторой ограниченной области E случайным образом блуждает точка, причём попадания её в любые части, имеющие одинаковую меру (например, площадь в случае плоских областей), считаются равновозможными. Пусть событие A – её попадание в область $A \subset E$. Если $S(A)$ и $S(E)$, $S(E) \neq 0$ – соответственно меры A и E, то геометрической вероятностью события A будем называть число

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(E)}.$$

4.2. Для геометрической вероятности сохраняются, очевидно, свойства (2.2), (2.3) и оценка $0 \leq P(A) \leq 1$ для всякого случайного события A. Заметим, что здесь равенства $P(A) = 1$, $P(A) = 0$ оказываются возможными и для некоторых *случайных* событий A. Так, например, если E – квадрат, а случайное событие A – попадание точки на любую его диагональ, то $P(A) = 0$, поскольку диагональ имеет нулевую площадь.

5. ПОНЯТИЕ ОБ АКСИОМАХ ВЕРОЯТНОСТИ

5.1. Рассмотренные выше модели вероятности события (классическая, статистическая, геометрическая) обладают некоторыми общими свойствами, которые можно положить в основу аксиоматического определения вероятности.

Зададим вероятность как некоторую функцию P на алгебре событий U (или даже σ-алгебре событий). Будем считать, что выполнены следующие свойства (аксиомы):

А1 (неотрицательность вероятности): $P(A) \geq 0$ для всякого $A \in U$;

А2 (нормированность вероятности): $P(E) = 1$;

А3 (аддитивное свойство): если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны, то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k);$$

А4 (аксиома «расширенной» аддитивности для попарно несовместных событий):

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k),$$

где числовой ряд предполагается сходящимся.

5.2. При выполнении аксиом **А1 – А4** имеют место следующие утверждения.

Теорема 5.1. Для всякой пары противоположных событий $A, \overline{A}$ справедливо равенство

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Действительно, в силу соотношения $A + \overline{A} = E$ и свойства нормированности **А1**

$$P(A + \overline{A}) = P(E) = 1.$$

Далее, в силу несовместности событий A, $\overline{A}$ и аксиомы **А3** получаем

$$P(A) + P(\overline{A}) = P(A + \overline{A}) = 1,$$

что и утверждалось.

В частности, для событий достоверного и невозможное как противоположных получаем

$$P(\varnothing) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0.$$

Теорема 5.2. Всякое событие A имеет вероятность $P(A) \le 1$.

Для доказательства воспользуемся результатом теоремы 5.1 и свойством **А1**:

$$1 = P(A) + P(\overline{A}) \ge P(A).$$

5.3. Выше для классической вероятности установлено, что она удовлетворяет свойствам **А1** и **А2**. Проверим для неё теперь справедливость **А3.** Начнём с рассмотрения двух несовместных событий и установим, что

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Пусть опыт имеет n элементарных исходов, из которых m_1 благоприятствует A_1, а m_2 исходов – A_2. Ввиду несовместности событий A_1 и A_2, среди m_1 и m_2 нет общих исходов. Следовательно, событию $A_1 + A_2$ благоприятствуют ровно $m_1 + m_2$ исходов, а тогда

$$P(A_1 + A_2) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A_1) + P(A_2).$$

5.4. Утверждение п. 5.3 можно распространить теперь на произвольное конечное количество событий, пользуясь ассоциативным свойством сложения и действуя по индукции. Так, например, если три события A_1, A_2, A_3 попарно несовместны, то события $(A_1 + A_2)$ и A_3, очевидно, будут несовместными. Теперь на основании утверждения п. 5.1 получаем

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P((A_1 + A_2) + A_3)) = P(A_1 + A_2) + P(A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3),$$

так что свойство **А3** оказывается верным и в случае трёх слагаемых.

6. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СОБЫТИЙ

6.1. Рассмотрим способ вычисления классической вероятности произведения событий AB. Обозначим через $P_A(B)$ вероятность события B, вычисленную при условии, что A произошло, и будем называть её условной вероятностью события B (вероятностью B по наступлении A).

Теорема 6.1. Имеет место соотношение

$$P(AB) = P(A)P_A(B). \tag{6.1}$$

Доказательство. Предположим, что среди n элементарных исходов опыта ровно m благоприятствуют произведению AB, и m_A исходов благоприятствуют событию A. Тогда

$$P(AB) = \frac{m}{n} = \frac{m_A}{n}\frac{m}{m_A} = P(A)\frac{m}{m_A}. \qquad (6.2)$$

Остаётся установить, что

$$P_A(B) = \frac{m}{m_A}. \qquad (6.3)$$

Для этого заметим, что по наступлении A лишь те m_A исходов, которые ему благоприятствовали, оказываются возможными для дальнейшего рассмотрения, а событие B имеет тогда благоприятными исходы, благоприятные одновременно и для A. Таким образом, по наступлении A оказывается $m_B = m,$ и вычисление $P_A(B)$ приводит к равенству (6.3).

Согласно равенствам (6.2) и (6.3) получаем утверждение (6.1).

6.2. В случае произведения трёх и большего числа событий имеет место аналогичный результат. Так, например,

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C).$$

Доказательство проводится по индукции с использованием свойства ассоциативности умножения событий.

Замечание. Соотношение

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)},$$

вытекающее (для классической вероятности) при $P(A) \neq 0$ из формулы (6.1), в общем случае может быть положено в основу *определения* условной вероятности события B. Стоит заметить, что это определение корректно, если для выбранной модели вероятности предварительно установлено, что $P(AB) \leq P(A)$.

6.3. События A и B называются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от того, наступило ли или не наступило другое событие. Например, если среди N предметов будет ровно M ($0 < M < N$) меченых (окрашенных, бракованных и т.п.) и производится «безвозвратная» выборка, то вероятность извлечения второго предмета меченым (событие B) зависит от того, был ли меченым (событие A) извлечён первый предмет. Действительно,

$$P_A(B) = \frac{M-1}{N-1}$$

(так как по наступлении A среди $N-1$ предметов осталось $M-1$ меченых) и

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{M}{N-1}.$$

Однако в случае возвратной выборки вероятность извлечения второго предмета меченым была бы одной и той же (независимо от того, каким был первый предметов):

$$P(B) = P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = \frac{M}{N}.$$

Таким образом, в первом случае события A и B зависимы, а во втором случае – независимы.

6.4. Аналогично, события $A_1, A_2, ..., A_n$ называются независимыми в совокупности, если каждая из вероятностей $P_j = P(A_j)$ остаётся постоянной в условиях данных опытов.

Из теоремы 6.1, применённой к двум независимым событиям, вытекает, что

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Распространяя результат на n событий, независимых в совокупности, приходим к соотношению

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n).$$

7. ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ СОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

7.1. Выше была рассмотрена вероятность суммы попарно несовместных событий. Следующий результат в случае суммы любых двух событий A и B является более общим.

Теорема 7.1. Имеет место равенство

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2).$$

Замечание. Свойство аддитивности вероятности двух несовместных событий в приведённом утверждении содержится, поскольку $P(A_1 A_2) = P(\varnothing) = 0.$

Доказательство теоремы нетрудно провести, пользуясь утверждением теоремы 3.1 о числе элементов в объединении множеств.

7.2. В случае суммы n событий имеет место

Теорема 7.2. $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} ... \overline{A_n})$.

Доказательство вытекает из теоремы 5.1, поскольку событие наступления хотя бы одного из указанных событий

$$A = A_1 + A_2 + ... + A_n$$

и ненаступления ни одного из них

$$\overline{A} = \overline{A_1}\,\overline{A_2} ... \overline{A_n}$$

являются, очевидно, противоположными.

7.3. Пусть теперь события $A_1, A_2, ..., A_n$ *независимы в совокупности*, $p_j = P(A_j)$ и $q_j = P(\overline{A_j}) = 1 - P(A_j)$, $j = 1, 2, ..., n.$ Из теоремы 7.1 вытекает тогда соотношение

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - q_1 q_2 ... q_n.$$

В частности, *для двух независимых событий* A_1 и A_2 получаем

$$P(A_1 + A_2) = 1 - q_1 q_2 = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2,$$

и мы получили частный случай утверждения п. 7.1.

8. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛЫ БЕЙЕСА

8.1. Предположим, что событие A есть результат наступления хотя бы одного из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, попарно несовместных и образующих полную группу, но при этом неизвестно, какое именно из H_i наступит. В этом случае события $H_1, H_2, ..., H_n$ называют гипотезами по отношению к A.

8.2. В условиях п. 8.1 справедливо соотношение (называемое формулой *полной вероятности*)

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) P_{H_k}(A). \qquad (8.1)$$

Доказательство. Ввиду полноты группы гипотез имеем

$$E = H_1 + H_2 + ... + H_n.$$

Учитывая очевидное представление $A = AE$ и свойства операций сложения и умножения , получаем тогда

$$A = AE = H_1 A + H_2 A + ... + H_n A.$$

События $H_k A,\ k = 1, 2, ..., n$ оказываются попарно несовместными (предположив противное, мы получили бы совместность гипотез), а поэтому

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k A).$$

Чтобы установить (8.1), осталось применить к каждому слагаемому последней суммы теорему умножения 6.1.

В частном случае двух гипотез формула полной вероятности принимает вид

$$P(A) = P(H_1) P_{H_1}(A) + P(H_2) P_{H_2}(A).$$

8.3. Пусть выполнены условия п. 8.1 и при этом событие *A наступило.* Тогда вероятность того, что событие *A оказалось следствием гипотезы именно* H_k, определяется в виде

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k) P_{H_k}(A)}{P(A)},\ k = 1, 2, ..., n, \qquad (8.2)$$

где $P(A) \neq 0$ – полная вероятность (8.1). Соотношения (8.2) называют формулами Бейеса.

Доказательство (8.2) вытекает из равенства $AH_k = H_k A$, применив к которому теорему умножения, получим

$$P(A) P_A(H_k) = P(H_k) P_{H_k}(A),\ k = 1, 2, ..., n,$$

что и равносильно (8.2).

9. КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ: ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 9.1. Во вновь построенном доме имеется 20 квартир, среди которых 8 расположены на крайних этажах. Квартиры распределяются по жребию. Найти вероятность того, что эти 8 квартир достанутся данным восьми семьям-переселенцам.

Решение. Поскольку всего участников жеребьёвки – 20, то элементарные исходы опыта – это упорядоченные выборки из 20 по 20, т.е. перестановки. Количество всевозможных исходов, таким образом, есть n = 20!

Если событие A состоит в том, что 8 квартир на крайних этажах достанутся восьми семьям-переселенцам, то число благоприятных исходов m_A можно вычислить следующим образом. Среди данных восьми семей возможно 8! способов распределения квартир на крайних этажах, и каждый такой способ сочетается с остальными 12! способами распределения квартир среди остальных 12 участников жеребьёвки. Согласно принципу умножения $m_A = 8!\cdot 12!$ Итак,

$$P(A) = \frac{m_A}{m} = \frac{8!12!}{20!} = \frac{1}{125\,970}.$$

Задача 9.2. В торговую сеть поступают однотипные товары двух производителей. Первый производитель поставляет 80% стандартных изделий, второй – 60%. Для контроля выбрано случайным образом по одному изделию каждого производителя. Какова вероятность, что

а) оба изделия стандартны;

б) только одно из них стандартно;

в) хотя бы одно стандартно.

Решение.

1. Обозначим через A событие, состоящее в том, что оба изделия стандартны. Выразим A через события A_1 – изделие первого производителя стандартно и A_2 – изделие второго стандартно. Ясно, что $A = A_1 A_2$, причём события A_1 и A_2 независимы. Следовательно,

$$P(A) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}8\cdot 0{,}6 = 0{,}48\,.$$

2. Пусть событие B – ровно одно изделие стандартно; в этом случае $B = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$. Поскольку вероятности событий A_1 и A_2 постоянны в условиях проводимого контроля, то A_1 и $\overline{A}_2$ – независимы; точно также независимы $\overline{A}_1$ и A_2, и при этом произведения $A_1\overline{A}_2$ и $\overline{A}_1 A_2$, очевидно, несовместны. Тогда

$$P(B) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) = 0{,}8\cdot 0{,}4 + 0{,}2\cdot 0{,}6 = 0{,}44.$$

3. C – хотя бы одно изделие стандартно; очевидно, что $C = A_1 + A_2$, причём события A_1 и A_2 – совместны; следовательно,

$$P(C) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}48 = 0{,}92\,.$$

Задача 9.3. По самолёту выпущена ракета. Она может быть уничтожена. Самолёт может уничтожить её с вероятностью 0,6. Если этого сделать не удаётся, то ракета поражает самолёт с вероятностью 0,8. Какова вероятность поражения самолёта ракетой?

Решение. Поражение самолёта – сложное событие C, состоящее в совместном наступлении события A – неуничтожении ракеты и события B – поражения в этом случае самолёта ракетой. Следовательно, $C = AB$. Теперь

$$P(C) = P(A)P_A(B).$$

Перейдём к нахождению вероятностей. Событие A противоположно событию уничтожения ракеты, следовательно,

$$P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4; \quad \text{при этом } P_A(B) = 0{,}8.$$

Теперь

$$P(C) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32.$$

Задача 9.4. 20% информации поступает с первого сервера, 80% – со второго. Вероятность поступления фейковой информации для первого сервера равна $P_1 = 0{,}1$; для второго – $P_2 = 0{,}05$.

1. Какова вероятность, что информация с наугад выбранного сервера поступит фейковая?
2. Поступила фейковая информация. Какова вероятность, что её поставил первый сервер?

Решение. Пусть A – событие обнаружения фейка. Возможны гипотезы: H_1 – он поступил с сервера № 1, H_2 – с сервера 2. Очевидно, что выполнены условия несовместности и полноты группы H_1 и H_2. Здесь $P(H_1) = 0{,}2$; $P(H_2) = 0{,}8$; $P_{H_1}(A) = 0{,}1$; $P_{H_2}(A) = 0{,}05$. Тогда:

1) по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}05 = 0{,}06;$$

2) по формулам Бейеса для первой из гипотез

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}1}{0{,}06} = \frac{1}{3}.$$

Задача 9.5. Компьютерной диагностике подвергается группа участников диспансеризации, среди которых 10% страдают некоторыми заболеваниями.

В результате диагностики болезнь выявляется с вероятностью 0,95, и с вероятностью, равной 0,03 здоровый участник признаётся больным. У произвольно выбранного протестированного участника компьютер выявил заболевание. Какова вероятность, что произошла ошибка?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что протестированный участник признан больным. Возможны предположения (гипотезы):

H_1 – тестируется участник, страдающий заболеванием;

H_2 – тестируется здоровый участник.

Требуется найти вероятность гипотезы H_2 при условии, что наступило событие A; следовательно, применима формула Бейеса

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(A)}.$$

По условию задачи гипотезы имеют вероятности $P(H_1) = 0{,}1$ и $P(H_2) = 0{,}9$. Соответствующие условные вероятности события имеют вид:

$$P_{H_1}(A) = 0{,}95;\ P_{H_2}(A) = 0{,}03.$$

Вероятность события A находим по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}03 = 0{,}122\,;$$

теперь

$$P_A(H_2) = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}03}{0{,}122} = \frac{27}{122}.$$

Задача 9.6. На складе вперемешку лежат 50 экземпляров книг, которые являются первыми и вторыми томами сочинений Дж. Р. Р. Толкиена, причём число тех и других больше единицы. Возможно ли при этом условии взять случайным образом пару книг, чтобы с вероятностью, равной $\frac{1}{7}$, это оказался бы двухтомник?

Решение. Пусть первых томов K штук, а вторых L штук. Можно считать, что книги берутся поочерёдно. Вероятность взять сначала первый том, а затем и второй том по формуле вероятности произведения будет $P_1 = \frac{K}{50}\frac{L}{49}$, вероятность выбора в обратном порядке $P_2 = \frac{L}{50}\frac{K}{49}$. Следовательно, вероятность сформировать двухтомник тем или иным способом по формуле вероятности суммы есть $P_1 + P_2 = 2 \cdot \frac{KL}{50 \cdot 49}$. По условию задачи получаем систему уравнений в целых числах

$$\begin{cases} \dfrac{KL}{25 \cdot 49} = \dfrac{1}{7}; \\ K + L = 50; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} KL = 25 \cdot 7; \\ K + L = 50. \end{cases}$$

Первому уравнению удовлетворяют следующие пары натуральных чисел, больших единицы: (25; 7), (35; 5). Однако ни одна из них не удовлетворяет второму уравнению (можно также непосредственно решить систему, чтобы убедиться, что у неё натуральных решений нет).

Ответ: невозможно.

10. ПОВТОРЕНИЕ ОПЫТОВ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

10.1. Пусть один и тот же опыт повторяется n раз, и при этом вероятность наступления события A в каждом таком опыте остаётся неизменной, равной некоторому p; пусть $q = 1 - p$. Математическая модель, используемая для описания такой последовательности опытов, называется *схемой Бернулли*.

