Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

ФИЗИКА

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА,
ЭНЕРГИЯ И РАБОТА

Конспект лекций

Утверждено Ученым советом ТГТУ
в качестве учебного пособия

Тамбов
2008

УДК 535. 338 (0765)
ББК В 36 я 73-5

Р е ц е н з е н т ы:

Д. п. н., профессор,
заведующий кафедрой теоретической механики ТГТУ
Н.Я.Молотков.
Д. ф.-м. н., профессор,
заведующий кафедрой прикладной математики ТГТУ,
Г.М.Куликов

Ав т о р – с о с т а в и т е л ь
В.И.Барсуков

Б261 Физика. Механика материальной точки (Кинематика и динамика, энергия и работа): конспект лекций / авт.-сост. В.И.Барсуков. Тамбов : Тамб. гос. техн. ун-т, изд-во ООО «Центр-Пресс», 2008.- 92 с.

Предлагаемое учебное издание представляет собой конспект лекций по разделу "Механика материальной точки" курса общей физики, читаемого в соответствии с Государственным стандартом для высших технических учебных заведений.

Оно предназначено для студентов первого – второго курсов всех специальностей инженерного профиля дневного и заочного отделений.

УДК 535. 338 (0765)
ББК В 36я 73-5

Тамбовский государственный
технический университет (ТГТУ),
2008
Изд-во ООО «Центр-Пресс»

ВВЕДЕНИЕ

1 ПОНЯТИЕ ПРЕДМЕТА И НАЗНАЧЕНИЯ ФИЗИКИ

1. «*Физика*»- в переводе с греческого - «*природа*». В глубокой древности под физикой понимали *естествознание* в самом широком смысле этого слова. Физика тогда включала в себя буквально *все* сведения о живой и не живой природе. Лишь значительно позднее, когда познание человечества об окружающем мире необычайно расширились и углубились, отдельные части физики выделились в ряд самостоятельных естественных наук (геология, зоология, ботаника, химия, астрономия и т.д.).

Что же такое современная физика, каков её предмет?
Современная физика есть наука о строении материи, о простейших и наиболее общих формах движения её, о взаимных превращениях форм движения и видов материи.

2 Что следует понимать под материей и что под движением?

Под *материей* диалектический материализм понимает все то, что существует объективно, т.е. независимо от человеческого сознания и что познается в чувственном опыте.

«Материя есть философская категория для обозначения объективной реальности, которая дана человеку в ощущениях его, которая копируется, фотографируется, отображается нашими ощущениями, существуя независимо от них».

Под *движением* в широком (философском) смысле следует понимать любые *изменения реальности,* любой протекающий в природе и человеческом обществе *процесс.*

Примеры движения материи: изменения взаимного расположения тел в пространстве, нагревания и охлаждения тел, радиоактивный распад, химическая реакция, рост растений, передача наследственности, социальное развитие и т. д.

Движение – объективная форма существования материи, её неотъемное свойство.

Материя без движения, равно как и движение без материи – немыслимы.

Никогда не прекращающиеся *движения* и постоянное *взаимодействие* материальных объектов – вот главное, что обнаруживается при изучении окружающего нас материального мира.

3. Конкретные свойства материи и формы её движения неисчерпаемы. Из всего разнообразия свойств материи и формы её движения

физика изучает лишь *простейшие*, но вместе с тем *наиболее общие* свойства и формы. Так, физика изучает *структуру элементарных частиц* и их простейших образований – *ядер и атомов*, т.е. строение того, из чего состоит и самое простое, и самое сложенное вещество. Физика изучает структуру и общие свойства основных видов материи – *вещества* и *поля*, познает закономерности взаимных превращений этих видов друг в друга.

Из известных современной науке форм движения материи физика изучает следующие четыре простейшие формы: 1) *механическую*, 2) *молекулярно-кинетическую, 3) электромагнитную, 4) внутриатомную.*

Изучение именно этих форм движения важно потому, что они, эти формы движения, неизменно сопутствуют более сложным, более высоким формам движения материи. Так, к примеру, механическое перемещение, закономерности которого изучает физика, имеет место и в таком довольно простом явлении, как диффузия, и в таком сложном биологическом процессе, как передача раздражения в нервной ткани.

4. Физика является *основой всего современного естествознания*, ибо устанавливает самые общие законы природы, законы, которые лежат в основе конкретных естественных наук.

Физика вооружает естественные науки все более тонкими и совершенными методами научного исследования.

Не следует преуменьшает и обратное влияние других естественных наук на развитие физики. Несомненно, что в своём развитии физика использует достижения смежных ей наук о природе.

5. Исключительно велика роль физики в развитии *техники.* Самим своим существованием и непрерывным прогрессом техника обязана, прежде всего, физике. Не будет преувеличением, сказать, что *техника – это прикладная физика*, поскольку все её важнейшие отрасли возникли на основе тех или иных открытий физики. Так, открытие закона электромагнитных волн положило начало развитию радиотехники и т.д.

В свою очередь, техника, развиваясь и совершенствуясь, выдвигает перед физикой такие проблемы, решение которых требует более глубокого проникновения в природу различных физических явлений. Так, развитие авиации и ракетной техники *потребовало решения проблемы «звукового барьера», сверхпрочных и жаростойких материалов, дальней радиосвязи и т.д.*

6. Знать физику будущим инженерам необходимо потому, что физика, как никакая другая наука, помогает *выработке правильного диалектико-материалистического миропонимания* и способствует осознанному *овладению общеинженерными и специальными знаниями.*

7. Изучение физики важно еще в одном отношении: она даёт яркие примеры того, что единственным методом научного познания законов природы является *диалектический метод*, суть которого заключена в формулировке: «От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике». Достаточно проследить за историей открытия какого-либо закона или созданием какой-либо физической теории, чтобы *убедиться в ее справедливости.*

2 ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Прежде чем начать систематическое изложение основ физики, необходимо сделать несколько общих замечаний и затронуть ряд методических вопросов. Эти замечания связаны с некоторыми особенностями курса физики, трудностями, которые встречаются на пути самостоятельно изучающих этот предмет, характерными ошибками, допускаемыми студентами на зачётах, экзаменах и т.д.

