

2.7. Рациональные уравнения

К рациональным уравнениям относят целые рациональные и дробно-рациональные уравнения.

Целое рациональное уравнение имеет вид

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = 0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ – любые действительные числа, x – неизвестное, $n \geq 1$.

Дробно-рациональное уравнение имеет вид

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0 x^0} = 0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, b_m, b_{m-1}, \dots, b_1, b_0$ – любые действительные числа, x – неизвестное, $n \geq 0, m \geq 1$.

Линейные и квадратные уравнения – это простейшие целые рациональные уравнения.

К основным методам решения рациональных уравнений относят метод группировки, метод подбора, метод введения новых переменных или метод замены.

В большинстве случаев при решении рациональных уравнений необходимо привести левую часть к разложению многочлена на множители, а в правой части нужно добиться, чтобы стоял нуль. Тогда можно будет перейти к более простым уравнениям.

Одно и то же уравнение можно решать несколькими методами.

Примеры.

1. Решить уравнение $x^4 - 5x^3 + 20x - 16 = 0$.

Решим уравнение, используя метод группировки:

$(x^4 - 16) - (5x^3 - 20x) = 0$. Первое выражение в скобках разложим с помощью формулы «Разность квадратов», а из второго выражения в скобках вынесем $5x$. Получим:

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) - 5x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 5x + 4) = 0.$$

Получили в левой части уравнения разложение на множители, а в левой нуль, поэтому можно перейти к двум более простым уравнениям.

$$x^2 - 4 = 0 \text{ и } x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Уравнение $x^2 - 4 = 0$ имеет корни $x_{1,2} = \pm 2$. А в уравнении $x^2 - 5x + 4 = 0$ найдём дискриминант – он равен 9. Их корни $x_3 = 1$, $x_4 = 4$.

ОДЗ уравнения $x^4 - 5x^3 + 20x - 16 = 0$ – множество действительных чисел R . Поэтому решение уравнения $\{-2; 1; 2; 4\}$.

2. Решить уравнение $\frac{x^3+8}{x+2} = 12$.

Найдём ОДЗ уравнения. $x + 2 \neq 0, x \neq -2 \Rightarrow \text{ОДЗ: } x \in R \setminus \{-2\}$.

Умножим левую и правую части уравнения на знаменатель. Получим $x^3 + 8 = 12(x + 2) \Rightarrow (x^3 + 8) - 12(x + 2) = 0$.

Разложим первые скобки на множители, применив формулу «Сумма кубов».

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 12(x + 2) = 0.$$

Вынесем общий множитель $x + 2$ за скобки.

$(x + 2)(x^2 - 2x + 4 - 12) = 0$. Данное уравнение равносильно двум более простым: $x + 2 = 0$ и $x^2 - 2x - 8 = 0$. Первое уравнение имеет корень $x_1 = -2$, а второе – корни $x_2 = 4, x_3 = -2$. Корни $x_1 = -2$ и $x_3 = -2$ не принадлежат ОДЗ уравнения. Решение уравнения: $\{4\}$.