Обозначим через $P_n(k)$ вероятность того, что *событие A появится ровно k раз в n опытах.* В этом случае говорят также о k «успехах» в n опытах. Имеет место следующая ***формула Бернулли***:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (10.1)$$

Доказательство. Фиксируем какие-либо k опытов. Обозначим через $A_{n,\,k}$ событие наступления события A ровно k раз (т.е. в этих в k опытах), происходящее совместно с ненастулением A (наступлением $\overline{A}$) $n-k$ раз. Очевидно, что

$$P(A_{n,\,k}) = \underbrace{p \cdot \ldots \cdot p}_{k} \cdot \underbrace{q \cdot \ldots \cdot q}_{n-k} = p^k q^{n-k}.$$

Событие $B_{n,\,k}$, состоящее в том, что *A* появится ровно k раз, равносильно наступлению какого-либо из описанных (попарно несовместных) $A_{n,\,k}$, т.е. их сумме. Тогда

$$P_n(k) = P(B_{n,\,k}) = p^k q^{n-k} + p^k q^{n-k} + \ldots p^k q^{n-k},$$

причём слагаемых в этой сумме столько, сколько существует способов сформировать различные комбинации типа $A_{n,\,k}$. Это количество равно C_n^k – числу (неупорядоченных) выборок из n по k. Таким образом, слагаемое $p^k q^{n-k}$ повторяется C_n^k раз и мы приходим к формуле (10.1).

10.2. В условиях пункта 10.1 *вероятность наступления события* A *в n опытах от* k_1 *до* k_2 *раз*, т.е. или k_1, или $k_1 + 1$, …, или k_2 есть, очевидно,

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

10.3. Число m_o появления события называется *наивероятнейшим*, если вероятность появления события m_o раз в *n* испытаниях превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний. Можно доказать, что число m_o (или наивероятнейшие числа, поскольку их может быть и два) определяется из двойного неравенства

$$(n+1)p - 1 \le m_o \le (n+1)p.$$

10.4. Обобщением схемы Бернулли является следующая схема, называемая полиномиальной. Пусть от опыта к опыту вероятность наступления события *A* может меняться, будучи зависимой только от номера опыта, так что в первом опыте она равна p_1, во втором – p_2, в *n*-м – p_n; положим $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$, ..., $q_n = 1 - p_n$. Тогда вероятность наступления события *A* в этих *n* опытах ровно *k* раз оказывается равной коэффициенту при z^k в многочлене

$$\varphi_n(z) = \prod_{j=1}^{n} (q_j + p_j z),$$

функцию $\varphi_n(z)$ называют производящей.

Если же все $p_j = p$ одинаковы и, соответственно, одинаковы все $q_j = 1 - p_j = q$, то согласно формуле бинома Ньютона, коэффициент при z^k совпадёт с правой частью формулы (10.1), в результате чего приходим к формуле Бернулли.

11. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ

С ростом n $(n \to \infty)$ использование формулы Бернулли и её следствий приводит к громоздким вычислениям. Рассмотрим в этом случае соответствующие приближённые формулы.

11.1. При больших значениях n и $0 < p < 1$ значение вероятности Бернулли $P_n(k)$ можно приближённо вычислить по «*локальной*» *формуле Лапласа*

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_{n,\,k}),$$

где $x_{n,\,k} = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$; $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Локальная формула Лапласа при $n \to \infty$ $\left|x_{n,\,k}\right| \le \text{const}$ вытекает из представления (асимптотической формулы)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_{n,\,k})(1 + \varepsilon_{n,\,k}), \tag{11.1}$$

где $\left|\varepsilon_{n,\,k}\right| < \dfrac{\text{const}}{\sqrt{n}}$.

11.2. Если количество n опытов велико и $0 < p < 1$, то вероятность $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ того, что *событие A произойдёт не менее* k_1 *и не более* k_2 *раз, может быть найдена по приближённой интегральной формуле Лапласа*

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi\left(x_{k_2}\right) - \Phi\left(x_{k_1}\right),$$

где $x_{k_1} = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_{k_2} = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$; $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,dt$.

Таблицы значений экспоненциальной функции $\varphi(x)$ и интегральной функции $\Phi(x)$ имеются во многих литературных источниках; см., например [1]. При этом используется свойство чётности функции φ: $\varphi(-x) = \varphi(x)$ и свойство нечётности $\Phi(x)$: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Интегральная формула Лапласа вытекает из асимптотического представления (11.1) вероятности Бернулли и следствия 10.2 формулы Бернулли.

11.3. С помощью интегральной формулы Лапласа можно найти вероятность отклонения относительной частоты $w(A)$ события A от его вероятности $p(A)$ по следующей приближённой формуле:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right); \tag{11.2}$$

здесь Φ – как и выше – интегральная функция Лапласа.

Для доказательства выражения (11.2) запишем неравенство $\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$ в равносильном виде $n(p-\varepsilon)<m<n(p+\varepsilon)$ и заметим, что m есть число наступлений события A в n опытах. Поэтому можно применить интегральную формулу Лапласа с $k_1=n(p-\varepsilon),\ k_2=n(p+\varepsilon)$. Имеем тогда

$$x_{k_1}=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{-n\varepsilon}{\sqrt{npq}}=-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \quad \text{и} \quad x_{k_2}=\frac{n\varepsilon}{npq}=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Следовательно,

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

откуда в силу нечётности интегральной функции Лапласа и будет вытекать соотношение (11.2).

11.4. Из результатов п. 11.3 следует упомянутый выше закон больших чисел Бернулли.

Теорема 11.1. Пусть $w_n(A)=\frac{m_A}{n}$ – относительная частота события A в n опытах и $p(A)$ – его вероятность. Тогда для любого $\varepsilon>0$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m_A}{n}-p(A)\right|<\varepsilon\right)=1. \tag{11.3}$$

Утверждение следует из соотношения (11.2) и того факта, что при $n\to\infty$ его правая часть стремится к значению $2\Phi(\infty)=2\cdot 0{,}5=1$.

В связи с равенством (11.3) говорят также, что относительная частота события A сходится по вероятности (при $n\to\infty$) к вероятности $p(A)$.

11.5. Пусть в каждом опыте вероятность события A постоянна, но от серии к серии опытов (с ростом их количества n) она меняется обратно пропорционально количеству опытов; другими словами, значение произведения $\lambda=np$ остаётся постоянным. При сформулированных условиях имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \tag{11.3}$$

Для его доказательства представим вероятность Бернулли в виде

$$P_n(k)=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\,p^k\cdot(1-p)^{n-k}=$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}\right)\cdot\left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right)^{-\frac{\lambda}{n}\cdot(n-k)}. \tag{11.4}$$

При вычислении предела при $n \to \infty$ заметим, что отношение $\frac{\lambda^k}{k!}$ остаётся постоянным, произведение же в скобках содержит k множителей, каждый из которых стремится к единице. Последний множитель содержит в скобках выражение вида $(1+t)^{1/t}$, где $t = -\frac{\lambda}{n}$, так что $t \to 0$, если $n \to \infty$.

Предел этого выражения (второй замечательный предел) есть число e. Показатель же степени

$$-\frac{\lambda}{n} \cdot (n-k) = -\lambda + \frac{k}{n}$$

при этом стремится к значению $-\lambda$.

Таким образом, предельным значением произведения в правой части выражения (11.4) является $\frac{\lambda^k}{k!} \cdot 1^k e^{-\lambda}$, чем и доказано утверждение (11.3).

Установленный результат означает, что если вероятность p появления события A в каждом из n опытов мала, а при этом n – велико, то имеет место приближённая формула

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

в которой $\lambda = np$.

Вероятность же того, что при достаточно большом числе опытов событие произойдёт не менее m_1 и не более m_2 раз можно найти (ср. п. 10.2) по приближённой формуле

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \sum_{k=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

12. СХЕМА БЕРНУЛЛИ: ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 12.1. Найти вероятность того, что событие A появится в пяти независимых опытах: а) 2 раза; б) менее 2 раз, если вероятность появления события A в одном опыте $p = 0{,}4$.

Решение.

1. Пусть событие B состоит в появлении A ровно 2 раза в пяти опытах. Тогда по формуле Бернулли

$$P(B) = P_5(2) = C_5^2 \cdot (0{,}4)^2 \cdot (0{,}6)^2 = 0{,}3456.$$

2. Если событие C означает появление A менее 2 раз, т.е. или ни разу ($k = 0$), или один раз ($k = 1$), то

$$P(C) = P_5(0) + P_5(1) = C_5^0 \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 + C_5^1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^4 =$$
$$= 0{,}14256 + 0{,}4752 = 0{,}61776.$$

Задача 12.2. Футбольная команда играет с равносильным соперником серию матчей (в случае ничьей назначаются буллиты). Что вероятнее: выиграть два матча из четырёх или три из шести?

Решение. Имеем схему Бернулли, в которой вероятность события в единичном опыте (выигрыша в матче) $p = \dfrac{1}{2}$, $q = 1 - p = \dfrac{1}{2}$. Сравним $P_4(2)$ и $P_6(3)$. Имеем

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}, \quad P_6(3) = C_6^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

Следовательно, вероятность выиграть два матча из четырёх – выше.

Задача 12.3. Тест по математике сдают 15 студентов. Вероятность преодолеть пороговое значение для каждого из них 0,9. Найти наивероятнейшее число успешно прошедших тестирование и его вероятность.

Решение. Так как n =15, p = 0,9, то по формуле (10.3) имеем $16 \cdot 0{,}9 - 1 \le m_o \le 16 \cdot 0{,}9$ т.е. $m_o = 14$.

Теперь

$$P_{15}(14) = C_{15}^{14} \cdot (0{,}9)^{14} \cdot (0{,}1)^1 \approx 0{,}343.$$

Задача 12.4.

а) Вероятность того, что на странице рукописи имеется хотя бы одна опечатка, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 400 страниц книги ровно 104 содержат опечатки.

б) При тех же условиях найти вероятность того, что будет не менее 72 и не более 104 страниц с опечатками.

Решение.

а) Можно использовать локальную формулу Лапласа, где n = 400, p = 0,2, q = 0,8; тогда

$$x_{n,\,k} = \frac{104 - 80}{8} = 3.$$

Поскольку $\varphi(3) = 0{,}0044$, то будем иметь

$$P_{400}(104) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\varphi(3) = \frac{0{,}0044}{8} = 0{,}00055.$$

б) Используем интегральную формулу Лапласа, в которой n = 400, p = 0,2, q = 0,8; тогда

$$x_{n,\,k_1} = \frac{72 - 80}{8} = -1, \quad x_{n,\,k_2} = \frac{104 - 80}{8} = 3.$$

Находим $\Phi(-1) = -\Phi(1) = -0{,}3413$, $\Phi(3) = 0{,}4986$. Следовательно,

$$P_{400}(72 \le k \le 104) = \Phi(3) - \Phi(-1) = \Phi(3) + \Phi(1) = 0{,}8399.$$

Задача 12.5. Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью p = 0,9544 утверждать, что относительная частота выпадения герба отклонилась от 0,5 не более, чем на 0,05?

Решение. Согласно приближённой формуле (11.2) имеем

$$0{,}9544 = P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}5\right| < 0{,}05\right) \approx 2\Phi\left(0{,}05\sqrt{\frac{n}{0{,}5(1-0{,}5)}}\right),$$

где m – число появлений герба при n подбрасываниях монеты. Отсюда

$$0{,}9544 \approx 2\Phi(0{,}05\sqrt{4n}) \quad \text{или} \quad \Phi(0{,}1\sqrt{n}) \approx 0{,}4772\,.$$

По таблице значений интегральной функции Лапласа находим значение аргумента интегральной функции Лапласа: $0{,}1\sqrt{n} \approx 2$, откуда $n \approx 400$. Итак, монету надо бросить 400 раз.

Задача 12.6. Вероятность того, что абонент неправильно наберёт телефонный номер, принимается для всех абонентов равной 0,001. Определить вероятность того, что среди 500 произведённых независимо один от другого вызовов ровно один абонент наберёт неправильно телефонный номер.

Решение. Число опытов n = 500 велико, вероятность неверного набора номера в каждом опыте p = 0,001 – мала. Следовательно, применяем формулу Пуассона, в которой $\lambda = np$ = 0,5. Поскольку $e^{-0{,}5} \approx 0{,}6065$, то

$$P_{500}(1) \approx \frac{0{,}5 \cdot 0{,}6065}{1!} = 0{,}30325\,.$$

Задача 12.7. В течение года из аэропорта города N отправляется 1200 авиарейсов. Вероятность задержки каждого вылета по метеоусловиям равна 0,005. Какова вероятность задержки по метеоусловиям в течение года не менее 2 рейсов?

Решение. По условию задачи вероятность наступления события в единичном опыте (задержки рейса по метеоусловиям) мала: p = 0,005, тогда как число опытов (число рейсов) велико: n = 1500. Следовательно, в расчётах возможно использование формулы Пуассона. Событие задержки не менее 2 рейсов противоположно событию задержки $k \le 1$ рейсов. Имеем $\lambda = np = 1200 \times 0{,}005 = 6$ и

$$p_{1500}(0 \le k \le 1) = p_{1500}(0) + p_{1500}(1) = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} + \frac{6^1 e^{-6}}{1!} = 7e^{-6},$$

т.е. $p_{1500}(k \ge 2) = 1 - 7e^{-6} \approx 0{,}97$.

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. КОНТРОЛЬНЫЙ МОДУЛЬ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Используя таблицы истинности, доказать равенства

$$\overline{A_1 + A_2} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,,\ \overline{A_1 A_2} = \overline{A_1} + \overline{A_2}.$$

2. Если классическая вероятность некоторого события равна 1, то верно ли, что это событие – достоверное? Почему?

3. Доказать, что для любых двух событий A и B имеет место неравенство

$$P(A+B) \le P(A) + P(B).$$

4. Доказать, что если $p = P(A)$ и $q = P(\overline{A})$, то $pq \le \frac{1}{4}$.

5. Можно ли в случае *двух* гипотез формулу полной вероятности записать в виде

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(\overline{H}_1)P_{\overline{H}_1}(A)?$$

6. Доказать, что в схеме Бернулли вероятность ρ наступления события *A* хотя бы один раз может быть вычислена в виде $\rho = 1 - q^n$. Здесь p – вероятность появления события *A* в каждом из n опытов, $q = 1 - p$.

7. Вероятность p появления события *A* в каждом опыте постоянна. Опыты проводят до первого наступления события. Чему равна вероятность того, что будет проведено ровно n опытов?

8. Доказать, что если вероятность p появления события *A* в каждом из n опытов мала (n – велико) и $\lambda = np$, то вероятность появления события *A* хотя бы один раз может быть найдена по приближённой формуле

$$P(k \ge 1) \approx 1 - e^{-\lambda}.$$

2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Образуют ли полную группу следующие события: *A* – два попадания в мишень при двух выстрелах, *B* – ни одного попадания при тех же двух выстрелах?

2. Рассматриваются следующие события: *A* – первое из полученных электронных писем содержит навязчивую рекламу (СПАМ), *B* – второе письмо содержит СПАМ. Выразить с помощью операций сложения и умножения через события *A* и *B* и (или) им противоположные следующие события:

а) событие *C* – ни одно из писем не содержит СПАМ;

б) хотя бы одно письмо содержит СПАМ;

в) только одно письмо содержит СПАМ.

3. Вероятность дождливой погоды в предстоящий выходной день равна 0,7. Вероятность удачной рыбалки в дождливую погоду равна 0,8, а в ясную погоду – 0,4. Какова вероятность, что в предстоящий выходной рыбалка будет удачной?

4. Заявки работодателей на специалистов инженерных, экономических и юридических направлений поступают на биржу в отношении 6:3:1. Вероятность того, что претендент на вакансию инженера удовлетворит требованиям работодателя равна 0,8, на вакансию экономиста – 0,8, на вакансию юриста – 0,5. Найти вероятность, что:

а) случайно выбранный на бирже претендент устроится на работу по своей специальности;

б) вероятность того, что устроившийся на работу специалист – экономист.

5. Имеется 10 двадцатидолларовых купюр, из которых 4 купюры фальшивые. Наугад *поочерёдно* извлекают две купюры и отыскивают вероятность события *A*, состоящего в том, что обе эти купюры окажутся фальшивыми. Можно ли применять формулу Бернулли, если

а) купюра после извлечения и проверки возвращается в пачку;

б) выборка безвозвратная.

Найти $P(A)$ в каждом из случаев а) и б).

6. Вероятность продать по оптимальной цене каждый из пяти пакетов акций в период их падения равна 0,25. Какова вероятность продажи по оптимальной цене большей части пакета?

7. В прямоугольник вписаны две окружности равного радиуса, касающиеся друг друга внешним образом. В прямоугольник случайным образом брошена точка. Какова вероятность, что она не попадёт ни в один из кругов?