2. Особое внимание при изучении курса физики следует обратить внимание на *четкость и строгость определений* физических величин.

Что значит дать определение той или иной величины, что значит раскрыть её так называемый физический смысл? Из каких элементов должно складываться определение?

Физика – наука «*точная»*. Она имеет дело с понятиями и величинами, которые в подавляющем большинстве случаев доступны *количественному измерению*. Указание на *метод* измерения, как правило, содержится в определении («величина, численно равная….», «величина измеряемая…» и т.д.).

Следует, однако, помнить, что это лишь одна из двух сторон физического содержания определяемой величины, а именно – количественная, математическая сторона. Любая физическая величина, кроме количественного содержания, имеет вполне определённое *качественное содержание.* Качественное содержание выражает существо физической величины, оно характеризует вполне определённое *свойство* или *качество* материального объекта, вполне определённый *процесс изменений*, протекающий в пространстве и времени, вполне определённую *связь* между явлениями, процессами, величинами и т.д.

Например, напряжённость электрического поля характеризует *свойство* поля оказывать силовое воздействие на вносимые в него заряженные тела или частицы; скорость механического движения - *процесс* изменения пространственного положения тел, электроёмкость проводника – *связь* между изменением заряда проводника и изменением его потенциала и т.д.

К сожалению, о качественной стороне определяемых величин часто забывают и ограничиваются чисто математическим, количественным толкованием.

Сталкиваясь с новой физической величиной, надо, прежде всего, понять, каково её качественное содержание, и только после этого определять её количественно. *Единство качественной и количественной сторон* – вот что должно представлять собой определение.

В качестве примера приведём определение напряжённости электрического поля.

Напряжённость электрического поля – векторная физическая величина, *характеризующая* силовое воздействие поля на вносимые в него электрические заряда *и численно равна силе*, с которой поле действует на единичный точечный заряд, помещённый в данную точку. Направление вектора напряжённости совпадает с направлением силы, действующей на *положительный* пробный заряд:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_+}.$$

3. Явления и процессы, протекающие в природе, закономерно связанны друг с другом, т. е., подчиняются вполне определённым количественным законам. Между отдельными законами существует *логическая связь*. Это значит, что, зная одни законы, можно «вывести», «предсказать», другие законы. По своему логическому построению некоторые разделы физики напоминают математику, например, геометрию.

Так же, как в основании геометрии кладется ряд постулатов и на их основе строится доказательство других теорем, в основу той или иной физической теории кладутся некоторые не противоречащие опыту фундаментальные идеи и законы (в физике их часто называют началами или аксиомами) и из них «выводятся» другие законы и следствия.

В основе механики, например, лежат три закона Ньютона. Опираясь на эти законы, можно вывести и доказать математически такие законы, как законы сохранения механической энергии, импульса, момента импульса, получить формулу пути, скорости и т.д. Такое построение механики вовсе не означает, что законы Ньютона играют главнейшую роль, а законы сохранения второстепенную, подчинённую, что они менее самостоятельны. В принципе, механику можно было бы построить по иной логической схеме: «постулировать», опираясь на опыт, законы сохранения и из них получить законы Ньютона и все другие соотношения. Изучая ту или иную теорию, надо, прежде всего, понять, *какие фундаментальные законы положены в её основу*, понять её внутреннюю логику, тогда легче будет запомнить, а главное *осознать* выводы и доказательства тех следствий, которые вытекают из этих основных законов.

Следует иметь в виду, что число действительно основных, фундаментальных законов природы (по крайней мере, известных в настоящее время) сравнительно невелико, и они выражаются с математической точки зрения, как правило, просто. Гораздо более обширны и требуют более сложного математического аппарата *частные проявления* основных законов.

Естественно полагать, что усвоению основных законов физики будет уделено достаточно времени и внимания.

4. При изучении физики имеют дело с двумя категориями физических величин – скалярными и векторными.

Скалярные величины – это величины, которые с количественной точки зрения определяются только *численным значением*. Таковыми являются, например, длина, масса, время, работа, энергия, температура, электрический заряд, потенциал, электродвижущая сила и т.д.

Действия над скалярными величинами производится по *правилам алгебры*. Анализируя физическое содержание той или иной скалярной величины, особое внимание следует обратить на то, что означает её отрицательное значение (например, отрицательная энергия, отрицательная работа, отрицательный потенциал и т.д.).

Векторные величины характеризуются не только *численными* значениями, но и *направлением* в пространстве. Примером векторных физических величин могут служить: перемещение, скорость, ускорение, сила, импульс, напряжённость электрического поля, плотность тока и т.д. Действия над векторными величинами производятся по правилам *векторной алгебры*. Особое внимание следует обратить на умение определять направление векторных величин, особенно в случаях, когда данная величина является комбинацией нескольких других векторных величин. Здесь иногда полезно знать и применять различные мнемонические правила (правила буравчика, правила левой руки, правило правой руки и т.д.).

Записывая математическое выражение того или иного закона, следует чётко представлять, является ли эта запись векторной или скалярной. Отсутствие знаков вектора в векторном уравнении – грубая физическая ошибка. Не менее важно умение перейти от векторной записи уравнения к скалярной, умение найти численной значение векторной величины.

5. Физика пользуется довольно сложным математическим аппаратом, в частности, она широко использует дифференциальное и инте-

гральное исчисления. Часто один и тот же закон выражается в двух математических формах – дифференциальной и интегральной (например, закон Ома, Джоуля – Ленца, уравнения Максвелла и т.д.). С чем это связано?

