

1.4. Иррациональные выражения

Иррациональное выражение – это такое алгебраическое выражение, у которого переменная находится под знаком радикала (или корня).

Например, выражение $x\sqrt{3} + x^2$ не является иррациональным выражением, $x\sqrt{3} + x^2$ – это целое рациональное выражение, а $3\sqrt{x} + x^2$ является иррациональным, потому что переменная x стоит под знаком корня.

Иррациональное выражение с корнем чётной степени имеет смысл, если под корнем стоит неотрицательное выражение. То есть если $\sqrt[2k]{A}$, где A – выражение с переменными, $k \in \mathbb{N}$, A должно быть неотрицательным ($A \geq 0$). Для иррациональных выражений с корнем нечётной степени подкоренное выражение может быть любым. Так определяется область допустимых значений для иррациональных выражений.

Примеры.

1. Найти ОДЗ выражения $\sqrt[4]{x+8}$. Так как здесь корень чётной степени, то подкоренное выражение должно быть неотрицательно $x+8 \geq 0 \Rightarrow x \geq -8$. ОДЗ: $x \in [-8; +\infty)$.

2. Найти ОДЗ выражения $\sqrt[3]{x+8}$. Здесь корень имеет нечётную степень, поэтому ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$.

С иррациональными выражениями можно выполнять арифметические действия, преобразовывать и упрощать. Для этого используют необходимые законы математики, свойства степеней, формулы сокращённого умножения, а также свойства корней.

Свойства корней.

Для $n, k \in \mathbb{N}$ и $a \geq 0$ и $b \geq 0$

1. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$
4. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$
5. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$
6. $(\sqrt[n]{a})^n = a$
7. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$
8. $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$

$$9. \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ при } 0 \leq a < b$$

$$10. \sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$$

Примеры.

$$1. \text{ Упростим иррациональное выражение } \frac{\sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt{(x^2)^{\frac{3}{4}}}}{x \cdot \sqrt[8]{x^5}}.$$

В числителе и знаменателе дроби будем использовать свойства степеней и свойства корней. Получим $\frac{\sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt{(x^2)^{\frac{3}{4}}}}{x \cdot \sqrt[8]{x^5}} = \frac{x x^{\frac{3}{4}}}{x x^{\frac{5}{8}}}$. Сократим дробь

на x . $\frac{\sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt{(x^2)^{\frac{3}{4}}}}{x \cdot \sqrt[8]{x^5}} = \frac{x x^{\frac{3}{4}}}{x x^{\frac{5}{8}}} = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{5}{8}}} = x^{\frac{3}{4} - \frac{5}{8}}$. В показателе степени приведём дроби к НОЗ, вычтем и запишем в виде корня.

$$\frac{\sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt{(x^2)^{\frac{3}{4}}}}{x \cdot \sqrt[8]{x^5}} = \frac{x x^{\frac{3}{4}}}{x x^{\frac{5}{8}}} = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{5}{8}}} = x^{\frac{3}{4} - \frac{5}{8}} = x^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{x}.$$

$$2. \text{ Упростить выражение } \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{x}-y^{\frac{3}{2}}}{x-y}.$$

У второй дроби в числителе степень запишем как корень, а знаменатель разложим на множители по формуле сокращенного умножения.

Получим $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{x}-y^{\frac{3}{2}}}{x-y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$. Приведём дроби к НОЗ, раскроем скобки и приведём подобные в числителе.

$$\begin{aligned} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{x}-y^{\frac{3}{2}}}{x-y} &= \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \\ &= \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})-x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{x-y} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \end{aligned}$$