

3.1. Неравенства

$a > b$, $a < b$, $a \geq b$, $a \leq b$ – это неравенства.

Неравенства – это выражения, содержащие знаки $>$, $<$, \geq , \leq (больше, меньше, больше или равно, меньше или равно). Например, $7 > 3 + 1$; $5x \geq 0$; $4 > 13$; $8x^2 + 2x + 1 \leq 0$ – это неравенства.

Неравенства, содержащие знаки больше и меньше, называют строгими неравенствами. Неравенства, содержащие знаки больше или равно и меньше или равно, называют нестрогими неравенствами. Например, $2x - 1 \geq 0$ – это нестрогое неравенство, $4x + 1 > 13$ – это строгое неравенство.

Строгому неравенству соответствует открытый интервал, например неравенство $x > 0$ можно записать как открытый интервал $x \in (0; +\infty)$.

Нестрогому неравенству соответствует закрытый интервал, например $-2 \leq x \leq 1$ можно записать как $x \in [-2; 1]$.

Выражение, которое имеет вид $a < x < b$ или $a \leq x \leq b$ называют двойным неравенством.

Два неравенства называют неравенствами одинакового смысла, если они содержат одинаковые знаки, например $a > b$ и $c > d$ – неравенства одинакового смысла. Неравенства, которые имеют разные знаки, называют неравенствами противоположного смысла. Например, $a > b$ и $c < d$ – это неравенства противоположного смысла.

Если неравенство содержит только числа, знаки действий и знаки неравенств, то оно является числовым неравенством. Например, $7 > 11 - 4$ – это числовое неравенство. Неравенство может содержать переменные, такие неравенства называют неравенствами с переменными. Например, $8x - 3 > 27$ – это неравенство с переменной x .

$3 + 5 > 12$ или $10 < 0$ – это неверные неравенства.

$3 > 2$ или $4 - 12 < 0$ – это верные неравенства, или тождественные неравенства.

Неравенства с переменными называют тождественными, если они верны при всех допустимых значениях переменных. Например, $|a + b| \leq |a| + |b|$ или $x^2 \geq 0$.

Множество всех значений переменной, при которых неравенство имеет смысл, называется областью допустимых значений (ОДЗ) неравенства.

Например, у неравенства $5x^2 + 8x - 1 \leq 0$ область допустимых значений – это множество действительных чисел R , а ОДЗ неравенства

$\frac{1}{x} > 0$ – это множество действительных чисел без числа нуль, так как делить на нуль нельзя.

При решении неравенств используют различные преобразования и свойства неравенств. Важно помнить, что при делении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный. Например, $-2x < -4$, разделим обе части неравенства на -2 , получим $x > 2$.

Существует несколько видов неравенств:

1. Линейные неравенства
2. Квадратные неравенства
4. Рациональные и дробно-рациональные неравенства
5. Иррациональные неравенства
6. Неравенства, содержащие модуль
7. Показательные неравенства
8. Логарифмические неравенства
9. Тригонометрические неравенства

Первые пять видов неравенств из списка выше называют алгебраическими неравенствами, последние три относят к трансцендентным.

Рассмотрим некоторые виды неравенств более подробно.