В чём отличие дифференциальной формы записи от интегральной? В каких случаях мы вынуждены прибегать к дифференцированию, и в каких к интегрированию?

Интегральная формула связывает физические величины, относящиеся, вообще говоря, *к разным точкам пространства,* описывает процесс изменений, протекающий в *конечном объеме* в течение *конечного промежутка времени.* К интегрированию мы вынуждены прибегать в случаях, когда рассматриваемая физическая величина распределена в пространстве неравномерно или изменяется с течением времени.

Дифференциальный закон связывает величины, относящиеся к бесконечно малому объёму, т.е. практически к *одной и той же точке* пространства, описывает процесс, протекающий в течение *бесконечно малого промежутка времени*.

Математическим признаком дифференциальной формы записи является наличие дифференциалов или производных в уравнениях. Переход от дифференциальной формы к интегральной осуществляется интегрированием, переход от интегральной формы к дифференциальной – дифференцированием. Приведем примеры интегральных и дифференциальных формул.

Хорошо известные из элементарного курса физики формулы законов Ома ($I = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}$), Джоуля - Ленца ($Q = I^2Rt$) – интегральные формулы. Первая связывает потенциалы концов участка цепи с током, протыкающим через любое сечение этого участка. Вторая формула определяет количество теплоты, выделившееся в проводнике конечных размеров *за конечный промежуток времени t*. Дифференциальная форма закона Ома имеет вид:

$j = \dfrac{1}{\rho}E$, где $j = \dfrac{dI}{dS}$ - плотность тока (ток, протекающий через единицу площади поперечного сечения), ρ - удельное сопротивление; E – напряжённость электрического поля в проводнике. Плотность тока j и напряжённость поля E относятся *к одной и той же точке проводника.*

6. Используя аппарат высшей математики, физика вкладывает несколько иной смысл в некоторые её понятия. Так, широко использue-

мый в физике термин «физически бесконечно малая величина» не следует понимать в буквальном, математическом смысле.
Что такое, к примеру, физически бесконечно малый объём?

Физически бесконечно малым называют такой объём *dV,* который, с одной стороны, столь *велик*, что содержит *достаточное* для того или иного усреднения количества молекул (только в том случае к объёму *dV* можно применить такие понятия, как температура, давление, плотность). С другой стороны, этот объём настолько *мал*, что любая из усреднённых величин в его пределах остаётся практически неизменной.

7. Особую роль в науке вообще и в физике в частности играют так называемые *абстракции, «модели».*

Реальные свойства материальных объектов настолько сложны, закономерные и случайные связи между различными процессами и явлениями столь многообразны, что учёт всех свойств, всех связей при анализе изучаемого явления оказывается невозможным.

Поэтому, анализируя то или иное физическое явление, необходимо, прежде всего, выделить в нём *главное, существенные связи* и закономерности, и отбросить все второстепенные, несущественные.

Мысленная операция, в ходе которой главное, определяющее отделяется от всего второстепенного, называется *абстрагированием*, а построенное в результате этой операции некая условная идеализированная схема явления или объекта – *абстракцией или «моделью».*

Материальная точка, абсолютно твёрдое тело, инерциальное система отчёта, инерциальное движение, идеальный газ, равновесный процесс, точечный заряд, элемент тока и т.д. – вот далеко не полный перечень абстракций, с которыми нам предстоит иметь дело.

Правильно построенная, научная абстракция всегда отражает некоторые черты реальной действительности и, следовательно, содержит в себе элементы объективной истины.

Однако всегда следует помнить, что реальный объект и построенная на его основе абстракция – не одно и тоже. *Реальный объект* – неизмеримо *сложнее*. Потому любая абстракция имеет ограниченный характер и пригодна лишь для грубого, приближённого описания ограниченного круга явлений. Отсюда следует, что и те закономерности, которые получены на основе соответствующих схем, «моделей» и упрощенных предложений, также имеют приближённый и ограниченный характер.

Можно сказать, что известные нам законы физики, выражают лишь наше *знание* о законах природы. Всегда имеется принципиальная возможность уточнения, обобщения и даже коренной ломки того или иного закона (исключения составляют фундаментальные *законы сохра-*

нения материя и движения – законы сохранения энергии, импульса, заряда и т.д.).

8. Изучая ту или иную теорию, следует обращать внимание на её *характер, на подход* к рассматриваемым явлениям.

Если теория не учитывает реальной микроструктуры изучаемого материального объекта, она называется *макроскопической или феноменологической.* Таковыми являются, например, термодинамика, макроскопическая электродинамика. В термодинамике даже не упоминается о том, что вещество дискретно, состоит из молекул и атомов; в электростатике не учитывается атомистичность электрического заряда.

Если же выводы теории строятся на основе учёта конкретной структуры изучаемого объекта, тех микропроцессов, которые определяют макроскопические свойства этого объекта, то теория называется *структурной или микроскопической*. Именно такими теориями являются молекулярно-кинетическая теория и электронная теория металлов.

Подходя к рассмотрению одних и тех же явлений с различных точек зрения, феноменологическая и структурная теории взаимно дополняют друг друга, образуя, по сути, единое целое.

9. И, в заключение, *о роли закона сохранения и превращения энергии.* Этот всеобщий закон природы красной нитью проходит буквально через все разделы физики. «Энергетический» подход к явлениям, «энергетический» метод “доказательства” формул и уравнений оказываются весьма плодотворными.

Целый ряд физических законов (первое начало термодинамики, закон Ома, Джоуля - Ленца, правила Кирхгофа, закон электромагнитной индукции) являются, по сути, частными проявлениями этого универсального закона. Поэтому понятие энергии и закон сохранения и превращения её должны быть положены в самую основу физических знаний.

КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

3 МЕХАНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

1. Предметом механики является изучение закономерностей простейшей формы движения материи – *механического движения.*

Механическим движением называется процесс изменения взаимного расположения тел или их частей в пространстве с течением времени.

В определении отражен тот факт, что механическое движение (перемещение), как и всякое другое движение, происходит в *пространстве и времени.*

Пространство и время – сложные философские категории, несмотря на их кажущуюся очевидность, основанную на нашем житейском опыте. Эти понятия в ходе развития физики и философии претерпели весьма существенные изменения.

И.Ньютон, создавая свою механику, постулировал, что пространство и время имеют *абсолютный характер*. Что это значит? Это значит, что пространство и время существует *независимо* от материи и движения.

Пространство, по Ньютону, - протяженное, неподвижное, пустое вместилище материальных тел. Оно *однородно* (в нём нет привилегированных точек, все его точки равноправны), *изотропно* (в нём нет привилегированных направлений, все его направления равноправны) и *эвклидово* (его геометрия описывается геометрией Эвклида).

Время, по Ньютону, - *абсолютная длительность*, не зависящая от тел. Оно также *однородно* (в нем нельзя найти мгновение, которое отличалось бы от других) и всюду во Вселенной течет равномерно и одинаково.

Механика, постулирующая абсолютный характер пространства и времени, называется ньютоновской или *классической.*

Успехи классической механики в 17-19 в.в. были столь поразительны, что, по словам немецкого физика М.Лауэ, она стала «наукой, стоящей над опытом», т.е. наукой, положения которой не нуждаются в опытной проверке.

В начале 20 века некоторые представления классической механики подверглись кардинальному пересмотру. Этот пересмотр привел к созданию одной из величайших научных теорий нашего времени – *теории относительности.*

Основные идеи теории относительности, созданной А.Эйнштейном, сводятся к тому, что *пространство и время неотделимы от материи и ее движения и имеют относительный*, а не абсолютный *характер*, что свойства пространства и времени зависят от конкретных материальных тел, от характера и интенсивности их движений. Теория относительности установила, что классическая механика с ее представлениями об абсолютном пространстве и едином времени имеет *ограниченный,* приближенный характер. Она с достаточной степенью точности описывает лишь *медленные* (по сравнению со скоростью света) движения макроскопических тел и совершенно непригодна для описания быстрых движений и движений микрообъектов.

Быстрые *движения макроскопических тел* описывает так называемая релятивистская механика или *специальная (частная) теория относительности.* Движения микрочастиц рассматривает механика, называемая *квантовой.*

Необходимо отметить, что ни теория относительности, ни квантовая механика не отвергают полностью классическую механику, *они развивают ее дальше* на принципиально новой основе, обобщая на случай сколь угодно *больших скоростей* и сколь угодно *малых масс*.

В пределе уравнения релятивистской и квантовой механики (в первом случае при $\upsilon << C$, *C* – скорость света в вакууме, во втором при $m >> m_0$, m_0 - масса электрона) переходят в уравнения классической механики.

Следовательно, современная физика рассматривает механику Ньютона как частный, предельный случай релятивистской механики, с одной стороны, и квантовой – с другой.

2. Понятие «механического движения» неприменимо к одному, отдельному телу. О движении данного тела имеет смысл говорить лишь тогда, когда есть возможность определить его *положение* относительно другого тела или других тел. Поэтому, приступая к изучению движения какого – либо тела, мы должны сначала установить, по отношению к какому телу будем рассматривать движение. Из соображений удобства это тело условно считается *«неподвижным».*

Тело, которое условно считается неподвижным, по отношению к которому определяется положение других тел, называется *телом отсчёта или системой отсчёта.*

3. Механическое движение можно рассматривать с разных точек зрения. Во-первых, с *геометрической,* т.е. изучать *внешнюю* сторону различных видов движения, не вникая в те взаимодействия и причины, которые обусловливают тот или иной вид движения. Во-вторых, с *причинно-следственной*, т.е. изучать движение с точки зрения тех взаимодействий, которые обусловливают данное движение или изменяют его.

Разделы механики, изучающие движение с указанных точек зрения, называются соответственно *кинематикой и динамикой*. Особо рассматриваются условия равновесия *(статика).*

4. В рамках *кинематики* выбор системы отсчёта ничем не ограничен, *все системы равноправны* и любая из них может использоваться при описании движения.

С точки зрения *динамики* некоторые системы отсчёта имеют преимущество перед другими. Вопрос о том, какими должны быть эти преимущественные системы, будет рассмотрен позднее.

5. Основными объектами механики является *материальная точка и абсолютно твёрдое тело.*

Материальная точка – это тело, формой и размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

Вопрос о том, можно ли данное тело считать материальной точкой, определяется не абсолютными размерами этого тела, а *условиями задачи, масштабами движения.* Одно и тоже тело в разных задачах может рассматриваться и как материальная точка, и как протяженное тело. Например, при определении траектории полёта искусственного спутника Земли его с успехом можно принимать за материальную точку, но при расчёте затрат энергии на преодоления сопротивления атмосферы при выведении спутника на орбиту его следует считать телом, имеющим определённую форму, размеры и т.д.

Абсолютно твёрдое тело это тело, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь. В таком теле расстояния между отдельными точками остаются неизменными.

Изучение законов механического движения естественно начать с движения материальной точки. Движение такого объекта – простейшее движение, ибо в этом случае не приходится учитывать вращение тела и смещение отдельных его частей.

6. Что значит знать движение материальной точки? Это значит знать её *положение в пространстве в любой момент времени.*

Для определения положения точки в пространстве и аналитического описание её движения с выбранным телом отсчёта необходимо связать какую-либо *координатную систему.* Выберем прямоугольную (декартову) систему координат. Тогда положение материальной точки M будет однозначно определено, если будут заданы координаты x, y, z (рис.1).