8. В семье пять детей; вероятность рождения мальчика в данной местности равна 0,6. Найти вероятности следующих событий:

а) в семье две девочки;

б) в семье не менее двух девочек;

в) в семье мальчиков больше, чем девочек.

9. В данной местности левши составляют 5% населения. Какова вероятность, что на факультете, где обучаются 400 человек, окажутся не менее 3 левшей?

10. Студент одинаково плохо подготовился к каждому из трёх экзаменов. С какой вероятностью он сдаёт каждый экзамен, если хотя бы один из них он сдаст с вероятностью 0,578125.

11. Каждый из трёх независимо работающих сигнализаторов своевременно сообщает о нарушении заданного режима работы реактора с вероятностью, соответственно, $p_1 = 0{,}9$; $p_2 = 0{,}8$; $p_3 = 0{,}75$. Какова вероятность того, что при нарушении заданного режима работы сигнала не поступит?

12. Среди пяти одинаковых по внешнему виду саженцев три – элитных. Наугад взяты два саженца. Какова вероятность, что ровно один из них элитный?

13. Вероятности своевременного поступления платежа на карты, приобретённые в банках А, Б, В, равны соответственно $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}9$, $p_3 = 0{,}6$. На каждую из карт банков А, Б, В перечислены средства. Какова вероятность того, что ровно на две карты перевод поступит своевременно?

14. Вероятность того, что каждый данный клиент банка потребует в течение календарного года закрытия своего лицевого счёта, равна 0,002. Какова вероятность, что среди 1000 клиентов отделения сбербанка трое потребуют в течение года закрытия лицевых счетов?

Ответ записать в виде десятичной дроби приближённо с точностью до 0,01.

15. Сколько следует разместить люменисцентных ламп на потолке офиса, чтобы офис был освещён (хотя бы одной лампой) с вероятностью 0,99968, если вероятность перегорания каждой лампы равна 0,2?

Глава 3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ОБУЧАЮЩИЙ МОДУЛЬ

Случайной величиной называется числовая величина X, которая в каждом опыте принимает одно и только одно значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин. Простейший пример – индикатор случайного события A, т.е. функция $\eta = \eta(A)$, принимающая значение, равное 1, если A наступает, и значение, равное 0, в противном случае.

Если все возможные значения величины X можно записать в виде числовой последовательности $\{x_n\}$, n = 1, 2, ... (конечной или бесконечной), то X называется дискретной (ДСВ – дискретная случайная величина); если же возможные значения X заполняют целиком некоторый числовой интервал, то величина X называется непрерывно распределённой на этом интервале (НСВ – непрерывная случайная величина).

Примером дискретной случайной величины является ежедневно фиксируемый рублевый курс доллара, непрерывной – время t загрузки файла, скачиваемого из Интернета: $t \in (0, \infty)$.

1. РЯД РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.1. ***Законом распределения*** дискретной случайной величины (ДСВ) X называется соответствие между её возможными значениями x_k и вероятностями $p_k = P(X = x_k)$ принятия этих значений. Обычный способ задания такого закона – ряд (таблица) распределения, который в случае конечного числа n значений величины X (записанных в порядке возрастания) имеет вид

X	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1. \tag{1.1}$$

Действительно, все события вида $A_k = \{X = x_k\}$ образуют полную группу, так что

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = E,$$

и по аксиоме вероятности **А1**

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1.$$

Благодаря попарной несовместности событий A_k и аксиоме **А3** получаем из последнего равенства утверждение (1.1).

Возможно также рассмотрение ряда распределения с бесконечным набором значений X. В этом случае, согласно аксиоме **А4**, для соответствующих вероятностей значений $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

При этом мы рассматриваем распределения, для которых записанный числовой ряд является сходящимся.

1.2. Числовые величины, описывающие случайную величину «суммарно», называются её ***числовыми характеристиками.*** Среди них основными являются так называемые математическое ожидание, характеризующее среднее значение случайной величины, и дисперсия, характеризующая степень рассеяния случайной величины относительно её среднего значения.

Ограничимся пока рассмотрением дискретной случайной величины с конечным набором возможных значений.

1.3. ***Математическое ожидание*** $M(X)$ дискретной величины X определяется в виде

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \, . \qquad (1.2)$$

Поясним, в каком смысле выражение (1.2) является *средним значением* случайной величины. Для этого рассмотрим пример равномерного распределения X, т.е. распределения с *равными* вероятностями p всех значений. Согласно свойству (1.1) каждая такая вероятность $p = \frac{1}{n}$. Значит, математическое ожидание равномерного распределения есть среднее арифметическое $x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + x_n \cdot \frac{1}{n}$ значений x_k. В общем же случае естественно выбрать в качестве среднего ту же конструкцию суммы произведений наблюдаемых значений случайной величины на их вероятности, учитывающую «вероятностный вклад» (вообще говоря, неравномерный) каждого такого значения, в указанную сумму.

Замечание. Математическое ожидание ДСВ относится к так называемым характеристикам положения, указывающим некоторое среднее, ориентировочное значение, около которого группируются все возможные значения случайной величины. К другим характеристикам положения относятся понятия моды и медианы распределения, ознакомиться с которыми читатель может, например, по книге [1].

1.4. Наряду со средним значением $M(X)$ случайной величины X была бы также полезна характеристика степени рассеяния значений x_k относительно их среднего. На первый взгляд, следует рассмотреть среднее значений разностей $x_k - M(X)$, т.е. сумму вида

$$\sum_{k=1}^{n} \left(x_k - M(X) \right) p_k \, . \qquad (1.3)$$

Однако, преобразовав формулу (1.3) к виду

$$\sum_{k=1}^{n} x_k p_k - M(X) \sum_{k=1}^{n} p_k$$

и принимая во внимание соотношения (1.2) и (1.3), получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - M(X)\right)p_k \equiv 0 \tag{1.4}$$

для *любых* распределений, и, следовательно, выражение (1.3) не может служить характеристикой рассеяния конкретных распределений.

Нулевое значение суммы (1.4) получилось за счёт «интерференции» положительных и отрицательных уклонений $x_k - M(X)$. Чтобы устранить такую интерференцию, рассматривают *сумму произведений квадратов отклонений на вероятности* p_k соответствующих x_k

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k - M(X)\right)^2 p_k\,. \tag{1.5}$$

Числовая характеристика вида (1.5) называется *дисперсией* случайной величины *X*.

Из аксиомы **A1** и определения (1.5) следует, что $D(X) \geq 0,$ а тогда можно рассмотреть характеристику рассеяния вида

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\,,$$

называемую *средним квадратическим отклонением*. Она предпочтительней дисперсии, поскольку имеет размерность значений самой случайной величины, тогда как $D(X)$ имеет размерность квадратов значений *X*.

1.5. Дисперсию ДСВ можно вычислить также по формуле

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n}(x_k)^2 p_k - (M(X))^2\,. \tag{1.6}$$

Для доказательства (1.6) выполним в выражении (1.5) следующие преобразования:

$$\begin{aligned} D(X) &= \sum_{k=1}^{n}(x_k^2 p_k - 2M(X)x_k p_k + (M(X))^2 p_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{n}x_k^2 p_k - 2M(X)\sum_{k=1}^{n}x_k p_k + (M(X))^2)\sum_{k=1}^{n}p_k = \\ &= \sum_{k=1}^{n}x_k^2 p_k - 2(M(X))^2 + (M(X))^2\cdot 1 = \sum_{k=1}^{n}x_k^2 p_k - (M(X))^2, \end{aligned}$$

чем и установлено (1.6).

Замечание. Определение математического ожидания и дисперсии ДСВ можно распространить и на случай величин с бесконечным перечнем возможных значений. В этом случае суммы (1.2) и (1.5) следует заменить числовыми рядами

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k \quad \text{и} \quad D(X) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k - M(X)\right)^2 p_k\,,$$

требуя их сходимость, причём для первого из написанных рядов – абсолютную сходимость.

1.6. Пример 1. Ремонтная компания обслуживает два участка водопровода. В силу их изношенности вероятность порыва сети на первом равна 0,3, на втором – 0,2. Составить ряд распределения случайной величины X – числа участков, не требующих ремонта. Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.

Решение. Рассматриваемая случайная величина X может принять одно из следующих значений: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ соответственно следующим событиям: имеются порывы на обоих участках, имеется ровно один порыв и порывов на обоих участках не будет. Вероятности нормального функционирования сети на каждом из участков равны соответственно 0,7 и 0,8. Согласно теореме о вероятности произведения событий

$$P(X = 2) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56;\; P(X = 0) = (1 - 0{,}7)(1 - 0{,}8) = 0{,}06.$$

Осталось найти вероятность $P(X = 1)$ того, что будет ровно один порыв; здесь можно воспользоваться свойством (1.1) вероятностей в ряде распределения:

$$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 2) = 0{,}38.$$

Итак, ряд распределения случайной величины X принимает вид

x	0	1	2
p	0,6	0,38	0,56

Найдём теперь математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Пользуясь формулами (1.2) и (1.6), получаем

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}38 + 2 \cdot 0{,}56 = 1{,}5$$

и

$$D(X) = 0^2 \cdot 0{,}6 + 1^2 \cdot 0{,}38 + 2^2 \cdot 0{,}56 - 1{,}5^2 = 0{,}37\,.$$

Пример 2. Ряд распределения случайной величины X имеет вид

x	x_1	x_2
p	0,3	0,7

Найти значения x_1 и x_2, если известны математическое ожидание $M(X)$ = 2,7 и дисперсия $D(X)$ = 0,21.

Решение. Согласно данному ряду распределения

$$M(X) = x_1 \cdot 0{,}3 + x_2 \cdot 0{,}7 \text{ и } D(X) = x_1^2 \cdot 0{,}3 + x_2^2 \cdot 0{,}7 - 2{,}7^2.$$

Имеем, следовательно, систему алгебраических уравнений для нахождения x_1 и x_2

$$\begin{cases} 0{,}3x_1 + 0{,}7x_2 = 2{,}7; \\ 0{,}3x_1^2 + 0{,}7x_2^2 - 2{,}7^2 = 0{,}21, \end{cases}$$

которую несложно преобразовать к виду

$$\begin{cases} x_1 = 9 - \dfrac{7}{3}x_2; \\ \dfrac{5}{3}x_2^2 - 9x_2 + 12 = 0. \end{cases}$$

Найдя из последнего квадратного уравнения значения x_2, получаем затем пару решений системы

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3 \ \text{ и } \ x_1 = \frac{17}{5},\ x_2 = \frac{12}{5}.$$

Поскольку в ряде распределения значения ДСВ расположены в порядке возрастания, то $x_1 < x_2$. Следовательно, $x_1 = 2,\ x_2 = 3$.

2. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1. Понятие ряда распределения неприменимо к непрерывным случайным величинам (НСВ), поскольку невозможно выписать перечень всех её значений (читатель, знакомый с теорией множеств, знает, что множество всех точек числового интервала не является счётным); более того, как мы установим ниже, вероятность каждого конкретного значения непрерывной случайной величины оказывается равной нулю. В этом случае содержательной характеристикой «поведения» НСВ могли бы служить вероятности принятия ею значений в заданном числовом интервале. Эти вероятности, как мы увидим в дальнейшем, могут быть выражены через функцию вида

$$F(x) = P(X < x). \tag{2.1}$$

Функцию, определённую в виде (2.1), мы будем рассматривать теперь *для любой* случайной величины X; она соотносит каждому $x \in (-\infty;\ +\infty)$ вероятность события, состоящую в принятии величиной X значения левее точки x (см. рис. 2.1) и называется *функцией распределения* (синонимы: интегральный закон распределения, интегральная функция распределения случайной величины X).

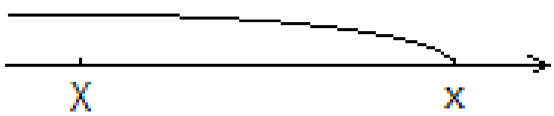


Рис. 2.1

2.2. Начнём с рассмотрения *функции распределения дискретной случайной величины X*. Пусть она принимает конечное число значений, так что её ряд распределения имеет вид

X	x_1	x_2	…	x_k	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_k	…	p_n

Докажем, что

$$F(x) = \sum_{k \mid x_k < x} p_k\,, \tag{2.2}$$

причём суммирование в соотношении (2.2) проводится по тем и только тем k, для которых соответствующие значения x_k оказываются меньшими x.

Чтобы установить соотношение (2.2), рассмотрим все возможные расположения аргумента x по отношению к значениям $x_1, x_2, ..., x_n$. Если $x \le x_1$, то событие $X < x$ является невозможным, и, следовательно, $F(x) = 0$.

В случае $x_1 \le x < x_2$ событие $X < x$ равносильно событию $X = x_1$, а тогда $F(x) = p_1$. Если $x_2 \le x < x_3$, то событие $X < x$ состоит в наступлении хотя бы одного из двух несовместных событий $X = x_1$ и $X = x_2$, а тогда $F(x) = p_1 + p_2$.

Рассуждая подобным образом далее, мы приходим, наконец, к последнему случаю $x_n < x$, и тогда

$$F(x) = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

В «развёрнутой» форме установленный результат принимает вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1; \\ p_1, & x_1 < x \le x_2; \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3; \\ ... & \\ p_1 + p_2 + ... p_{n-1}, & x_{n-1} < x \le x_n; \\ 1, & x > x_n, \end{cases}$$

и тем самым соотношение (2.2) установлено.

Мы получили неубывающую кусочно-постоянную функцию, значения которой расположены в промежутке [0, 1], непрерывную в каждой точке x_k $(k = 1, 2, ..., n)$ слева. Её предел на $-\infty$ равен 0 (точнее, $F(x) = 0$ при $x \le x_1$), а на $+\infty$ равен 1 (точнее, $F(x) = 1$ при $x > x_n$).

Указанный принцип построения $F(x)$ называют принципом накопления вероятностей.

2.3. Некоторые свойства функции распределения ДСВ могут быть перенесены на общий случай. Речь идёт о следующих свойствах:

а) $0 \le F(x) \le 1$;

б) $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$;

в) $F(x)$ – неубывающая функция;

г) если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (α, β), то $F(x) = 0$ при $x \le \alpha$ и $F(x) = 1$ при $x \ge \beta$; в случае распределения X на всей числовой оси имеют место соотношения

$$F(+\infty) = 1 \quad \text{и} \quad F(-\infty) = 0, \tag{2.3}$$

где, по определению, $F(\pm\infty) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} F(x)$.

Доказательство. Свойство а) очевидно, поскольку значения $F(x)$ суть вероятности событий.

Для доказательства свойства б) представим значение $F(b)$ в виде

$$F(b)=P(X<b)=P(X<a \quad \text{или} \quad a\le X<b).$$

Поскольку события $X<a$ и $a\le X<b$ несовместны, то в силу аксиомы **А3** получим

$$F(b)=P(X<a)+P(a\le x<b).$$

Таким образом,

$$F(b)=F(a)+P(a\le x<b),$$

а это и равносильно свойству б).

Из последнего соотношения и оценки $F(a)\ge 0$ получаем, что $F(b)\ge F(a)$ при $b>a$, а это и означает, что функция распределения – неубывающая всюду.

Первая часть утверждения п. г) достаточно очевидна: событие $X<x$ является невозможным при $x\le\alpha$ и достоверным – при $x\ge\beta$. Соотношение (2.3) в общем случае мы не доказываем.

2.4. Следующие свойства относятся к случаю *непрерывной* $F(x)$.

а) Соотношение

$$P(X=x)=0$$

имеет место для любого действительного x.

б) Справедливо равенство

$$P(a\le X\le b)=P(a<X\le b)=P(a<X<b)=P(a\le X<b)=F(b)-F(a). \qquad (2.4)$$

Доказательства свойств а) и б) основаны на возможности предельного перехода под знаком функции $F(x)$, обладающей свойством непрерывности. Так, свойство а) есть результат предельного перехода (при $\Delta x\to 0$) в равенстве (см. свойство б) в п. 2.3):

$$P(x\le X<x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x);$$

соотношения (2.4) снова следуют из свойства б) п. 2.3, поскольку вероятность принятия непрерывной случайной величиной каждого конкретного значения равна нулю.

В дальнейшем, рассматривая непрерывные случайные величины (НСВ), будем всегда предполагать, что их функции распределения $F(x)$ непрерывны и кусочно-дифференцируемы.

2.5. Пример. Случайное событие A имеет вероятность $P(A)=p$. Построить функцию распределения индикатора η наступления события и найти его числовые характеристики $M(\eta)$ и $D(\eta)$.

Решение. Выше индикатор был определён как дискретная случайная величина с рядом распределения

η	0	1
p	q	p

где $q=1-p$.

Согласно соотношению (2.2) имеем функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ q, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найдём математическое ожидание и дисперсию:

$$M(\eta) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p\,,\ D(\eta) = 0^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Итак, математическое ожидание индикатора события A равно его вероятности p, а дисперсия – произведению pq.

3. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

3.1. ***Плотностью распределения*** непрерывной случайной величины X (плотностью вероятности или дифференциальной функцией распределения) назовём функцию вида $f(x) = F'(x)$, где $F(x)$ – соответствующая функция распределения.

Согласно принятому в п. 2.4 соглашению для всякой непрерывной случайной величины X плотность распределения существует (хотя бы в виде односторонней производной) всюду за исключением, может быть, конечного числа точек.

Использование термина «*плотность*» оправдано следующими соображениями. По определению производной

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}. \qquad (3.1)$$

Отношение, записанное под знаком предела (3.1), при $\Delta x > 0$ есть как бы средняя плотность вероятности значений X на промежутке $(x, x + \Delta x)$. Значение предела (3.1) по аналогии с известным из физики понятием плотности массы естественно тогда именовать плотностью вероятности в точке x.

В соответствии с выражением (3.1) при малых Δx справедливо приближённое равенство

$$P(x < X < x + \Delta x) \approx f(x)\Delta x,$$

т.е. вероятность принятия непрерывной случайной величиной X значений в малом интервале практически равна соответствующему дифференциалу функции распределения.

3.2. Перейдём к рассмотрению следующих *свойств* плотности распределения. Справедливы утверждения:

а) $f(x) \ge 0$ для всех x;

б) $P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)dx$;

в) функция распределения $F(x)$ может быть восстановлена (по известной дифференциальной функции) в виде

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx;$$

г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (свойство нормированности).

Замечание. Несобственный интеграл по $(-\infty,\ +\infty)$ здесь и в дальнейшем понимается в смысле так называемого главного значения:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{T\to+\infty} \int\limits_{-T}^{T} f(x)dx .$$

Свойство а) очевидно, так как $f(x)$ есть производная неубывающей функции.

Установим соотношение б). Согласно определению п. 3.1, функция распределения $F(x)$ является одной из первообразных для $f(x)$. Тогда применима формула Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a),$$

в правой части которой согласно (2.4) мы узнаем значение $P(a < X < b)$.

Равенства в) и г) вытекают из свойства б) и соотношения (2.3); например:

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x) - F(-\infty) = F(x) - 0 = F(x).$$

3.3. Пример. Плотность распределения некоторой непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ cx, & 0 \le x < 1; \\ 0, & x \ge 1, \end{cases}$$

где c – постоянная величина. Найти значение c, функцию распределения $F(x)$ и вероятность $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$.

Решение. Согласно свойству г) нормированности (п. 3.2) имеем

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{1} cxdx + \int\limits_{0}^{+\infty} 0dx = 0 + \frac{1}{2}cx^2\Big|_0^1 + 0 = \frac{1}{2}c,$$

откуда $c = 2$. Теперь

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 2x, & 0 \le x < 1; \\ 0, & x \ge 1. \end{cases}$$

Найдём $F(x)$, используя свойство в) п. 2.2, в); рассмотрим при этом все возможные здесь случаи: $x \le 0$, $0 < x < 1$, $x \ge 1$. Имеем

1) при $x \le 0$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0;$$

2) при $0 < x < 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{-\infty}^{x} 2xdx = x^2;$$

3) при $x \geq 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{-\infty}^{1} 2xdx + \int_{1}^{x} 0dx = 1.$$

Таким образом (см. рис. 3.1):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^2, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

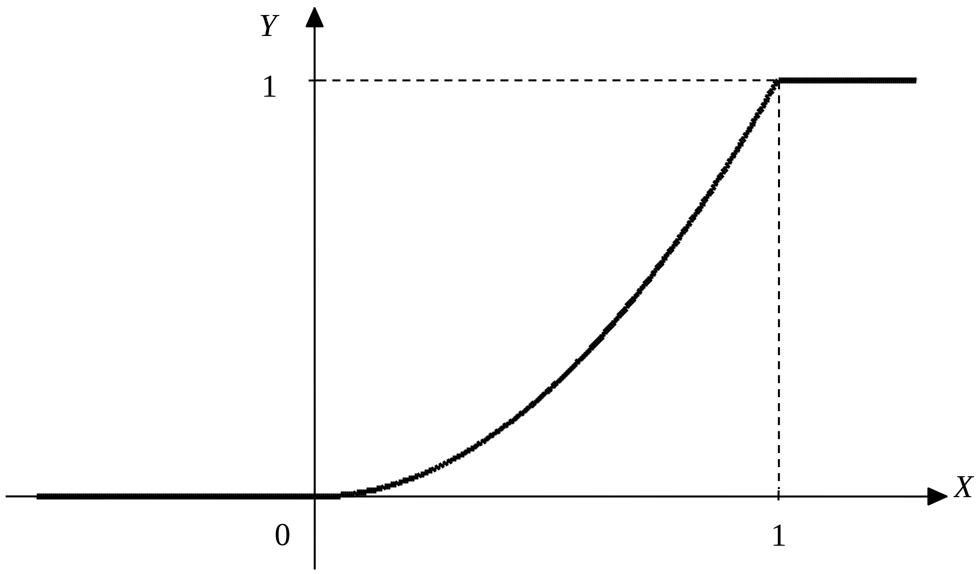


Рис. 3.1. Функция распределения

Для нахождения вероятности $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$ заметим, что $\frac{3}{2} \in [1, +\infty)$, $\frac{1}{2} \in [0, 1)$. Тогда в соответствии с найденным видом $F(x)$ будем иметь

$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

4. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

4.1. Пусть X – непрерывная случайная величина (НСВ) и $f(x)$ – её плотность распределения. Будем называть математическим ожиданием и дисперсией X значения следующих интегралов

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{4.1}$$

и

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx \tag{4.2}$$

соответственно. При этом мы предполагаем сходимость несобственных интегралов, причём сходимость соотношений (4.1) и (4.2), причём в случае (4.1) требуем сходимость абсолютную.

Числа (4.1) и (4.2) являются естественными аналогами соответствующих числовых характеристик (1.2) и (1.5) дискретных случайных величин.

В том случае, когда все возможные значения X расположены на отрезке $[a, b]$, интегрирование в соотношениях (4.1) и (4.2) должно быть, очевидно, заменено интегрированием по $[a, b]$:

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx \quad \text{и} \quad D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - (M(X))^2 .$$

4.2. Из определения дисперсии (4.2) и свойства неотрицательности $f(x)$ вытекает оценка $D(X) \geq 0$.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется в виде

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

4.3. Для вычисления дисперсии можно воспользоваться также формулой

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2 . \tag{4.3}$$

Доказательство (4.3) проводится с помощью рассуждений, подобных п. 1.3, но действия с суммами заменяются соответствующими действиями с интегралами и используется свойство нормированности $f(x)$ (п. 3.2).

4.5. Пример. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ 1 - x^2, & -1 < x \leq 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Решение. Плотность распределения найдём в соответствии с её определением как производную от $F(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ -2x, & -1 < x \leq 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Полезно построить графики $y = F(x)$ и $y = f(x)$, см. рис. 4.1:

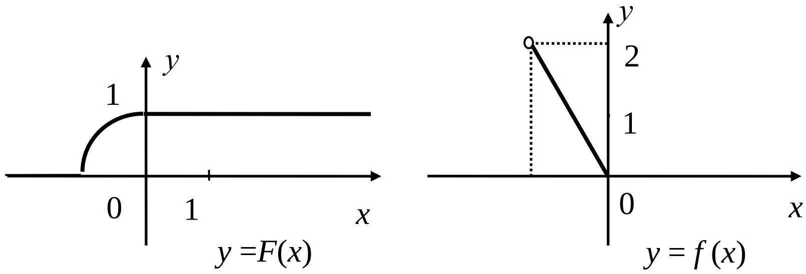


Рис. 4.1. Графики функции и плотности распределения

Далее, согласно выражениям (4.1) и (4.3) будем иметь

$$M(X)=\int_{-1}^{0}x(-2x)dx=-\frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{0}=-\frac{2}{3};$$

$$D(X)=\int_{-1}^{0}x^2(-2x)dx-\left(-\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{2}{4}x^4\Big|_{-1}^{0}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

5. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ ДИСКРЕТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

5.1. Равномерное распределение ДСВ. Выше (в п. 1.3) была введена равномерно распределённая дискретная случайная величина *X*. Её числовые характеристики имеют вид:

$$M(X)=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n};\quad D(X)=\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}-\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2.$$

Итак, математическое ожидание равномерно распределённой величины равно в точности среднему арифметическому всех значений случайной величины (этот факт уже отмечался), а дисперсия равна среднему квадратов значений величины минус квадрат её среднего значения.

5.2. Гипергеометрическое распределение ДСВ. Рассмотрим задачу о выборке **(**п. 2.4 главы 2). Из *N* объектов, среди которых *M* меченых $(1\le M\le N-1)$, случайным образом извлекается *k* объектов $(1\le k\le N-1)$. В качестве случайной величины *X* рассмотрим число меченых объектов в извлечённой выборке. Её значения $l\in\{0, 1, \ldots, \min(k,M)\}$. Как показано выше

$$P(X=l)=\frac{C_M^l C_{N-M}^{k-l}}{C_N^k}.$$

Говорят в этом случае, что дискретная случайная величина *X* распределена *гипергеометрическим* образом. Можно доказать, что

$$M(X)=\frac{kM}{N};\ D(X)=\frac{kM}{N-1}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{k}{N}\right).$$

5.3. Биномиальное распределение. Пусть дискретная случайная величина *X* принимает значения, равные количеству появлений события *A* в *n* испытаниях, при условии, что в каждом опыте вероятность $p = P(A)$ одна и та же; $q = 1 - p$ (схема Бернулли). Её закон распределения называется *биномиальным*. В первой строке ряда распределения величины X будут записаны возможные значения $X = 0,\ X = 1, \ldots, X = n$, во второй строке – соответствующие вероятности Бернулли:

X	0	1	...	k	...	n
P	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$		p^n

Название распределения объясняется тем, что сумма всех вероятностей представляет собой сумму членов разложения бинома Ньютона

$$(p+q)^n = 1.$$

Биномиальный закон распределения широко используется при статистическом контроле качества продукции, при описании функционирования систем массового обслуживания, в теории стрельбы и т.д.

Числовые характеристики биномиальной случайной величины X имеют вид:

$$M(X) = np;\ D(X) = npq.$$

Установим, например, первое из соотношений. В соответствии с рядом распределения будем иметь

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Заметим, что суммирование фактически производится по k = 1, ..., n, так как при k = 0 слагаемое обращается в ноль. Преобразуем полученную сумму следующим образом:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)}$$

(общий множитель np вынесен за знак суммы). Перенумеровав члены (т.е. заменив индекс суммирования $k-1$ на k), получаем

$$M(X) = np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} = np \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k} p^k q^{(n-1)-k} = np(p+q)^{n-1} = np \cdot 1 = np,$$

что и утверждалось.

Следующие два распределения относятся к случаю дискретных случайных величин с бесконечным перечнем значений.

5.4. Распределение Пуассона. Говорят, что дискретная случайная величина X распределена *по закону Пуассона* с параметром λ, если она принимает значения {0, 1, 2, ..., m, ...} с вероятностями

$$p_m = P(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \quad (m = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Закон Пуассона можно понимать как «предельный случай» биномиального закона, в котором $n \to \infty$ и $\lambda = np = \text{const}$. Запишем ряд распределения:

X	0	1	2	...	m	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$	...	$\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	...

Корректность рассмотрения «предельного» ряда будет подтверждена, если мы установим, что сумма всех вероятностей остаётся равной единице. Итак, вычислим сумму ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}. \tag{5.1}$$

Использовав разложение экспоненты e^{λ} по степеням λ (ряд Маклорена)

$$e^{\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!},$$

получаем сумму (5.1) в виде

$$e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1,$$

что и требовалось установить.

Как оказывается, математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределённой по закону Пуассона, совпадают между собою и равны параметру λ этого распределения:

$$M(X) = \lambda; \quad D(X) = \lambda.$$

Так, например,

$$M(X) = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

5.5. Геометрическое распределение. Пусть снова имеется схема Бернулли, в которой вероятность $p = p(A)$, $0 < p < 1$, события *A* остаётся неизменной и $q = 1 - p$. Но теперь речь пойдёт о случайной величине *X*, представляющей собой число испытаний, проведённых до первого появления *A*. Обозначим через p_m вероятность наступления события *A* в m-м опыте, тогда как в первых m – 1 испытаниях события *A* не произошло:

$p_1 = p$ (событие *A* наступило уже в первом опыте);

$p_2 = p(\bar{A}A) = qp$ (событие *A* не наступило в первом опыте, но наступило во втором);

…

$p_m = p(X = m) = p(\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}A) = q^{m-1} p$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Таким образом, получаем ряд *геометрического* распределения:

X	1	2	3	...	m	...
P	p	pq	pq^2	...	pq^{m-1}	...

Название объясняется тем, что вероятности p_m образуют бесконечную геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q.

Докажем, что математическое ожидание случайной величины X есть число, обратное вероятности появления события в одном испытании:

$$M(X) = \frac{1}{p}. \tag{5.2}$$

Имеем

$$M(X) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m p_m = \sum_{m=1}^{\infty} mpq^{m-1} = p\sum_{m=1}^{\infty} \frac{dq^m}{dq} = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{m=1}^{\infty} q^m\right) =$$

$$= p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p\frac{(1-q)+q}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p};$$

при вычислении использована возможность почленного дифференцирования степенного ряда с общим членом q^m, $0 < q < 1$. Соотношение (5.2) доказано.

Можно также доказать, что геометрически распределённая случайная величина X имеет дисперсию

$$D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

5.6. Пример 1. Компания производит изделия, 4% из которых имеют отклонение от стандарта. Для контроля качества отбирают 200 изделий. Найти ожидаемое количество изделий с отклонениями от стандарта.

Решение. Пусть X – число обнаруженных нестандартных изделий. Величина X распределена, очевидно, биномиальным образом с числом опытов $n = 200$ и вероятностью обнаружения нестандартности в каждом единичном опыте $p = 0{,}04$. Ожидаемое (среднее) количество нестандартных изделий есть тогда математическое ожидание $M(X)$. В соответствии с числовыми характеристиками биномиального распределения $M(X) = np = 200 \cdot 0{,}04 = 8$.

Заметим, что непосредственное вычисление математического ожидания по формуле (1.2) было бы связано в построением ряда распределения, содержащего 201 значение случайной величины и вычислением 201 вероятности !

Пример 2. Неопытный футболист бьёт три пенальти. Вероятность поражения ворот всякий раз $p = \frac{1}{6}$. Какова вероятность того, что он поразит ворота с третьего раза? Каково среднее число пенальти, которые нужно пробить в этом случае для попадания в ворота?

Решение. Рассмотрим случайную величину X – число выполненных ударов по воротам. Имеем геометрическое распределение с вероятностью $p = \dfrac{1}{6}$ наступления события в единичном опыте и числом опытов m = 3. Согласно результатам п. 5.5

$$p_3 = p(X = 3) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{49}{216}.$$

Среднее число ударов по воротам есть математическое ожидание (5.2)

$$M(X) = \frac{1}{p} = 6.$$

Пример 3. В каршеринговой компании имеются всего два свободных автомобиля. Известно, что ежедневный спрос подчиняется распределению Пуассона и в среднем составляет 1,3 машины в день, при этом арендатор не отдаёт каких-либо предпочтений ни одной из них. Какова вероятность, что в любой из дней:

1) ни один автомобиль не будет востребован;
2) будут востребованы обе машины.

