

## 2.5. Квадратные уравнения

Квадратное уравнение – это уравнение вида  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $x$  – неизвестное,  $a$  ( $a \neq 0$ ) – первый коэффициент,  $b$  – второй коэффициент,  $c$  – свободный член.

$ax^2 + bx + c = 0$  – это полное квадратное уравнение ( $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ ).

### *Решение неполных квадратных уравнений*

Если  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  и  $c = 0$ , то получим неполное квадратное уравнение

$ax^2 + bx = 0$ . Вынесем  $x$  за скобки, получим  $x(ax + b) = 0$ . Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, поэтому  $x_1 = 0$  и  $x_2 = -\frac{b}{a}$ .

Пример.  $4x^2 - x = 0 \Rightarrow x(4x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$  и  $x_2 = \frac{1}{4}$ .

Если  $a \neq 0$ ,  $b = 0$  и  $c \neq 0$ , то получим неполное квадратное уравнение  $ax^2 + c = 0$ , перенесём свободный член вправо  $ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$ . Здесь возможны два варианта:

1)  $-\frac{c}{a} > 0$ , то  $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ ;

2)  $-\frac{c}{a} < 0$ , то уравнение не имеет корней, то есть  $x_{1,2} \in \emptyset$ .

Пример.

1.  $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 4$ .

2.  $x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 = -16 \Rightarrow x_{1,2} \in \emptyset$ .

Если  $a \neq 0$ ,  $b = 0$  и  $c = 0$ , то получим неполное квадратное уравнение  $ax^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0$ .

Пример.  $6x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0$ .

### *Решение полных квадратных уравнений*

Чтобы решить полное квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ , нужно сначала найти  $D$  – дискриминант.  $D = b^2 - 4ac$ .

1. При  $D > 0$  уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет два корня  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ .

Пример.  $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 = 3^2 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 4$  и  $x_2 = 1$ .

2. При  $D = 0$  уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет один корень или два равных корня  $x_{1,2} = \frac{-b \pm 0}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$ .

Пример.  $x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm 0}{2} \Rightarrow x = -3$ .

3. При  $D < 0$  полное квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  не имеет корней, то есть  $x_{1,2} \in \emptyset$ .

Пример.  $x^2 + 6x + 10 = 0 \Rightarrow D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 36 - 40 = -4 < 0 \Rightarrow x_{1,2} \in \emptyset$ .

### ***Приведённое квадратное уравнение***

Если в уравнении  $ax^2 + bx + c = 0$  первый коэффициент  $a = 1$ , то получим уравнение вида  $x^2 + bx + c = 0$  – это приведённое квадратное уравнение.

Для приведённого квадратного уравнения справедлива теорема Виета.

*Теорема Виета.* Сумма корней в приведённом квадратном уравнении  $x^2 + bx + c = 0$  равна  $-b$ , а произведение корней  $c$ .

*Обратная теорема Виета.* Если сумма двух чисел  $x_1 + x_2 = -b$ , а произведение  $x_1 \cdot x_2 = c$ , то числа  $x_1$  и  $x_2$  – это корни приведённого квадратного уравнения  $x^2 + bx + c = 0$ .

Используя теорему Виета и обратную теорему Виета, можно находить корни уравнения методом подбора.

Пример.  $x^2 - 5x + 6 = 0$  – это приведённое квадратное уравнение  $\Rightarrow x_1 + x_2 = 5$ ,  $x_1 \cdot x_2 = 6$ . Из этих двух равенств легко понять, что  $x_1 = 2$  и  $x_2 = 3$ .

### ***Биквадратное уравнение***

$ax^4 + bx^2 + c = 0$  – это биквадратное уравнение.

Решаются биквадратные уравнения методом замены переменных  $x^2 = t \Rightarrow x^4 = t^2$ .

Пример.  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ . Используем замену переменных  $x^2 = t \Rightarrow x^4 = t^2$ . Получим квадратное уравнение относительно  $t$ .

$t^2 - 10t + 9 = 0 \Rightarrow D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 100 - 36 = 64 = 8^2 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{10 \pm 8}{2} \Rightarrow t_1 = 9$  и  $t_2 = 1 \Rightarrow x^2 = 9$  и  $x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3$  и  $x_{3,4} = \pm 1$ .