Число независимых координат, которые необходимо задать, чтобы однозначно определить положение материального объекта (точки, системы точек, тела и т.д.) в пространстве, называется числом степеней свободы.

Так как для определения положения материальной точки необходимо задать *три координаты*, то говорят, что материальная точка имеет *три степени* свободы.

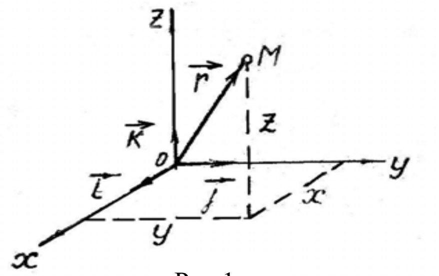

Рис.1

Вместо трёх скалярных величин x, y, z положение точки может быть задано одной векторной – радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным из начала координат в точку, в которой находится частица (рис.1). Координаты x, y, z являются проекциями радиус-вектора на координатные оси:

$$x = r_x, y = r_y, z = r_z. \qquad (3.1)$$

Радиус-вектор связан со своими проекциями следующим соотношением:

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \qquad (3.2)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы вдоль координатных осей *x,y,z.*
Модуль вектора (его абсолютная величина):

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (3.3)$$

4 ЛИНЕЙНЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1. Если материальная точка *движется,* то это означает, что ее положение относительно выбранной системы отсчёта, т.е. ее координаты с течением времени *изменяются*. Найти *кинематический закон* движения точки – значит найти конкретный вид функции, выражающей зависимость координаты от времени:

$$x=f_1(t);\ y=f_2(t);\ z=f_3(t). \qquad (4.1)$$

Если из этих уравнений исключить время, то мы получим уравнение *траектории движения*.

2. *Траекторией движения* материальной точки называется *линия*, которую эта точка описывает при своем движении. В зависимости от формы траектории различают движения *прямолинейные и криволинейные* (частным случаем криволинейного движения является движение по окружности).

Форма траектории зависит от *системы отсчёта*, относительно которой рассматривается движение.

3. Пусть материальная точка в данной системе отсчёта двигалась по некоторой криволинейной траектории (рис. 2).

В момент времени t_1 она занимала положение *A*, определяемое радиус-вектора $\vec{r}_1$, в момент времени t_2 - положение *B* , определяемое радиус-вектора $\vec{r}_2$.

Вектор $\Delta\vec{r}$*, проведенный из начальной точки A в конечную B, называется линейным перемещением за время* $\Delta t = t_2 - t_1$.

Легко видно из чертежа, что перемещение $\Delta\vec{r}$ есть приращение радиус-вектора точки за время Δt: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Отрезок траектории ΔS, заключенный между точками *A* и *B*, называется путем, пройденным за тот же промежуток времени Δt (путь часто обозначается просто буквой *S*).

Численные значения $\Delta\vec{r}$ и ΔS в случае прямолинейного движения совпадают, в случае же криволинейного движения они совпадают только в пределе, т.е. для бесконечно малого перемещения:

$$|d\vec{r}| = dS.$$

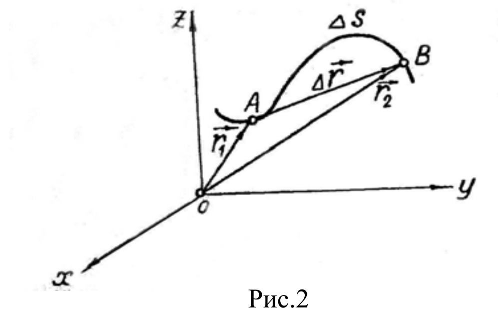

Рис.2

4. Одно и то же перемещение $\Delta\vec{r}$ две материальные точки могут совершить за различные промежутки времени.

Для характеристики *быстроты* изменения пространственного положения движущихся тел вводится понятие *линейной скорости.*

Линейная скорость $\vec{\upsilon}$ – это векторная физическая величина, характеризующая *процесс изменения пространственного положения* движущейся точки относительно выбранной системы отсчёта, численно равная линейному перемещению, совершенному *за единицу времени*, и совпадающая по направлению с направлением этого перемещения.

Следует в общем случае различать *среднюю и истинную* или мгновенную скорости.

Пусть материальная точка, двигаясь по произвольной траектории, за некоторый промежуток переместилась на $\Delta\vec{r}$ (рис.3). Чтобы рассчитать, какое в среднем перемещение совершает точка за единицу

времени, надо $\Delta\vec{r}$ разделить на Δt : $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Эта величина называется

средней скоростью за время Δt :
$$\overrightarrow{\upsilon_{cp}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (4.2)$$

Направление вектора средней скорости *совпадает* с направлением перемещения $\Delta\vec{r}$. Если промежуток времени Δt уменьшается, то точка *B* будет приближаться к точке *A*, а секущая *AB* будет все меньше отличаться от дуги *AB*. В конце концов, точки *A* и *B* сольются, при этом направление $d\vec{r}$ будет совпадать с направлением касательной. При $\Delta t \to 0$ отношение $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ стремится к вполне определенному пределу. Вектор $\vec{\upsilon}$, численно равный пределу отношения $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ и направленный по касательной к траектории в соответствующей точки, называется *истинной* или *мгновенной скоростью*:

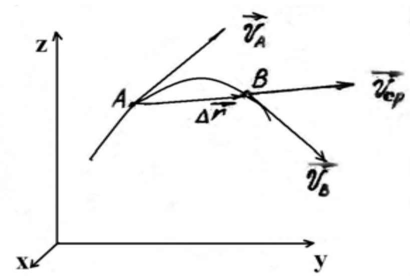

Рис.3

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{4.3}$$

Но $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ есть производная от $\vec{r}$ по *t*: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Следовательно, мгновенная скорость равна производной от радиус-вектора движущейся точки по времени:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{4.4}$$