Решение. По условию задачи случайная величина X есть число заказов в день, и она распределена по закону Пуассона, при этом количество k заказов может быть, вообще говоря, неограниченным. Вероятность поступления ровно k заказов вычисляется по формуле Пуассона. При этом параметр λ есть математическое ожидание величины X (см. п. 5.4) или её среднее значение, которое, по условию, равно 1,3. Следовательно,

$$P(X = k) = \frac{1{,}3^k e^{-1{,}3}}{k!},\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

В частности, если не заказан ни один автомобиль, то $X = 0$ и

$$P(X = 0) = \frac{1{,}3^0 e^{-1{,}3}}{0!} = e^{-1{,}3} \approx 0{,}27\,.$$

Если же как минимум на оба автомобиля поступили заказы, то число заказов $X \geq 2$ и

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1{,}3^0 e^{-1{,}3}}{0!} + \frac{1{,}3^1 e^{-1{,}3}}{1!}\right) \approx 0{,}37.$$

6. РАВНОМЕРНОЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

6.1. Непрерывная случайная величина X называется распределённой по ***равномерному закону*** на отрезке $[a,\ b]$, если её плотность вероятности постоянна на этом отрезке:

$$f(x) = \begin{cases} \nu, & x \in [a,\ b]; \\ 0, & x \notin [a,\ b]; \end{cases} \quad \nu = \text{const}.$$

Из свойства нормированности плотности распределения будет вытекать, что

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b];\\ 0, & x\notin[a,b].\end{cases} \tag{6.1}$$

Действительно,

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_a^b \nu\, dx=c(b-a),\ \text{ откуда }\ \nu=\frac{1}{b-a}.$$

Найдём теперь функцию распределения

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Имеем, очевидно, при $x\le a$ значения $F(x)=0$. При $a<x\le b$ получим

$$F(x)=\int_{-\infty}^{a}0dt+\int_a^x \frac{1}{b-a}dt=\frac{x-a}{b-a}.$$

Наконец, при $x>b$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{a}0dt+\int_a^b \frac{1}{b-a}dt+\int_a^x 0dt=\frac{b-a}{b-a}=1.$$

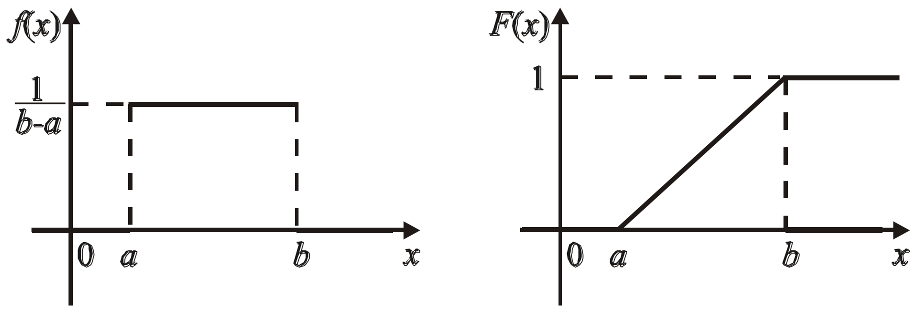
Итак,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b;\\ 1, & x>b.\end{cases} \tag{6.2}$$

Графики функций (6.1) и (6.2) изображены на рис. 6.1.

Докажем, что для равномерно распределённой на отрезке $[a,\ b]$ случайной величины X

$$M(X)=\frac{a+b}{2}\quad\text{и}\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$



а) *б*)

Рис. 6.1. Плотность и функция равномерного распределения

Имеем

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}.$$

Формула для дисперсии доказывается аналогично:

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

6.2. Непрерывная случайная величина X называется распределённой по ***показательному закону*** с параметром $\lambda > 0$, если её плотность вероятности имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases} \qquad (6.3)$$

Функция (6.3) действительно может служить плотностью распределения, так как она, очевидно, неотрицательна и для неё выполнено свойство нормированности:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\lim_{A\to\infty}\int\limits_0^A e^{-\lambda x}dx=\lambda\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}\left.e^{-\lambda x}\right|_0^A\right)=$$
$$=\left(\lim_{A\to\infty} e^{-\lambda A}\right)-(-1)=0+1=1.$$

Найдём функцию показательного распределения $F(x)$. Ясно, что $F(x) = 0$ при $x \le 0$. Если $x > 0$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dt+\int\limits_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt=0-\frac{\lambda}{\lambda}\left.e^{-\lambda t}\right|_0^x=-(e^{-\lambda x}-e^0)=1-e^{-\lambda x}.$$

Итак,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Графики плотности и функции показательного распределения представлены на рис. 6.2.

Используя формулу интегрирования по частям, нетрудно проверить, что математическое ожидание и дисперсия показательно распределённой случайной величины имеют, соответственно, значения

$$M(X)=\frac{1}{\lambda} \quad \text{и} \quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}. \qquad (6.4)$$

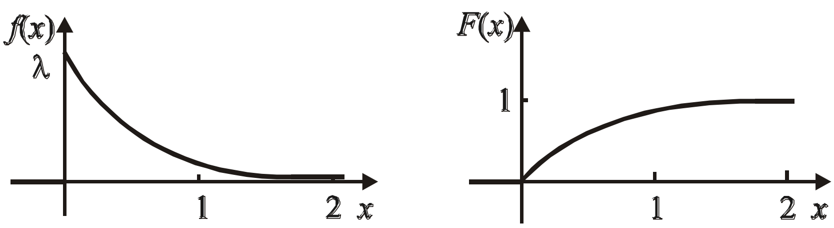


Рис. 6.2. Плотность и функция показательного распределения

Найдём, например, математическое ожидание

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=-\lim_{A\to\infty}\int\limits_{0}^{A} xde^{-\lambda x}=-\lim_{A\to\infty}\left(xe^{-\lambda x}\Big|_0^A-\int\limits_0^A e^{-\lambda x}dx\right)=$$

$$=-\lim_{A\to\infty}\left(\frac{A}{e^{\lambda A}}-0+\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^A\right)=-\frac{1}{\lambda}\lim_{A\to\infty}(e^{-\lambda A}-1)=\frac{1}{\lambda},$$

здесь предел вида

$$\lim_{A\to\infty}\frac{A}{e^{\lambda A}}=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\lambda e^{\lambda A}}=0$$

вычислен по правилу Лопиталя.

Из соотошений (6.4) следует важное свойство: для случайной величины, распределённой по показательному закону, математическое ожидание равно среднему квадратическому отклонению, т.е.

$$M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

6.3. Приведём примеры показательного и равномерного распределений.

Пример 1. Установлено, что время работы прибора до первой поломки является случайной величиной *T*, распределённой по показательному закону с параметром λ.

Обозначим через *A* случайное событие, состоящее в том, что прибор будет работать безотказно на интервале $[0,\ t]$. Вероятность этого события $P(A)=P(T>t)=1-P(T\le t)=1-F(t)=1-(1-e^{-\lambda t})=e^{-\lambda t}$.

Аналогично, если *C* – случайное событие, заключающееся в безотказной работе прибора на интервале времени $[0,\ t+\tau]$, то $P(C)=e^{-\lambda(t+\tau)}$.

Далее, пусть *B* – случайное событие, состоящее в том, что прибор будет безотказно работать на интервале времени $[t,\ t+\tau]$. Из определения случайных событий *A*, *B* и *C* следует, что $C=AB$. Тогда $P(C)=P(A)P_A(B)$. Найдём теперь $P_A(B)$, т.е. условную вероятность того, что прибор будет безотказно работать на интервале $[t,\ t+\tau]$ при условии, что он уже проработал безотказно на интервале $[0,\ t]$. Имеем

$$P_A(B)=\frac{P(C)}{P(A)}=\frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda\tau}.$$

Полученное значение вероятности оказалось не зависящим от *t*; следовательно, событие *B* не зависит от *A*. Другими словами, вероятность безотказной работы прибора на промежутке времени $[t, t+\tau]$ зависит только от длины этого промежутка τ, и не зависит от того, сколько времени прибор проработал до этого. Подобное явление называют свойством «отсутствием последействия»

Пример 2. Сегмент $[a,\ b]$ оси *OX* представляет (моделирует) собою шкалу некоторого прибора, причём вероятность попадания указателя в некоторый отрезок шкалы пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его места на шкале.

Проверить, что случайная величина X – отметка указателя прибора – распределена по равномерному закону и найти вероятность того, что при испытании указатель остановится на отметке в правой половине шкалы прибора.

Решение. Имеем непрерывную случайную величину X, распределённую на отрезке $[a,\ b]$. По условию, для любых двух точек $x_1,\ x_2$ $(x_1 < x_2)$ отрезка $[a,\ b]$

$$P(x_1 \le X \le x_2) = k(x_2 - x_1),$$

где k – постоянный коэффициент пропорциональности. В частности,

$$1 = P(a \le X \le b = k(b-a),$$

откуда находим $k = \dfrac{1}{b-a}$. Следовательно,

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \frac{1}{b-a}(x_2 - x_1). \tag{6.5}$$

Теперь построим функцию распределения $F(x) = P(X < x)$. Поскольку случайная величина X распределена на отрезке $[a,\ b]$, то

$$F(x) = 0 \text{ при } x \le a \tag{6.6}$$

и

$$F(x) = P(X < x) = P(X \le b) = 1 \text{ при } x > b. \tag{6.7}$$

Далее, согласно выражению (6.5)

$$F(x) = P(X < x) = P(a \le X \le x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad a < x \le b. \tag{6.8}$$

В соответствии с соотношениями (6.6), (6.8) и (6.7) полученная $F(x)$ совпала с функцией равномерного распределения (6.2), что и требовалось установить.

Рассмотрим случайное событие A – расположение указателя в правой половине шкалы прибора. Это событие равносильно неравенству $\dfrac{a+b}{2} < X \le b$, так что соответствующая вероятность может быть вычислена в виде (см. (6.5))

$$P(A) = \frac{1}{b-a}\left(b - \frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

7. ПОНЯТИЕ О МОМЕНТАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

7.1. Обобщением понятий математического ожидания и дисперсии случайной величины служат понятия начального и центрального моментов распределения. Для дискретных величин они вводятся соответственно в виде

$$\nu_l = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^l p_k, \quad \mu_l = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M(X)^l p_k, \quad l = 1, 2, \ldots,$$

а для непрерывных величин определяются как

$$\nu_l = \int_{-\infty}^{\infty} x^l f(x) dx \quad \text{и} \quad \mu_l = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^l f(x) dx, \quad l = 1, 2, \ldots.$$

Как показано выше, имеют место соотношения

$$\nu_1 = M(X),\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 = D(X),\ \mu_2 = \nu_2 - (\nu_1)^2.$$

Связь начальных и центрального моментов, только что отмеченная для ν_1, ν_2, μ_2, может быть распространена и на моменты более высокого порядка. Так, справедливы равенства

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2(\nu_1)^3,\ \ \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6(\nu_1)^2\nu_2 - 3(\nu_1)^4 \qquad (7.1)$$

и т.д.

7.2. Остановимся на рассмотрении центральных моментов нечётного порядка. Если значения x_k, $k = 1, 2, \ldots$, в ряде распределения дискретной величины X симметричны относительно математического ожидания, то, очевидно, все такие моменты равны нулю. Естественно поэтому в качестве характеристики асимметрии («скошенности») распределения выбрать какой-либо из нечётных моментов; для этого выбирают простейший третий центральный момент.

Коэффициентом асимметрии при этом называют безразмерную величину $S_k = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$, где σ – среднее квадратическое отклонение; заметим, что момент μ_3 имеет размерность куба случайной величины. Если $S_k > 0$, то преобладают положительные отклонения от математического ожидания, если $S_k < 0$ – то отрицательные.

7.3. Моменты распределения тесно связаны с изучаемым ниже нормальным распределением (точнее, с так называемой центральной предельной теоремой). Интерес к моментам распределения вызван также рядом современных научных задач. Одной из них является задача восстановления плотности непрерывного распределения по заданной последовательности начальных моментов $\{\nu_l\}$, $l = 1, 2, \ldots$. В настоящее время разработана соответствующая методика, основанная на теории ортогональных многочленов и разложениях функций в ряд Фурье по системе таких многочленов, однако даже для первичного ознакомления с соответствующей тематикой читателю следует основательно изучить специальную литературу.

8. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

8.1. Непрерывная случайная величина X называется распределённой по *нормальному закону* с параметрами a и $\sigma > 0$, если её плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (8.1)$$

Функция (8.1) действительно может служить плотностью некоторого распределения: она, очевидно, неотрицательна и обладает свойством нормированности. Проверим последнее свойство, воспользовавшись значением несобственного интеграла, называемого интегралом Эйлера–Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}. \tag{8.2}$$

С помощью замены переменной $t = \dfrac{x-a}{\sigma}$ получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1,$$

что и утверждалось.

Если в выражении (8.1) $a = 0$ и $\sigma = 1$, т.е.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

то говорят, что имеется стандартное нормальное распределение; его плотность совпадает с функцией Лапласа $\varphi(x)$, введённой в рассмотрение ранее.

8.2. Выразим функцию распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

через интегральную функцию Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

а именно, установим, что

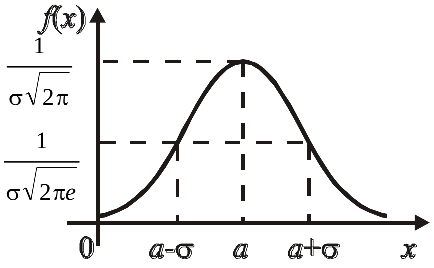
$$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \tag{8.3}$$

Действительно, с помощью вводимой ранее замены переменных $t = \dfrac{x-a}{\sigma}$ получаем

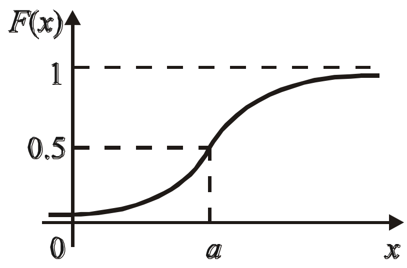
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{8.4}$$

При этом первое слагаемое в сумме (8.3) есть «половина от значения» (8.2), поскольку (8.2) есть интеграл от чётной функции по симметричному промежутку. Итак, первое слагаемое в (8.4) равно ½, а второе – значение интегральной функции Лапласа в точке $\dfrac{x-a}{\sigma}$, чем и доказано (8.3).

8.3. Графики плотности и функции нормального распределения представлены на рис. 8.1.



а)



б)

Рис. 8.1. Плотность и функция нормального распределения

Кривую, изображенную на рис. 8.1, *а*, называют *нормальной* или *гауссовой* кривой. Отметим, что нормальная кривая симметрична относительно прямой $x = a$ и имеет максимум в точке $x = a$, равный $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$, а также имеет точки перегиба $x = a \pm \sigma$ с ординатой $1/(\sigma\sqrt{2\pi e})$.

Выясним, как будет меняться нормальная кривая при изменении параметров *a* и σ. Если параметр σ остаётся постоянным, но меняется параметр *a*, то нормальная кривая смещается вдоль оси абсцисс, не меняя формы. Если параметр *a* остаётся постоянным, но меняется σ, то меняется ордината максимума кривой $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$. При уменьшении σ (т.е. при уменьшении рассеяния случайной величины) ордината точки максимума увеличивается. Но так как площадь под любой кривой распределения должна оставаться равной единице, то кривая вытягивается вверх, одновременно сжимаясь с боков. При увеличении параметра σ наблюдается обратная картина. Таким образом, параметр *a* определяет положение, а параметр σ – форму нормальной кривой.

8.4. Докажем, что вероятность попадания значений случайной величины *X*, распределённой по нормальному закону, в промежуток (α, β) может быть вычислена в виде

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Действительно, если воспользоваться видом функции распределения (8.4), то получим

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \left(0{,}5 + \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

что и утверждалось.

8.5. Из результата п. 8.4 вытекает следующее утверждение о вероятности малого отклонения значений нормальной величины от параметра *a*: для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Для доказательства запишем неравенство $|X-a|<\varepsilon$ в равносильном виде $a-\varepsilon<X<a+\varepsilon$. Тогда, ввиду нечётности функции Лапласа, будем иметь

$$P(a-\varepsilon<X<a+\varepsilon)=\Phi\left(\frac{a+\varepsilon-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\varepsilon-a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right),$$

что и требовалось доказать.

В частности, при $\varepsilon=3\sigma$ получаем так называемое правило «трёх сигм»

$$P(|X-a|<3\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{3\varepsilon}{\sigma}\right)=2\Phi(3)\approx 0{,}9973.$$

Смысл его состоит в следующем: практически достоверно, что абсолютная величина отклонения значений нормально распределённой X от параметра a меньше утроенного значения σ.

8.6. Вероятностный смысл параметров a и σ проясняется в следующем утверждении.

Нормально распределённая случайная величина имеет математическое ожидание

$$M(X)=a$$

и дисперсию

$$D(X)=\sigma^2.$$

Докажем, например, первое из соотношений. Используя снова замену переменной $t=\dfrac{x-a}{\sigma}$, соотношение (8.2) и свойство равенства нулю интеграла по симметричному промежутку от нечётной функции, получим

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(a+\sigma t)e^{\frac{-t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-t^2}{2}}dt+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{\frac{-t^2}{2}}dt=a\cdot 1+0=a,$$

что и утверждалось.

8.7. Нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике. Объясняется это тем, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях. Именно, если случайная величина X представляет собой сумму большого числа взаимно независимых случайных величин $X=X_1+\ldots+X_n$ (т.е. значения X складываются из значений случайных величин X_k, $k=1, 2, \ldots, n$, распределение каждой из которых не зависит от значений, принимаемых остальными случайными величинами), то при весьма общих условиях закон распределения случайной величины X близок к нормальному. Условиям (выраженным в терминах центральных моментов третьего порядка), при которых возникает нормальный закон распределения, посвящен ряд теорем, называемых *центральной предельной теоремой*. Смысл этих условий состоит в том, что «удельный вес» каждого отдельного слагаемого должен стремиться к нулю при увеличении числа слагаемых. Например, если X – производственная погрешность, то на неё влияют множество факторов (погрешность материала, погрешность станка, инструмента и т.д.), причём если ни одна из этих погрешностей не является определяющей, то случайная величина X имеет закон распределения, близкий к нормальному.

