

3.3. Квадратные неравенства

Неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$, где a, b, c – некоторые числа, x – переменная, при этом $a \neq 0$, называется квадратным неравенством.

Рассмотрим функцию $y = ax^2 + bx + c$ – это квадратичная функция. Её графиком является парабола. С помощью квадратичной функции и её графика будем решать квадратные неравенства.

Решим неравенство $ax^2 + bx + c > 0$. Приравняем левую часть к нулю $ax^2 + bx + c = 0$. Получили квадратное уравнение. Найдём дискриминант $D = b^2 - 4ac$.

В зависимости от того какой дискриминант, неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ будет иметь различные решения.

1. Если $D > 0$, то $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня x_1 и x_2 , следовательно, парабола пересекает числовую прямую Ox в двух точках (рис. 1). И неравенство имеет решение $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.
2. Если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один корень x_1 , следовательно, парабола пересекает числовую прямую Ox в одной точке (рис. 2). В данном случае неравенство имеет решение $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$.
3. Если $D < 0$, то $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, следовательно, парабола не пересекает числовую прямую Ox (рис. 3). В данном случае неравенство имеет решение $x \in (-\infty; +\infty)$.

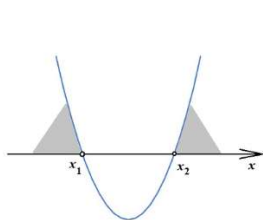


Рис. 1

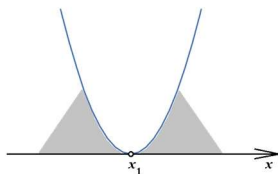


Рис. 2

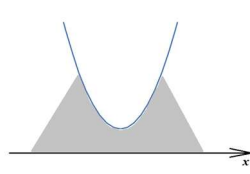


Рис. 3

Решим неравенство $ax^2 + bx + c < 0$. Аналогичным образом с неравенством выше будем решать данное неравенство. Приравняем левую часть к нулю $ax^2 + bx + c = 0$. Получили квадратное уравнение. Найдём дискриминант $D = b^2 - 4ac$ и корни квадратного уравнения по формуле $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Рассмотрим несколько случаев.

1. Если $D > 0$, то $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня x_1 и x_2 , следовательно, парабола пересекает числовую прямую Ox в двух точках (рис. 4). Тогда неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ имеет решение $x \in (x_1; x_2)$.
2. Если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один корень x_1 , следовательно, парабола пересекает числовую прямую Ox в одной точке (рис. 5). В данном случае наше неравенство имеет решение $x \in \emptyset$.
3. Если $D < 0$, то $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, следовательно, парабола не пересекает числовую прямую Ox (рис. 6). В данном случае неравенство имеет следующее решение: $x \in \emptyset$.

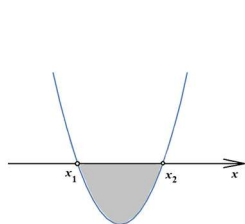


Рис. 4

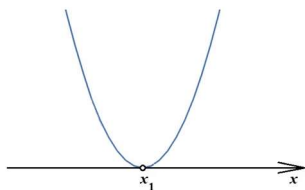


Рис. 5

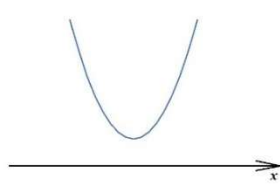


Рис. 6

Если квадратные неравенства будут иметь знак \geq или \leq , то открытые промежутки в решении неравенств изменятся на закрытые.

Мы решили неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c < 0$ в общем виде если первый коэффициент положительный ($a > 0$). Квадратные неравенства, у которых первый коэффициент отрицательный, можно преобразовать, умножив обе части неравенства на -1 . При этом знак неравенства изменится на противоположный, а первый коэффициент станет положительным.

Примеры.

1. Решим неравенство $x^2 - 3x + 2 < 0$.

Приравняем левую часть к нулю, в получившемся квадратном уравнении найдём дискриминант и корни. $D = 1$ и $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Изобразим параболу, которая пересекает числовую прямую в точках 2 и 1 (рис. 7). Получили $D > 0$ и знак неравенства меньше, поэтому из рисунка видно, что решение неравенства $x \in (1; 2)$.

2. Решим неравенство $x^2 + 5x + 6 \geq 0$.

$x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow D = 1$, $x_1 = \frac{-5+1}{2} = -2$, $x_2 = \frac{-5-1}{2} = -3 \Rightarrow x \in (-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$ (рис. 8).

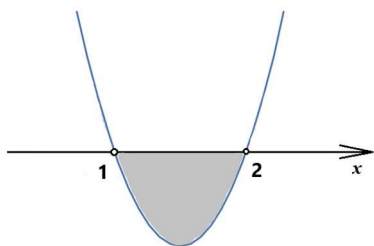


Рис. 7

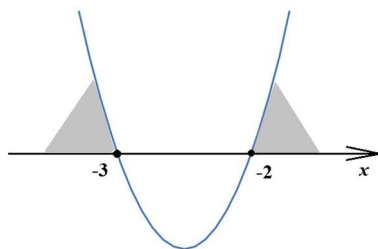


Рис. 8