Численное значение (модуль) мгновенной скорости:

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt}$$

5. Поскольку проекциями радиус-вектора $\vec{r}$ на оси координат являются координаты *x, y, z*, то легко найти и проекции скорости на координатные оси. 0ни будут равны производным от *x, y, z* по времени

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \qquad (4.5)$$

Модуль мгновенной скорости равен

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}. \qquad (4.6)$$

Зная проекции вектора скорости на оси координат, можно найти и сам вектор $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k}. \qquad (4.7)$$

6. Радиус-вектор $\vec{r}$, определяющий положение материальной точки относительно выбранной системы отсчета, и скорость $\vec{\upsilon}$, определяющая изменение ее пространственного *положения,* являются основными величинами, характеризующими состояние движения материальной точки. Поэтому эти две векторные величины (или, соответственно, шесть скалярных – *x, y, z* и υ_x, υ_y, υ_z) называются *параметрами механического состояния* .

7. В процессе движения величина и направление скорости могут изменяться. Быстроту изменения линейной скорости с течением времени характеризует *линейное ускорение*.

Линейное ускорение - векторная физическая величина, характеризующая *процесс изменения линейной скорости* с течением времени, численно равная *изменению скорости за единицу времени* и совпадающая по направлению с направлением этого изменения.

По аналогии со средней и мгновенной скоростью введем *среднее и мгновенное* ускорения.

Пусть в некоторый момент времени t_1 , точка двигалась со скоростью $\vec{\upsilon_1}$, а в момент t_2 - со скоростью $\vec{\upsilon_2}$. Изменение скорости за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ очевидно, равно $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon_2} - \vec{\upsilon_1}$.

На чертеже векторную разность найдем следующим образом. Перенесем вектор $\vec{\upsilon_2}$ параллельно самому себе так, чтобы его начало совместилось с началом вектора $\vec{\upsilon_1}$ (рис. 4). Вектор $\Delta\vec{\upsilon}$, соединяющий конец $\vec{\upsilon_1}$ с концом $\vec{\upsilon_2}$ и будет представлять собой изменение (или приращение) скорости за время Δt .

Разделив $\Delta\vec{\upsilon}$ на промежуток времени Δt, в течение которого это изменение произошло, мы найдем среднее ускорение за этот промежуток:

$$\overrightarrow{a_{cp}} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}. \qquad (4.8)$$

Направление вектора $\overrightarrow{a_{cp}}$, как это видно из формулы (4.8), совпадает с направлением вектора $\Delta\vec{\upsilon}$ (рис. 4). При $\Delta t \to 0$ отношение $\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$ стремится к вполне определенному пределу $\vec{a}$, называемому *истинным* или *мгновенным* ускорением (ускорением в данный момент времени):

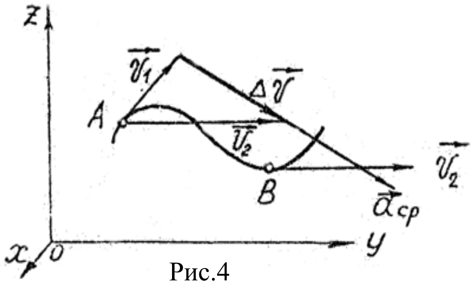

Рис.4

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} \qquad (4.9)$$

Используя обозначение производной, выражение (4.9) можно переписать:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}, \qquad (4.10)$$

т.е. ускорение в любой момент времени определяется производной от скорости по времени.

Направление мгновенного ускорения совпадает с направлением приращения скорости $d\vec{\upsilon}$ за бесконечно малый промежуток времени и в зависимости от характера изменения величины и направления скорости может составлять с вектором скорости *любой угол.* Этот угол будет острым, если величина скорости *возрастает* (в частности, он может быть равен *нулю,* если скорость, возрастает по величине, но не меняется по направлению). Если величина скорости уменьшается, (*замедленное движение*), то этот угол будет *тупым* (в случае, если скорость уменьшается по величине, оставаясь *неизменной* по направлению, он равен π). Наконец, если скорость изменяется только по направлению, вектор ускорения в любой точке траектории *перпендикулярен* к ней (траектория в этом случае - окружность).

Так как $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, то $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, (4.11)

т.е. ускорение равно второй производной от радиус-вектора $\vec{r}$ по времени.

8. Проекции вектора ускорения выражаются производными от соответствующих компонент скорости по времени:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \dot{\upsilon}_x; a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \dot{\upsilon}_y; a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \dot{\upsilon}_z. \tag{4.12}$$

Принимая во внимание, что

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \upsilon_z = \frac{dz}{dt},$$

получим: $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; a_z = \dfrac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$, (4.13)

т.е. проекции вектора ускорения на координатные оси выражаются вторыми производными от соответствующих координат по времени.

Модуль ускорения равен $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. (4.14)

Сам вектор $\vec{a}$ равен $\vec{a} = \sqrt{a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}}$. (4.15)

9. Вектор ускорения характеризует изменение *величины и направления* скорости. Эти изменения можно оценивать раздельно.
Разложим вектор приращения скорости на две составляющие следующим образом. Из точки A (рис.5), в которой совмещены начала векторов $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ вдоль линии вектора $\vec{\upsilon}_2$ отложим отрезок AC, равный численному значению вектора $\vec{\upsilon}_1$ Тогда, как видно из чертежа, вектор $\Delta\vec{\upsilon}$ можно представить как геометрическую сумму двух векторов - $\Delta\vec{\upsilon}_\tau$ и $\Delta\vec{\upsilon}_n$:

$$\Delta\vec{\upsilon} = \Delta\vec{\upsilon}_\tau + \Delta\vec{\upsilon}_n \tag{4.16}$$

Вектор $\Delta\vec{\upsilon}_\tau$ характеризует изменение скорости за время Δt по величине, $\Delta\vec{\upsilon}_n$ – по направлению.