8.8. Пример 1. Найти математическое ожидание нормально распределённой случайной величины с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{8}x^2 - x - 2}.$$

Решение. Выделяя полный квадрат в показателе степени, имеем

$$-\frac{1}{8}x^2 - x - 2 = -\frac{1}{8}(x^2 + 8x + 16) = -\frac{1}{8}(x+4)^2.$$

Теперь

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\cdot 2^2}(x+4)^2}.$$

Поскольку плотность нормального распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

то в нашем случае имеем параметр $a = -4$, и, следовательно, искомое математическое ожидание $M(X) = -4$.

Пример 2. На фармацевтической фабрике контролируется вес производимых таблеток. Взвешивание не подвержено систематическим ошибкам, однако возможны случайные ошибки X, распределение которых подчинено нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 0,4 г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 0,3 см.

Решение. Ошибок систематических, т.е. ошибок одного знака, нет, следовательно, математическое ожидание случайных ошибок равно нулю (положительные и отрицательные значения ошибок «уравновешивают» друг друга). Используем формулу

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right),$$

в которой значение математического ожидания $a = 0$; далее $\sigma = 0{,}4$ и $\varepsilon = 0{,}3$.

Получим

$$P(|X| < 0{,}3) = 2\Phi\left(\frac{0{,}3}{0{,}4}\right) = 2\Phi(0{,}75) \approx 2 \cdot 0{,}2734 = 0{,}5468.$$

9. СЛУЧАЙНЫЙ ВЕКТОР. ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

9.1. Вводя понятие системы случайных величин X и Y или случайного вектора, мы ограничимся случаем, когда обе величины дискретны и перечень значений каждой из них может быть представлен конечной последовательностью (соответственно) $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$. Случайный вектор $\mathbf{Z} = (X, Y)$ определяется всевозможными парами значений (x_k, y_l), $1 \le k \le n$, $1 \le l \le m$, каждая из которых принимается, очевидно, с вероятностью $p_{kl} = p(X = x_k, Y = y_l)$. Поскольку речь идёт о произведении событий $X = x_k$ и $Y = y_l$, то $p_{kl} = p(X = x_k)p_{(X=x_k)}(Y = y_l)$. В случае независимости соответствующих событий, т.е. в случае $p_{kl} = p_k p_l$, $1 \le k \le n$, $1 \le l \le m$, случайные величины X и Y называются независимыми.

Аналогом ряда распределения ДСВ здесь выступает таблица распределения (матрицу вероятностей) вида

(X,Y)	x_1	x_2	…	x_k	…	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{k1}	…	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{k2}	…	p_{n2}
…	…	…	…	…	…	…
y_l	p_{1l}	p_{2l}	…	p_{kl}	…	p_{nl}
…	…	…	…	…	…	…
y_m	p_{1m}	p_{2m}	…	p_{km}	…	p_{nm}

Матрица вероятностей обладает тем очевидным свойством, что суммы вероятностей по всем столбцам и строкам равна единице.

9.2. Рассмотрим систему дискретных случайных величин (X, Y) и построим новую случайную величину $Z = X + Y$, значения – это все возможные суммы $x_k + y_l$, расположенные в порядке возрастания. Очевидно, что каждой такой сумме следует поставить в соответствие вероятность $p_{kl} = p(X = x_k, Y = y_l)$. Другими словами, величина $Z = X + Y$ имеем ряд распределения вида

$X + Y$	…	$x_k + y_l$	…
p	…	p_{kl}	…

$(1 \le k \le n$, $1 \le l \le m)$.

Подобным образом определяется произведение $Z = XY$. Первая строка соответствующего ряда содержит все возможные произведения $x_k y_l$, расположенные в порядке возрастания, а вторая строка – вероятности p_{kl}. В частности, случайная величина $Z = CX$, где C – постоянная, отличная от нуля, определяется рядом распределения

CX	…	Cx_k	…
p	…	p_k	…

$(1 \le k \le n)$.

Теперь для любых постоянных λ и μ (одновременно не равных нулю) определена линейная комбинация $Z = \lambda X + \mu Y$.

9.3. Рассмотрим задачу нахождения числовых характеристик (математического ожидания и дисперсии) линейной комбинации дискретных случайных величин.

Теорема 9.1. Имеют место равенства

$$M(CX) = CM(X);$$

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Теорема 9.2. Имеет место равенство

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Если случайные величины X и Y – независимы, то

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

В частности, для линейной комбинации ДСВ $Z = \lambda X + \mu Y$ будем иметь

$$M(\lambda X + \mu Y) = \lambda M(X) + \mu M(Y);$$

$$D(\lambda X + \mu Y) = \lambda^2 D(X) + \mu^2 D(Y).$$

Доказательство теоремы 9.1 читателю рекомендуется провести самостоятельно, доказательство теоремы 9.2 мы не рассматриваем.

Замечание. Понятие линейной комбинации попарно независимых случайных величин можно распространить на любое их конечное количество. При этом, если $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n$, то

$$M(X) = \lambda_1 M(X_1) + \lambda_2 M(X_2) + \ldots + \lambda_n M(X_n)$$

и

$$D(X) = \lambda_1 D(X_1) + \lambda_2 D(X_2) + \ldots + \lambda_n D(X_n).$$

9.4. Пример. Налоговой службой проводится контроль трёх видов предпринимательской деятельности. По первому виду деятельности вероятность сокрытия доходов составляет 0,1, по второму – 0,2, по третьему – 0,25. Средства от штрафов за сокрытие доходов поступают в бюджет региона. Считая, что все факты сокрытия выявляются, найти средний доход регионального бюджета от полученных таким образом средств, если сумма налагаемого штрафа по каждому виду деятельности составляет, соответственно, 50, 40 и 20 МРОТ (минимального размера оплаты труда).

Решение. Пусть X – случайная величина, возможные значения которой равны получаемому доходу бюджета от штрафов по всем трём видам деятельности. Ясно, что средний доход регионального бюджета есть математическое ожидание $M(X)$. Значения X складываются из значений X_1, X_2, X_3, где каждая из указанных трёх величин принимает значения суммарных штрафов по соответствующим категориям предпринимательской деятельности. Следовательно, $X = X_1 + X_2 + X_3$. В свою очередь, $X_k = \lambda_k \eta_k$, $k = 1, 2, 3$, где η_k – индикатор события сокрытия дохода по k-й категории, а λ_k – сумма соответствующего налагаемого штрафа. Значит, согласно п. 9.3

$$M(X) = M(X_1 + X_2 + X_3) = \lambda_1 M(\eta_1) + \lambda_2 M(\eta_2) + \lambda_3 M(\eta_3).$$

Поскольку математическое ожидание индикатора равно вероятности соответствующего события, то $M(\eta_1) = 0{,}1,\ \ M(\eta_2) = 0{,}2,\ M(\eta_3) = 0{,}25$. Таким образом,

$$M(X) = 50 \cdot 0{,}1 + 40 \cdot 0{,}2 + 20 \cdot 0{,}25 = 18.$$

Ответ: 18 МРОТ.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. КОНТРОЛЬНЫЙ МОДУЛЬ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Постоянную величину C будем рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую единственное значение C с вероятностью $p = 1$. Доказать, что $M(C) = 0$ и $D(C) = 0$.

2. Пусть C – постоянная величина, $C \neq 0$. Дискретную случайную величину CX определим как величину со значениями Cx_k, соответствующие вероятности которых, очевидно, будут равны $p_k = p(X = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть, далее, X некоторая НСВ; непрерывную случайную величину CX определим как величину со значениями Cx (где x – любое возможное значение величины X) и плотностью вероятности $f(x)$ той же, что и плотность вероятности величины X. В обоих случаях (т.е. в случаях ДСВ и НСВ) доказать, что

$$M(CX) = CM(X) \quad \text{и} \quad D(CX) = C^2 D(X).$$

3. Радиус X круга измерен приближённо. Считая X непрерывной случайной величиной, распределённой в интервале $[a,\ b]$, найти математическое ожидание и дисперсию длины окружности.

4. Возможно ли, чтобы плотность распределения была равна 1 на промежутке (–0,5; 0,7)?

5. Может ли плотность распределения принять значение, равное 1,1?

6. Может ли функция $F(x) = 1 - e^{-|x|}$ быть функцией какого-либо распределения? Может ли вообще чётная функция быть функцией какого- либо распределения?

7. Если плотность распределения $f(x)$ – чётна, то чему равен несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx\,?$$

8. Может ли плотность распределения быть нечётной?

9. Доказать, что функция $f(x) = e^{-ax^2 + bx + c}$, где $a > 0,\ b$ и c – некоторые заданные постоянные величины, служит плотностью случайной величины βX, где β – некоторая постоянная, а X распределена нормально. Найти (выразить через a, b и c) математическое ожидание и дисперсию величины βX.

2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. На химическом производстве в случае превышения предельно допустимой концентрации (ПДК) в воздухе вредных веществ должны сработать три независимо работающих сигнализатора. Вероятность отказа каждого из них в случае превышения ПДК равна 0,2. Составить ряд распределения числа сигнализаторов, не сработавших в этом случае. Найти вероятность того, что откажет не более одного сигнализатора.

2. Трое баскетболистов на тренировке издалека бросают мяч в корзину. Вероятность успешного броска для первого спортсмена 0,5, для второго и третьего – по 0,7. Пусть X – число попаданий в корзину, в случае, когда каждый сделал по одному броску. Составить ряд распределения X, найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

3. В пачке из 10 театральных билетов три билета – на премьеру. Наудачу взяты три билета. Составить ряд распределения случайной величины X – числа билетов на премьеру среди отобранных. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых билетов окажется на премьеру.

4. Вероятность того, что стрелок попадёт в мишень при одном выстреле, равна 0,6. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не попадёт в первый раз в мишень. Составить ряд распределения случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку.

5. Независимым образом испытывается три энергоблока. Вероятность отказа в испытании каждого из них составляет 0,1. Составить ряд распределения случайной величины X – числа отказавших блоков. Найти её математическое ожидание и дисперсию. Вычислить вероятности событий:

а) $X = 0$; б) $X < 3$.

6. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения x_1 и x_2, причём $x_1 < x_2$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,5. Найти закон распределения X, зная математическое ожидание $M(X)=4$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=2$.

7. Случайная величина X задана на всей числовой оси функцией распределения $F(x)=\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x.$ Найти:

а) вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в промежутке [–1; 0];

б) плотность распределения $f(x)$.

8. Случайная величина X задана интегральной функцией (функцией распределения)

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{18}+\dfrac{x}{6}, & 0 < x \le 3;. \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти: а) дифференциальную функцию $f(x)$ (плотность распределения);

б) математическое ожидание;

в) среднее квадратическое отклонение случайной величины X;

г) вероятность попадания значений X в интервал $(-1;\ 1)$.

9. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \nu\sqrt{x}, & 0<x\le 4;\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

Найти значение параметра ν, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

10. Случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma=0{,}4$. Найти вероятность того, что дважды в трёх испытаниях отклонение X от её математического ожидания будет меньше 0,3.

11. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 1{,}5\sin 3x$ в интервале $(0; \pi/3)$ и $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти вероятность того, что при трёх опытах значение X дважды попадёт в интервал $(\pi/6;\ \pi/4)$.

12. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = ax^2 + 4{,}5x - 6 \quad \text{при} \quad x \in [2; 4]; \quad f(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \notin [2; 4].$$

Найти: а) значение параметра a; б) математическое ожидание.

13. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{2}x \quad \text{при} \quad x \in [0; c]; \quad f(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \notin [0; c].$$

Найти а) значение параметра c; б) вероятность $P(-100 < X < 1)$.

14. Некоторая случайная величина подчиняется закону нормального распределения с математическим ожиданием 50 и дисперсией 36. Найти вероятность того, что отдельное значение случайной величины заключено в интервале от 40 до 60. Ответ записать с точностью до 0,1.

15. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = -2$ с вероятностью $p_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = 1$ с вероятностью $p_2 = \frac{1}{3}$ и некоторое значение x_3 с вероятностью p_3. При этом известно, что математическое ожидание случайной величины $M(X)$ равно 1. Найти дисперсию $D(X)$.

3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. КОМПЛЕКСНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. При формировании кадрового резерва на управленческие должности проводят собеседование с шестью кандидатами. Вероятность того, что каждый данный кандидат удовлетворит требованиям к управленческой должности, равна $\frac{1}{3}$. Какова вероятность, что:

а) все кандидаты войдут в кадровый резерв;

б) ни один из них не удовлетворит предъявляемым требованиям;

в) хотя бы один кандидат этим требованиям удовлетворит.

С каким количеством кандидатов надо провести беседу, чтобы среднее число тех, кто может войти в кадровый резерв, составило три человека? Какова вероятность, что именно столько человек войдут в кадровый резерв?

2. В администрацию субъекта РФ ежемесячно поступает примерно тысяча писем. Подсчитано, что обычно в каждом сотом письме содержится конструктивное предложение. Какова вероятность, что в очередном месяце поступит:

а) хотя бы одно конструктивное предложение;

б) ровно два предложения;

в) не менее двух предложений?

Каково математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа конструктивных предложений?

3. В городе N имеется 10 финансовых компаний, среди которых четыре находятся на грани банкротства. Клиент выбирает для хранения и умножения средств случайным образом две компании. Составить ряд распределения числа X выбранных компаний, имеющих высокий риск банкротства. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

С какой вероятностью можно утверждать, что хотя бы одна из выбранных компаний окажется на грани банкротства?

4. Азартный гражданин приобретает лотерейные билеты до момента первого выигрыша. Вероятность выигрыша для каждого приобретённого билета равна $\frac{1}{100}$. С какой вероятностью ему достаточно приобрести четыре билета? Каково среднее число билетов, которые необходимо приобрести до момента первого выигрыша?

5. Случайная величина X представляет собой значения отклонения параметра производимого изделия от стандарта. Известно, что X распределена нормально с математическим ожиданием $M(X) = 0{,}5$ и дисперсией $D(X) = 0{,}01$. Какова вероятность, что в трёх опытах:

а) её значения отклонятся от среднего не менее чем на 0,1 хотя бы один раз;

б) такие отклонения будут наблюдаться все 3 раза?

Глава 4. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

ОБУЧАЮЩИЙ МОДУЛЬ

1. СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫБОРКИ

1.1. Генеральная совокупность и выборка. Пусть имеется множество, состоящее из конечного (но достаточно большого) числа некоторых объектов, причём каждый объект характеризуется единственным значением x_i некоторого количественного признака X. Такое множество называется ***генеральной совокупностью***; в свою очередь совокупность из n случайно отобранных объектов называется ***выборкой объёма*** n. Извлечённые выборки позволяют получить представление о распределении количественного признака X как некоторой случайной величины. В подобных случаях говорят об эмпирическом распределении X.

1.2. Пусть n_1 объектов из выборки характеризуются значением x_1, n_2 объектов – значением x_2, ..., n_k – объектов – значением x_k. Числа x_1, x_2, ..., x_k называются ***вариантами***, а числа n_1, n_2, …, n_k – ***частотами*** соответствующих вариант. Соответствие между вариантами и соответствующими им частотами называется статистическим распределением выборки, а таблица вида

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

называется вариационным рядом; очевидно, что

$$n_1 + n_2 + ... + n_k = n.$$

Относительными частотами значений x_i называются соответствующие числа вида $w_i = \dfrac{n_i}{n}$; справедливо соотношение

$$w_1 + w_2 + ... + w_k = 1.$$

Модой Mo называют варианту, имеющую наибольшую частоту. ***Медианой*** me называют варианту, которая находится в середине вариационного ряда, если число вариант нечётно; медиана me равна среднему арифметическому двух ближайших к «середине» вариант, если их число чётно. ***Размахом*** варьирования R называют разность между наибольшей и наименьшей вариантами.

