

3.4. Рациональные неравенства

Рациональные неравенства делятся на целые рациональные и дробно-рациональные неравенства.

Целое рациональное неравенство – это неравенство вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0 > 0$$
$$\text{или } a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0 < 0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ – любые действительные числа, x – переменная, $n \geq 1$. Квадратные и линейные неравенства являются целыми рациональными неравенствами.

Например, $x^2 + x - 5 \geq 0$, $x + 1 < 0$, $x^4 - 5x^3 \leq 20x - 16$, $(x + 1)(x - 2)(x - x^2) > 0$ – это целые рациональные уравнения.

Неравенство вида

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0 x^0} > 0 \text{ или } \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0 x^0} < 0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, b_m, b_{m-1}, \dots, b_1, b_0$ – любые действительные числа, x – переменная, $n \geq 0, m \geq 1$ – это дробно-рациональные неравенства.

Например, $\frac{x^2 + 2x}{x + 1} \geq 1$, $\frac{(x+1)(5x-3)(x-2)}{x^2 - 9} < 0$ – это дробно-рациональные неравенства.

Целые рациональные и дробно-рациональные неравенства решаются методом интервалов.

Суть этого метода заключается в том, что нужно левую часть неравенства разложить на множители. Затем каждый множитель приравнять к нулю. Отметив эти точки на числовой прямой, определить промежутки знакопостоянства, и определить интервалы, где выражение левой части неравенства принимает положительные и отрицательные значения.

Примеры.

1. Решим неравенство $(x + 2)(x - 5)(x - 1) < 0$.

Приравняем левую часть неравенства к нулю.

Получим $(x + 2)(x - 5)(x - 1) = 0$. Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю. Поэтому можем найти корни получившегося уравнения.

$$x_1 = -2; x_2 = 5; x_3 = 1.$$

Отметим найденные точки в порядке возрастания на числовой прямой (рис. 9).

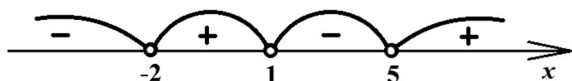


Рис. 9

Эти точки делят ось Ox на четыре промежутка $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$, $(1; 5)$ и $(5; +\infty)$. Рассмотрим каждый интервал, определив на нём знак, который имеет выражение $(x+2)(x-5)(x-1)$. Для этого выберем любое число из интервала, и подставим его вместо x .

Проверим интервал $(-\infty; -2)$. Возьмём число -3 и, подставив, получим $(-3+2)(-3-5)(-3-1) = (-1) \cdot (-8) \cdot (-4) = -32$.

Получили отрицательное число, таким образом, на интервале $(-\infty; -2)$ знак минус.

Аналогичным способом проверяем остальные три интервала. Получим знак плюс на интервалах $(-2; 1)$ и $(5; +\infty)$ и знак минус – на интервалах $(-\infty; -2)$ и $(1; 5)$.

Знак неравенства меньше. Следовательно, выбираем интервалы со знаком минус. Получили решение $x \in (-\infty; -2) \cup (1; 5)$.

2. Решим дробно-рациональное неравенство $\frac{(x+1)(x-3)}{x-2} \geq 0$.

Приравняем левую часть неравенства к нулю и найдём корни получившегося уравнения: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. При решении следует учитывать знаменатель, но мы знаем, что на нуль делить нельзя, следовательно, $x \neq 2$.

Отметим найденные точки на числовой прямой, причём точку $x \neq 2$ изобразим пустой (рис. 10). Эти точки делят ось Ox на четыре промежутка, $[-\infty; -1]$, $[-1; 2)$, $(2; 3]$ и $[3; +\infty)$.

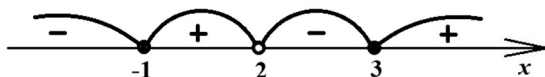


Рис. 10

Далее найдём знаки на интервалах. Возьмём число, принадлежащее каждому интервалу, и подставим в выражение $\frac{(x+1)(x-3)}{x-2}$.

Число нуль принадлежит интервалу $[-1; 2)$, поэтому подставим 0 в выражение $\frac{(0+1)(0-3)}{0-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$, получим знак плюс на этом интервале.

Аналогично проверим остальные промежутки. Получим знак плюс на интервалах $[-1; 2)$ и $[3; +\infty)$ и знак минус – на интервалах $[-\infty; -1]$ и $(2; 3]$.

Знак неравенства больше или равно, значит, выбираем интервалы со знаком плюс, следовательно, решение неравенства $x \in [-1; 2) \cup [3; +\infty)$.