Обозначим углы, которые образуют линии векторов $\Delta\vec{\upsilon}_\tau$ и $\Delta\vec{\upsilon}_n$ с линией вектора скорости в точке A (т.е. с направлением касательной к траектории в этой точке), соответственно $\Delta\varphi$ и α.

Разделим обе части выражения (4.16) на Δt и перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}_\tau}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}_n}{\Delta t} \tag{4.17}$$

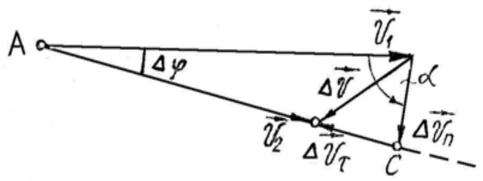

Рис.5

В пределе, т.е. при $\Delta t\to 0$, угол $\Delta\varphi$ стремится к нулю, а угол α – к $\pi/2$. Следовательно, в пределе составляющая приращения скорости $\Delta\vec{\upsilon}_\tau$ займет положение касательной, а $\Delta\vec{\upsilon}_n$ - направление, *перпендикулярное касательной.*

Предел отношения $\dfrac{\Delta\vec{\upsilon}_\tau}{\Delta t}$ при $\Delta t\to 0$ называется касательным или тангенциальным ускорением $\vec{a}_\tau$:

$$\vec{a}_\tau=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}_\tau}{\Delta t}=\frac{d\vec{\upsilon}_\tau}{dt}. \tag{4.18}$$

Предел отношения $\dfrac{\Delta\vec{\upsilon}_n}{\Delta t}$ при $\Delta t\to 0$ называется нормальным или центростремительным ускорением $\vec{a}_n$: $\vec{a}_n=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{\upsilon}_n}{\Delta t}=\dfrac{d\vec{\upsilon}_n}{dt}$. (4.19)

Можно показать, что численное значение тангенциального ускорения равно производной от величины скорости по времени, а численное значение нормального ускорения прямо пропорционально квадрату скорости и обратно пропорционально радиусу кривизны траектории в данной точке:

$$a_\tau=\frac{d\upsilon}{dt},a_n=\frac{\upsilon^2}{R} \tag{4.20}$$

Таким образом, *тангенциальное ускорение* $\vec{a}_\tau$ – вектор, характеризующий изменение скорости *по величине*, направленный по касательной к траектории и численно равный $\dfrac{d\upsilon}{dt}$.

Нормальное ускорение $\vec{a}_n$ - вектор, характеризующий изменение скорости *по направлению*, направленный по радиусу к центру кривизны траектории и численно равный $\dfrac{\upsilon^2}{R}$.

Предел отношения $\dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ есть *полное ускорение* $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}. \qquad (4.21)$$

Таким образом, тангенциальное и нормальное ускорения представляют собой две взаимно перпендикулярные составляющие полного ускорения:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \qquad (4.22)$$

Так как $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ взаимно перпендикулярны, то численное значение полного ускорения равно:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{R}\right)^2}\,. \qquad (4.23)$$

10. Проанализируем некоторые частные случаи движения.

а) $a_\tau=0;\ a_n=0$ - равномерное прямолинейное движение;

б) $a_\tau=const;\ a_n=0$ - равнопеременное (равнозамедленное или равноускоренное) прямолинейное движение;

в) $a_\tau=0;\ a_n=const$ - равномерное движение по окружности;

г) $a_\tau=0;\ a_n=f(t)$ - равномерное криволинейное движение;

д) $a_\tau=f(t);\ a_n=f(t)$ - неравномерное криволинейное движение.

11. В заключение отметим, что поскольку нормальное ускорение всегда направлено к центру кривизны, а тангенциальное - по касательной к траектории, то полное ускорение всегда обращено внутрь траектории (рис .6)

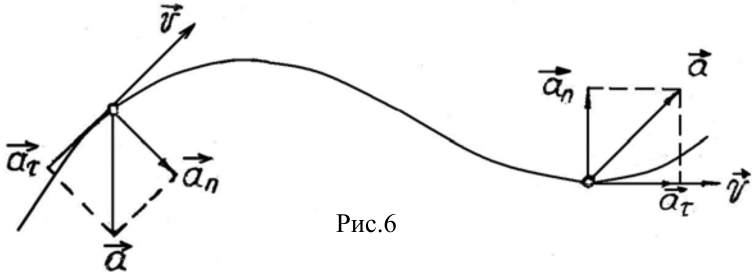

Рис.6

5 ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА КИНЕМАТИКИ

1. Основная задача кинематики – нахождение *положения* движущейся точки, ее *скорости* и *ускорения* в любой интересующий момент времени.

Пусть известен вид функций, выражающих зависимость координат движущейся точки от времени:

$$x=f_1\,(t);\ y=f_2(t);\ z=f_3\,(t) \qquad (5.1)$$

Чтобы найти положение точки в некоторый момент $t = t_1$, достаточно это время подставить в (5.1). Исключив из (5.1) время, находят *траекторию* движения.

Чтобы найти зависимость от времени *компонент скорости* надо продифференцировать по времени функции (5.1). Зная компоненты υ_x, υ_y, υ_z, легко определить величину и направление самой скорости.

Двукратным дифференцированием функций (5.1) мы получим зависимость от времени компонент ускорения.

2. Возможна обратная задача: по функциям, выражающим зависимость компонент ускорения от времени, можно найти величину и направление скорости, а также координаты точки в заданный момент времени. Эта задача решается обратной операцией - интегрированием: однократное интегрирование дает зависимость от времени компонент скорости, двукратное - зависимость от времени координат. При этом в формулах появляются постоянные интегрирования. Эти постоянные определяются из так называемых начальных условий.