1.3. ***Выборочной средней*** $\bar{x}_{\text{в}}$ называется среднее арифметическое всех наблюдаемых (в выборке) значений:

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{(x_1 + ... + x_1) + (x_2 + ... + x_2) + \ldots + (x_k + ... + x_k)}{n},$$

причём в первой скобке имеется n_1 слагаемых, во второй – n_2, …, в последней – n_k слагаемых. Установим, что

$$\bar{x}_{\text{в}} = x_1 \frac{n_1}{n} + x_2 \frac{n_2}{n} + ... + x_k \frac{n_k}{n} \quad \text{или} \quad \bar{x}_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k} x_i w_i \,.$$

Действительно,

$$\bar{x}_\text{в} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n} = \frac{x_1 n_1}{n} + \frac{x_2 n_2}{n} + \ldots + \frac{x_k n_k}{n} =$$
$$= x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_k w_k.$$

Возникает ***вопрос о количественной характеристике степени рассеивания наблюдаемых значений относительно их среднего***. Первое, что естественно сделать – это рассмотреть среднее арифметическое самих уклонений $x - \bar{x}_\text{в}$, т.е.

$$\frac{((x_1 - \bar{x}_\text{в}) + \ldots + (x_1 - \bar{x}_\text{в})) + \ldots + ((x_k - \bar{x}_\text{в}) + \ldots + (x_k - \bar{x}_\text{в}))}{n},$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_\text{в})w_i,$$

однако такая сумма равна нулю *для всякого* статистического распределения выборки (и следовательно, подобно случаю теоретических распределений ДСВ, не может служить *характеристикой* рассеяния):

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_\text{в})w_i = \sum_{i=1}^{k} x_i w_i - \bar{x}_\text{в}\sum_{i=1}^{k} w_i = \bar{x}_\text{в} - \bar{x}_\text{в} = 0.$$

Очевидно, что нулевое значение вычисленной суммы получается за счёт взаимного погашения отрицательных и положительных уклонений. В этом случае естественно перейти к рассмотрению среднего арифметического *квадратов* уклонений значений x_i относительно их средней $\bar{x}_\text{в}$, называемого ***выборочной дисперсией*** $D_\text{в}$. Итак, выборочная дисперсия определяется в виде

$$D_\text{в} = \sum_{i=1}^{k}(x_i - x_\text{в})^2 w_i,$$

которую удобнее вычислять по формуле (доказываемой способом, аналогичным приведённому в п. 1.4)

$$D_\text{в} = (x_1)^2\frac{n_1}{n} + (x_2)^2\frac{n_2}{n} + \ldots + (x_k)^2\frac{n_k}{n} - (\bar{x}_\text{в})^2.$$

Выборочным средним квадратическим отклонением называется величина

$$\sigma(X) = \sqrt{D_\text{в}}.$$

1.4. Поскольку с ростом n относительные частоты

$$w_i = w(X = x_i)$$

становятся близкими к соответствующим вероятностям

$$p_i = P(X = x_i),$$

то значения выборочных средних $\bar{x}_\text{в}$ становятся близкими к математическому ожиданию $M = M(X)$ количественного признака X. Точно также значения выборочных дисперсий $D_в$ становятся (с ростом n) близкими к дисперсии количественного признака $\sigma^2 = D(X)$. Точные формы этих утверждений используют понятие сходимости по вероятности и выходят за рамки настоящего материала.

2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1. Предположим, что нас интересует неизвестное значение θ некоторого параметра, характеризующего количественный признак X генеральной совокупности. Оценкой параметра θ называют значения θ^* некоторой функции от наблюдаемых (в выборках) значений, дающие первоначальное представление о величине θ.

Точечной оценкой параметра θ называют оценку, которая определяется одним числом; так, например, точечной оценкой математического ожидания $\mu = M(X)$ количественного признака X генеральной совокупности является значение выборочной средней.

2.2. Пусть известен вид функции распределения $F(x,\theta)$ количественного признака X генеральной совокупности, но единственный параметр распределения θ остаётся неизвестным. Для его оценки достаточно иметь одно уравнение относительно этого параметра. Поскольку математическое ожидание μ случайной величины X также зависит от этого параметра, т.е. $\mu = M(X,\theta)$, то имеем (см. п. 2.1) следующее приближённое равенство для нахождения θ:

$$\bar{x}_в \approx M(X,\theta)$$

Если функция распределения определяется двумя неизвестными параметрами, т.е. имеет вид $F(x,\theta_1,\theta_2)$, то для их оценки необходимы два уравнения. В этом случае следует пользоваться системой двух приближённых равенств

$$\begin{cases} \bar{x}_в \approx M(X,\theta_1,\theta_2); \\ D_в \approx D(X,\theta_1,\theta_2). \end{cases}$$

Указанный способ нахождения неизвестных параметров распределения называется методом моментов.

Найдём, например, методом моментов оценку параметров a и b равномерного распределения равномерно распределённого количественного признака генеральной совокупности. Имеем систему

$$\begin{cases} \bar{x}_в \approx M(X,a,b); \\ D_в \approx D(X,a,b), \end{cases}$$

или, учитывая, что для равномерного распределения

$$M(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

имеем

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(a+b) \approx \bar{x}_в; \\ \dfrac{1}{12}(b-a)^2 \approx D_в. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим искомые оценки:

$$a^* = \bar{x}_в - \sigma_в\sqrt{3}, \ b^* = \bar{x}_в + \sigma_в\sqrt{3}, \text{ где } \sigma_в = \sqrt{D_в}.$$

2.3. ***Интервальной называют оценку***, которая определяется двумя числами – концами интервала. Надёжностью (доверительной вероятностью) оценки θ^* называют вероятность γ, с которой отклонение $|\theta - \theta^*|$ оказывается задано малым.

Наиболее часто задают надёжность, равную 0,95; 0,99; 0,995. Интервал ($\theta^*- \delta$, $\theta^* + \delta$) называют доверительным интервалом для оценки параметра θ.

Рассмотрим так называемые ***доверительные интервалы для оценки математического ожидания*** нормального распределения при известном среднем квадратическом отклонении σ. Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

(нормальное распределение); здесь параметр a есть значение математического ожидания, а σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Предположим, что среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно, и извлечена выборка объёма n. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней с заданной надёжностью γ. Если

$$P(|\bar{x}_в - a| < \delta) = \gamma,$$

то значение δ (радиус доверительного интервала) определяется в виде $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, где число t может быть найдено из соотношения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, по табл. П.1. Следовательно, с надёжностью γ доверительный интервал

$$\left(\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

покрывает неизвестный параметр a; точность оценки есть $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

3. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

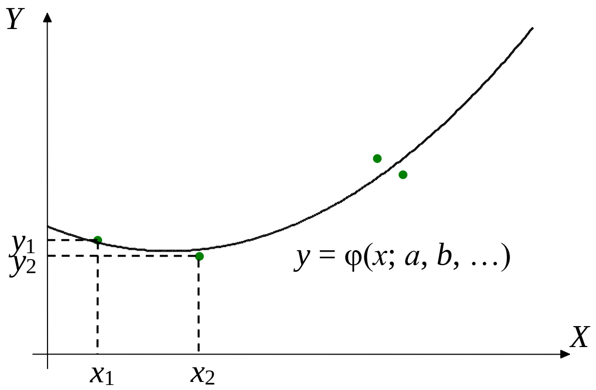
3.1. Предположим, что эмпирическим путём выявлена зависимость между величинами X и Y, где Y – случайная величина. Например, эксперимент может состоять в измерении значений $y_1, y_2, ..., y_n$ случайной величины Y в точках $x_1, x_2, ..., x_n$. Полученная на координатной плоскости система точек (x_i, y_j), $j = 1…n$, называется диаграммой рассеяния. При этом по характеру расположения точек может быть сделан вывод о возможном виде объективно имеющейся функциональной зависимости $y = \phi(x)$; последнее уравнение называется уравнением регрессии. Например, речь может идти о регрессии (зависимости) линейной $y = ax + b$, квадратичной $y = ax^2 + bx + c$ и др. Однако значения параметров $a, b, ...$ остаются неизвестными; на основе полученных экспериментальных данных можно говорить лишь о точечных оценках $\alpha, \beta, \ldots$ параметров $a, b, \ldots$ Итак, мы ищем зависимость $y = \varphi(x;\, \alpha, \beta, \ldots)$, «наилучшим образом» описывающую расположение точек на диаграмме рассеяния (так называемое выборочное уравнение регрессии). Пользуясь вышеприведёнными (см. п. 1.3) рассуждениями о целесообразности рассмотрения квадратов уклонений, которые (уклонения) в данном случае имеют вид

$$\delta_j = y_j - \varphi(x_j;\, \alpha, \beta, \ldots),$$

выберем значения $\alpha, \beta, \ldots$ так, чтобы сумма

$$\Phi(\alpha, \beta, \ldots) = \sum_{j=1}^{n} (y_j - \varphi(x_j;\, \alpha, \beta, \ldots))^2$$

принимала наименьшее значение (оно, очевидно, должно существовать, поскольку множество всех значений такой суммы ограничено снизу нулём).



Согласно необходимому условию экстремума функции $\Phi(\alpha, \beta, \ldots)$ все её частные производные по переменным $\alpha, \beta, \ldots$ должны обратиться в ноль:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \sum_{j=1}^{n} (y_j - \varphi(x_j;\, \alpha, \beta, \ldots))^2 = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta} \sum_{j=1}^{n} (y_j - \varphi(x_j;\, \alpha, \beta, \ldots))^2 = 0,$$

$$\ldots$$

Если числа $\alpha, \beta, \ldots$ (решение этой системы) определятся однозначным образом, то они и будут искомыми точечными оценками параметров $a, b, \ldots$; тем самым задача о поиске выборочного уравнения регрессии $y = \varphi(x;\, \alpha, \beta, \ldots)$ будет решена.

3.2. В случае линейной регрессии $y = ax + b$ система уравнений п. 3.1 для получения точечных оценок α, β параметров a, b принимает вид

$$\begin{cases} 2\sum\limits_{j=1}^{n} \big(y_j - (\alpha x_j + \beta)\big)\left(-\dfrac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha x_j + \beta)\right) = 0; \\ 2\sum\limits_{j=1}^{n} \big(y_j - (\alpha x_j + \beta)\big)\left(-\dfrac{\partial}{\partial\beta}(\alpha x_j + \beta)\right) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2\sum_{j=1}^{n}(y_j - \alpha x_j - \beta)x_j = 0; \\ 2\sum_{j=1}^{n}(y_j - \alpha x_j - \beta) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \alpha\sum_{j=1}^{n}x_j^{\,2} + \beta\sum_{j=1}^{n}x_j = \sum_{j=1}^{n}x_j y_j; \\ \alpha\sum_{j=1}^{n}x_j + \beta n = \sum_{j=1}^{n}y_j. \end{cases}$$

Искомые значения α и β находим в результате решения полученной для них системы уравнений.

3.3. Пример. Найти выборочное уравнение линейной регрессии по следующим данным измерений:

x_j	1	2	3	4	5	6
y_j	5,2	6,3	7,1	8,5	9,2	10,0

Решение. Находим значения сумм, которые являются коэффициентами при α и β в соответствующей системе уравнений:

$$\sum_j x_j = 21,\ \sum_j y_j = 46{,}3,\ \sum_j x_j^2 = 91,\ \sum_j x_j y_j = 179{,}1.$$

Записываем теперь уравнения системы п. 9.2:

$$\begin{cases} 91\,\alpha + 21\beta = 179{,}1; \\ 21\,\alpha + 6\beta = 46{,}3, \end{cases}$$

откуда находим $\alpha = 0{,}98$, $\beta = 4{,}3$ так, что выборочное линейной уравнение регрессии принимает вид $y = 0{,}98x + 4{,}3$.

4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА: ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 4.1. Из генеральной совокупности извлечена выборка. Известен вариационный ряд

x_i	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
n_i	10	25	40	15	10

Указать размах варьирования, моду, медиану вариационного ряда. Найти: а) выборочную среднюю; б) выборочную дисперсию.

Решение. Размах

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 1{,}5 - 1{,}1 = 0{,}4.$$

Мода Mo = 1,3, так как эта варианта обладает наибольшей частотой, равной 40. Медиана me = 1,3, поскольку эта варианта расположена в середине вариационного ряда. Объём выборки

$$n = 10 + 25 + 40 + 15 + 10 = 100.$$

а) По формуле п. 1.3 имеем

$$\bar{x}_{\text{в}} = 1{,}1 \cdot \frac{10}{100} + 1{,}2 \cdot \frac{25}{100} + 1{,}3 \cdot \frac{40}{100} + 1{,}4 \cdot \frac{15}{100} + 1{,}5 \cdot \frac{10}{100} = 1{,}29.$$

б) Согласно п. 1.3

$$D_{\text{в}} = (1{,}1)^2 \cdot 0{,}1 + (1{,}2)^2 \cdot 0{,}25 + (1{,}3)^2 \cdot 0{,}4 + (1{,}4)^2 \cdot 0{,}15 + (1{,}5)^2 \cdot 0{,}1 - (1{,}29)^2 = 0{,}0319.$$

Задача 4.2. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратичным отклонением $\sigma = 4$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочной средней $\bar{x}_{\text{в}} = 3{,}6$, если объём выборки $n = 64$ и задана надёжность оценки $\gamma = 0{,}95$.

Найдём t из соотношения $\Phi(t) = \dfrac{0{,}95}{2} = 0{,}475$. По таблице П.1 находим $t = 1{,}96$. Найдём точность оценки $\delta = \dfrac{1{,}96 \cdot 4}{\sqrt{64}} = 0{,}98$. Следовательно, доверительный интервал имеет вид (3,6 – 0,98; 3,6 + 0,98). Иначе говоря, с надёжностью $\gamma = 0{,}95$ имеет место неравенство $2{,}62 < a < 4{,}58$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. КОНТРОЛЬНЫЙ МОДУЛЬ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что выборочная средняя $\bar{x}_{\text{в}}$ принимает значения

$$\bar{x}_{\text{в}} \in [x_{\min}, x_{\max}],$$

где $x_{\max}$ и $x_{\min}$ – соответственно наибольшее и наименьшее значения вариант x_k.

2. Количественный признак распределён по показательному закону с параметром λ, т.е. плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x > 0; \qquad f(x) = 0, \ x < 0.$$

Извлечена выборка и вычислена выборочная средняя $\bar{x}_{\text{в}}$. Используя метод моментов, найти точечную оценку параметра λ.

2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В течение 20 биржевых торгов курс доллара составил следующие значения (в рублях):

25,75; 25,8; 25,7; 25,7; 25,6; 25,65; 25,6; 25,65; 25,65; 25,7;
25,8; 25,8; 25,8; 25,7; 25,7; 25,7; 25,7; 25,6; 25,5; 25,65.

Найти: а) моду Mo; б) медиану me; в) размах варьирования R; г) средний курс доллара.

2. Из генеральной совокупности задержанных на таможне контрафактных товаров сделана выборка. Известны примерные рыночные цены аналогичных товаров признанных брендов в тыс. руб. x_i и частоты n_i их значений в выборочной совокупности.

x_i	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
n_i	26	15	12	18	16	13

Найти выборочную среднюю рыночной цены контрафакта и её выборочное среднеквадратическое отклонение.

3. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надёжностью $\gamma = 0,95$, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в = 82,51$, объём выборки $n = 11$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma = 11$.

4. Из генеральной совокупности металлических шайб сделана выборка. Известны внутренние диаметры x_i и частоты n_i этих значений в выборочной совокупности (размеры даны в миллиметрах). Найти выборочную среднюю.

x_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
n_i	10	26	12	18	16	18

5. Врачи рекомендуют при использовании тонометров-автоматов производить измерения артериального давления (АД) несколько раз и принимать за правильный результат среднее арифметическое измерений. Особо мнительный пациент измерил давление 20 (!) раз. Каково истинное верхнее значение АД, если для него он получил следующие результаты измерений: 140, 135, 135, 135, 140, 145, 145, 150, 145, 150, 150, 140, 145, 150,160, 145,155,155, 160, 160?

6. Между верхним и нижним значениями показателей артериального давления (X и Y) существует зависимость. Считая её линейной регрессией, найти соответствующее уравнение, если данные измерений следующие:

x_j	125	130	130	140	145	150	155	160	165	170
y_j	65	65	70	75	80	80	85	90	95	100

По уравнению линейной регрессии определить нижнее значение АД, если верхнее значение достигнет 180 ед.

Глава 5. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. ПРИЛОЖЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА

Рассмотрим пример использования свойств распределения Пуассона на практике при аудиторских проверках страховых компаний. Пусть имеется квартальный отчёт (табл. 1), поданный в главный офис некоторой страховой компанией из её филиала, о количестве страховых случаев, произошедших с застрахованными объектами. В нём соотнесены данные, с каким количеством страховых объектов сколько страховых случаев произошло.

1. Данные о количестве страховых случаев за квартал

Количество страховых случаев k	Количество застрахованных объектов m_k
0	120
1	51
2	35
3	21
4	13
5	8
6	1
7	1
Итого	250

В аудиторском отделе страховой компании решили убедиться в подлинности отчёта – есть ли в нём приписки.

Как известно, случайные события, происходящие в нашей жизни, – помехи на линиях электропередачи, поломки оборудования, страховые случаи и др. – происходят по закону Пуассона. Следствие из него – среднее количество страховых случаев и его дисперсия должны быть примерно равны. Проверим это.

Определим общее количество страховых случаев:

$$s_1 = 0 \cdot 120 + 1 \cdot 51 + 2 \cdot 35 + 3 \cdot 21 + 4 \cdot 13 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 289.$$

Тогда среднее количество застрахованных случаев на один объект за квартал равно (общее количество застрахованных объектов равно $N = 250$)

$$\bar{k} = \frac{s_1}{N} = 1{,}156, \tag{1.1}$$

т.е. в среднем с одним объектом случалась 1,156 страховых случаев.

Теперь найдём дисперсию количества страховых случаев. Сначала вычислим

$$s_2 = 0^2 \cdot 120 + 1^2 \cdot 51 + 2^2 \cdot 35 + 3^2 \cdot 21 + 4^2 \cdot 13 + 5^2 \cdot 8 + 6^2 \cdot 1 + 7^2 \cdot 1 = 873.$$

Средний квадрат равен

$$\overline{k^2} = \frac{s_2}{N} = 3{,}492.$$

Дисперсия равна

$$D = \overline{k^2} - \bar{k}^2 = 3{,}492 - 1{,}156^2 \approx 2{,}156.$$

Как видно, дисперсия D на 1 больше среднего количества $\bar{k}$, т.е. резко отличаются. Следовательно, имеются приписки, так как нарушается следствие из закона Пуассона. Определим, сколько страховых случаев было приписано.

Заметим, что вряд ли были приписки с объектами, которые попадали под страховые случаи по 1-му разу (если приписывать, то большими объёмами). Тогда запишем закон Пуассона для объектов, попавших под страховой случай один раз:

$$m_1 = N \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda},$$

где λ – истинное среднее количество страховых случаев на один объект, или (из табл. 1)

$$51 = 250\lambda e^{-\lambda}.$$

Получаем трансцендентное уравнение относительно λ:

$$\lambda = 0{,}204 e^{\lambda}$$

или

$$\lambda = \varphi(\lambda). \tag{1.2}$$

Для его решения будем использовать метод последовательных приближений. Так как функция $\varphi(\lambda)$ всюду монотонная, $\varphi(0) = 0{,}204$ и $\varphi(1) = 0{,}204e < 1$, то для $\lambda \in [0;\, 1]$ значения функции $\varphi(\lambda) \in [0;\, 1]$. Также заметим, что

$$\varphi'(\lambda) = 0{,}204 e^{\lambda} = \varphi(\lambda).$$

Следовательно, для $\lambda \in [0;\, 1]$

$$0 < \varphi'(\lambda) < 1.$$

Тогда по теореме 1 [1, с. 136, 137] существует единственный корень уравнения (1.2) на отрезке [0; 1]. Начальное приближение λ_0 к корню также выбирается из отрезка [0; 1].

Пусть $\lambda_0 = 0{,}5$. Тогда

$$\lambda_1 = 0{,}204 e^{\lambda_0} \approx 0{,}336,$$
$$\lambda_2 = 0{,}204 e^{\lambda_1} \approx 0{,}285,$$
$$\lambda_3 = 0{,}204 e^{\lambda_2} \approx 0{,}271,$$
$$\lambda_4 = 0{,}204 e^{\lambda_3} \approx 0{,}268,$$
$$\lambda_5 = 0{,}204 e^{\lambda_4} \approx 0{,}267,$$
$$\lambda_6 = 0{,}204 e^{\lambda_5} \approx 0{,}266,$$
$$\lambda_7 = 0{,}204 e^{\lambda_6} \approx 0{,}266.$$

Как видно из итерационного процесса, три знака после запятой, начиная с 6-й итерации, не меняются. Поэтому можно считать, что корень уравнения (1.2)

$$\lambda \approx 0{,}266.$$

Тогда объём приписок Δ можно определить из следующего соотношения (если $\Delta = 0$, то получим формулу (1.1)):

$$s_1 = N\lambda + \Delta,$$

откуда

$$\Delta = s_1 - N\lambda = 289 - 250 \cdot 0{,}266 \approx 223,$$

т.е. 223 случая были приписаны.

2. ПРИМЕНЕНИЕ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕРАБОТКИ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ

Для успешной промышленной реализации термохимической конверсии биомасс необходимо обеспечить равномерную загрузку биомассы в реактор. Результаты многолетних исследований процесса дозирования зернистых материалов показывают, что за счёт использования технологии двухстадийного непрерывного весового дозирования, разработанной в ТГТУ [3, 4], можно обеспечить непрерывную и равномерную загрузку биомассы в реактор.

Сущность данной технологии заключается в том, что на первой стадии весовым порционным дозатором формируются отдельные порции сыпучего материала весом ΔP, а на второй стадии эти порции преобразуются в непрерывный поток. В качестве преобразователя используется вращающаяся труба или наклонный вибрирующий лоток. Процесс преобразования отдельных порций в непрерывный поток описывается ***с использованием математического аппарата случайных марковских процессов***. Решая обратную задачу, можно по требуемому виду непрерывного потока найти регламент загрузки отдельных порций в преобразователь. Такая задача является актуальной на сегодняшний день.

Рассмотрим процесс преобразования отдельной порции сыпучего материала на вибрирующем лотке, который наклонён к горизонту под углом, меньшим, чем угол трения движения. Ссыпающийся край лотка шарнирно закреплён. Таким образом, движение материала осуществляется только при вибрации лотка. Лоток разделим на m участков. Их длина выбирается такой, чтобы за один переход частицы материала могли перемещаться только в соседнюю ячейку.

В начальный момент времени на лоток подаётся порция материала. Пусть эта порция распределилась в две ячейки (рис. 1 и 2).

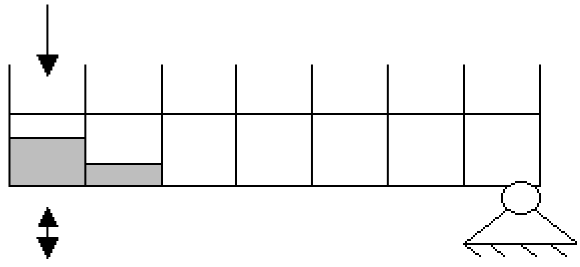


Рис. 1. Начальное распределение вещества на лотке

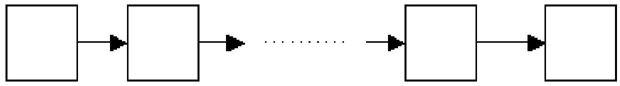


Рис. 2. Моделирующая цепь – только переход вперёд или своя ячейка

Обозначим через S вектор-строку, который характеризует состояние вещества на лотке, т.е. s_i – это количество вещества в i-й ячейке, $i=\overline{1,m}$. Начинаем вибрировать лоток. Через промежуток времени Δt, называемым временем одного перехода, вектор $S^{(0)}$ изменится и станет $S^{(1)}$. Считая Δt постоянным, заменим непрерывное время его дискретными моментами $t_k = k\Delta t$ и будем рассматривать k как номер состояния (шага) вещества на лотке. Материал перемещается вдоль оси лотка и через n шагов достигает ссыпающегося края, и если продолжить процесс, то материал начнёт ссыпаться с лотка.

Состояние системы в любой момент времени t_k $(k=\overline{1,n})$ описывается следующей матричной формулой:

$$S^{(k)} = S^{(k-1)}P. \qquad (2.1)$$

Однородная квадратная матрица P порядка m имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p & 1-p & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Как видно из равенства (2.1), для того, чтобы рассчитать прямой процесс, необходимо знать начальный вектор и матрицу P переходных вероятностей, определяющие конструктивные параметры вибрирующего лотка. Многолетние исследования показывают, что процесс идентификации параметров математической модели процессов марковского типа, т.е. формирование матрицы P переходных вероятностей, весьма трудоёмок.

При решении обратной задачи возможны три варианта: существует такой вектор начального состояния, из которого с известной матрицей P можно получить требуемый вектор конечного состояния; к конечному состоянию можно прийти, но для этого необходимо изменить матрицу P; конечное состояние недостижимо.

Практический интерес представляют первые два случая. Прежде всего, необходимо получить уравнение, решением которого была бы переходная вероятность p, определяющая матрицу P.

Преобразуем для этого формулу (2.1) при $k = n$ к системе вида

$$\begin{cases} s_1^{(n-1)} p = s_1^{(n)}; \\ s_1^{(n-1)}(1-p) + s_2^{(n-1)} p = s_2^{(n)}; \\ s_2^{(n-1)}(1-p) + s_3^{(n-1)} p = s_3^{(n)}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_{m-1}^{(n-1)}(1-p) + s_m^{(n-1)} = s_m^{(n)}. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Так как в состоянии $n - 1$ последняя ячейка свободна, то $s_m^{(n-1)} = 0$. Таким образом, система (2.2) замкнута. Выразим из последнего уравнения $s_{m-1}^{(n-1)}$ через $s_m^{(n)}$:

$$s_{m-1}^{(n-1)} = \frac{s_m^{(n)}}{1-p}. \qquad (2.3)$$

Подставляя выражение (2.3) в предыдущее уравнение системы, имеем

$$s_{m-2}^{(n-1)} = \frac{s_{m-1}^{(n)}(1-p) - s_m^{(n)} p}{(1-p)^2}.$$

Аналогично получаем $s_{m-3}^{(n-1)}, s_{m-4}^{(n-1)}, s_{m-5}^{(n-1)}$ и т.д. до $s_1^{(n-1)}$:

$$s_{m-3}^{(n-1)} = \frac{s_{m-2}^{(n)}(1-p)^2 - s_{m-1}^{(n)}(1-p)p + s_m^{(n)} p^2}{(1-p)^3};$$

$$s_{m-4}^{(n-1)} = \frac{s_{m-3}^{(n)}(1-p)^3 - s_{m-2}^{(n)}(1-p)^2 p + s_{m-1}^{(n)}(1-p)p^2 - s_m^{(n)} p^3}{(1-p)^4};$$

$$s_{m-5}^{(n-1)} = \frac{s_{m-4}^{(n)}(1-p)^4 - s_{m-3}^{(n)}(1-p)^3 p + s_{m-2}^{(n)}(1-p)^2 p^2 - s_{m-1}^{(n)}(1-p)p^3 + s_m^{(n)} p^4}{(1-p)^5};$$

…………………………………………………………………………………

$$s_1^{(n-1)} = \frac{\sum_{i=2}^{m}(-1)^i s_i^{(n)}(1-p)^{m-i} p^{i-2}}{(1-p)^{m-1}}.$$

Подставим последнее выражение в первое уравнение системы (2.2):

$$\frac{\sum_{i=2}^{m}(-1)^i s_i^{(n)}(1-p)^{m-i} p^{i-1}}{(1-p)^{m-1}} = s_1^{(n)} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}(-1)^i s_i^{(n)}(1-p)^{m-i} p^{i-1} = 0. \qquad (2.4)$$

Обобщая выражение (2.4) для случая, когда на шаге с номером $k = \overline{n,1}$ в векторе $S^{(k)}$ имеются $l = n - k$ последних нулевых элементов (свободные ячейки у края лотка), имеем

$$\sum_{i=1}^{m-l}(-1)^i s_i^{(k)}(1-p)^{m-l-i} p^{i-1} = 0,$$

или в общем виде

$$f(p) = 0. \qquad (2.5)$$

Если степень многочлена f больше четырёх, то по теореме Галуа решить алгебраически уравнение (2.5) невозможно. Реальным путём решения является использование численных методов.

Наиболее удобным является модифицированный метод сканирования. Суть метода: отрезок [0; 1], в котором лежат допустимые корни уравнения (2.5), разбивается N точками на одинаковые отрезки. В каждой точке рассчитывается значение функции f, абсолютная величина которого сравнивается с заданной точностью ε. Так осуществляется поиск отрезков локализации корней, в которых абсолютные значения функции f лежат внутри ε-окрестности нуля. В каждом из них ищется точка, соответствующая минимальному значению абсолютной величины f, абсциссу которой мы принимаем за приближённое значение корня. Вне отрезков локализации смотрят знаки значений f для каждой пары соседних точек. Если знаки различны, то за корень можно принять любую точку, лежащую между рассматриваемыми точками (например, точку пересечения прямой, соединяющей значения функции f, с осью абсцисс).

Таким способом можно найти все допустимые приближённые решения уравнения (2.5).

Заметим, что при большом значении разности $m - l$ функция f является пологой на отрезке [0; 1]. Поэтому применять, например, численный метод Ньютона в этом случае нежелательно – получим большую погрешность найденного корня из-за близости производной функции f к нулю, а для повышения точности модифицированного метода сканирования необходимо производить вычисления с аналогом функции f:

$$\varphi(p) = Kf(p),$$

где K – коэффициент увеличения.

Далее предлагается алгоритм нахождения исходного состояния $S^{(0)}$.

НАЧАЛО

1. Задаёмся вероятностью $p \neq 0$ (вырожденную матрицу P мы не рассматриваем), характеризующей конструкцию аппарата, числом шагов n и вектором конечного состояния $S^{(n)}$;
2. $k = n$;
3. $l = 0$;
4. $S^{(k-1)} = S^{(k)} P^{-1}$;
5. **ЕСЛИ** среди компонентов вектора $S^{(k-1)}$ нет отрицательных чисел (так как это физически невозможно), **ТО** переход к шагу 13;
6. Решаем уравнение (5) и получаем список (стек) вероятностей sp;
7. **ЕСЛИ** список sp пуст, **ТО** переход к шагу 18;
8. Снимаем со стека sp элемент в переменную p;
9. **ЕСЛИ** $p == 0$, **ТО** переход к шагу 7;
10. $S^{(k-1)} = S^{(k)} P^{-1}$;
11. **ЕСЛИ** среди компонентов вектора $S^{(k-1)}$ нет отрицательных чисел, **ТО** переход к шагу 13;
12. Переход к шагу 7;
13. Вывод $S^{(k-1)}$ и p;
14. $k = k - 1$;

15. $l = l + 1$;

16. **ЕСЛИ** $k == 0$, **ТО** переход на **КОНЕЦ** (результат работы алгоритма – вектор $S^{(0)}$;

17. Переход к шагу 4;

18. Вывод "Невозможно найти предыдущее состояние для процесса с двухдиагональной матрицей P"

КОНЕЦ

Для проведения расчётов в реальном режиме времени поиск матрицы P^{-1} необходимо реализовать с использованием матричных алгоритмов математического пакета MATLAB 7.0 и базовой технологии операционной системы Windows – технологии COM (т.е. MATLAB предоставляет доступ внешним программам к основным функциям пакета).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суть компетентностного подхода в математическом образовании состоит в формировании у обучающихся способности переносить полученные знания и умения в новые условия, на вновь осваиваемые объекты исследования и т.п. Такими объектами могут быть и сами математические теории. Изучение теории вероятностей и математической статистики, как правило, следует за изучением (или параллельно изучению) элементов математической логики, линейной алгебры, математического анализа и др. Поэтому следует обратить внимание обучающихся на «проникновение» методов дискретной математики (комбинаторики, теории множеств), алгебры и анализа в вопросы стохастики. Такие методы способствуют укреплению внутрипредметных связей, формированию у обучающихся представлений о целостности математической науки, общности и универсальности её основных идей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гмурман, В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 2001. – 479 с.

2. **Куликов, Г. М.** Элементы прикладной математики / Г. М. Куликов, А. Д. Нахман, С. В. Плотникова. – Тамбов : Изд-во ТГТУ, 2008. – 160 с.

3. **Демидович, Б. П.** Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : Наука, 1966. – 664 с.

4. **С1 2138783.** Способ непрерывного дозирования сыпучих материалов / В. Ф. Першин, С. В. Барышникова ; Тамб. гос. техн. ун. ; № 98110695/28 ; Заявл. 04.06.98 ; Опубл. 27.09.99, Бюл. № 27, 1999.

5. **Pershin, V.** Use of two-stage feeding for preparing bulk solids mixture / V. Pershin, S. Barishnikova // Proceedings of The First European Congress on Chemical Engineering. – Florence, 1997. – V. 2. – P. 993 – 995.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ТАБЛИЦЫ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ ЛАПЛАСА И ЭКСПОНЕНТЫ e^{-x}

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

Таблица П.1

X	0	0,5	1,0	1,5	1,645	1,96
$\varphi(x)$	0,3989	0,3521	0,2420	0,1295	0,103	0,0584
$\Phi(x)$	0,0000	0,1915	0,3413	0,4332	0,45	0,4750
X	2,0	2,50	2,80	3,0	3,5	4
$\varphi(x)$	0,0540	0,0175	0,0078	0,0044	0,0009	0,0001
$\Phi(x)$	0,4772	0,4938	0,4985	0,4987	0,4997	0,4999

Таблица П.2

X	1	2	3	4	5
e^{-x}	0,36 788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное электронное издание

НАХМАН Александр Давидович
ПРОТАСОВ Дмитрий Николаевич
ПЧЕЛИНЦЕВ Александр Николаевич

ЭЛЕМЕНТЫ СТОХАСТИКИ – КОМПЕТЕНТНОСТНЫЙ ПОДХОД

Учебное пособие

Редактор Л. В. Комбарова
Инженер по компьютерному макетированию Т. Ю. Зотова

ISBN 978-5-8265-2227-1

Подписано к использованию 13.05.2020.
Тираж 50 шт. Заказ № 44

Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14
Телефон (4752) 63-81-08
E-mail: izdatelstvo@tstu.ru