Начальные условия - это параметры механического состояния в некоторый определенней момент времени (обычно этот момент относят к началу отсчета времени $t = 0$, отсюда и название – начальные условия). Начальные условия должны быть заданы дополнительно, в противном случае задача становится неопределенной.

3. Основная задача кинематики может быть решена *графически.*

Пусть даны графики зависимости координат от времени. Проанализируем один из них, изображенный на рис.7. Из приведенного графика легко определить проекции средней и истинной скорости на ось *OX.* Проекция средней скорости за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равна

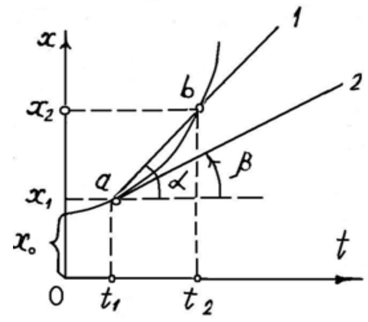

Рис.7

$$\left(\upsilon_{cp}\right)_x = \frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Геометрически $\Delta x / \Delta t$ есть тангенс угла наклона *секущей* (1), проведенной через точки a и b . Следовательно, $\left(\upsilon_{cp}\right)_x = tg\alpha.$ (5.2)

Обратим внимание на то, что при нахождении угла наклона секущей отрезки Δx и Δt следует измерять не в абсолютных единицах длины, а в тех масштабных единицах, которые выбраны вдоль осей x и t.

Проекция истинной скорости на ось *OX* в момент времени t численно равна тангенсу угла наклона касательной (2), проведенной к графику в точке a:
$$\upsilon_x = dx/dt = tg\beta \qquad (5.3)$$

4. Определив несколько значений υ_x (достаточных для построения графика), можно построить график $\upsilon_x = f(t)$.

Тангенсы углов наклона секущей и касательной на этом графике определят проекции среднего и истинного ускорений на ось *OX,* т.е. $(a_{cp})_x$ и a_x.

5. Графически можно решать и *интегральные* задачи. Так, например, по графику ускорения можно найти изменения скорости за данный промежуток времени, по графику скорости – изменение координаты

(т.е. расстояние, пройденное вдоль соответствующей оси). Рисунки 8 и 9 поясняют это.

Узкая полоска на рис. 8 изображает элементарное изменение (приращения) компоненты скорости υ_x за бесконечно малый проме-

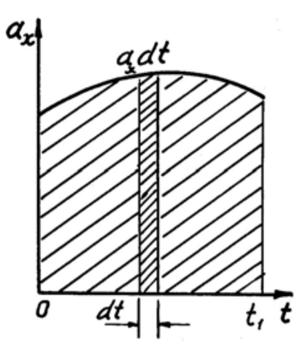

Рис.8

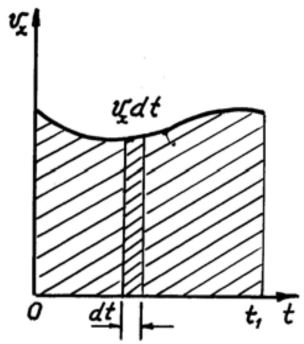

Рис.9

жуток времени dt:

$$d\,\upsilon_x = a_x dt \tag{5.4}$$

Изменения этого компонента за *конечный* промежуток времени $\Delta t = t_1$ будет численно равно площади криволинейной трапеции, покрытой на чертеже редкой штриховкой:

$$\upsilon_{x1} - \upsilon_{x0} = \int_0^{t_1} a_x dt. \tag{5.5}$$

Совершенно аналогично изменения координаты x за время $\Delta t = t_1$ будет равно площади под кривой $\upsilon_x(t)$ на участке 0 - t_1 (рис.9):

$$x_1 - x_0 = \int_0^{t_1} \upsilon_x dt. \tag{5.6}$$

В заключение отметим, что графическое интегрирование может быть выполнено значительно точнее, чем графическое дифференцирование.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Уравнение движения точки по прямой имеет вид: $x = 4 + 2t + t^2 + 0{,}2t^3$.

Найти: 1) положения точки в моменты времени $t_1 = 2c$ и $t_2 = 5c$; 2) среднюю скорость за время, протекшее между этими моментами; 3) мгновенные скорости в указанные моменты времени; 4) среднее ускорение за указанный промежуток времени; 5) мгновенные ускорения в указанные моменты времени.

Решение. 1) Положение точки определяется значениями расстояния x в указанные моменты времени; для нахождения этих расстояний надо в указанное уравнение движения подставить вместо времени t значения заданных моментов времени

$$x_2 = (4 + 2\cdot 2 + 2^2 + 0{,}2\cdot 2^3) = 13{,}6(м)$$

$$x_5 = (4 + 2\cdot 5 + 5^2 + 0{,}2\cdot 5^3) = 64(м)$$

2) Значение средней скорости по определению

$\upsilon_{cp} = \dfrac{\sum \Delta x_i}{\sum \Delta t_i}$ или $\upsilon_{cp} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, где Δx - изменение расстояния x за промежуток времени Δt:

$$\Delta x = x_5 - x_2 = (64 - 13{,}6) = 50{,}4(м),$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = (5 - 2) = 3(c),$$

$$\upsilon_{cp} = \frac{50{,}4}{3} = 16{,}8(м/c)$$

3) Общее выражение для мгновенной скорости по определению имеет вид $\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = 2 + 2t + 0{,}6t^2$

Подставив в это выражение вместо t заданные значения времени, получим $\upsilon_2 = (2 + 2\cdot 2 + 0{,}6\cdot 2^2) = 8{,}4(м/c)$,

$$\upsilon_5 = (2 + 2\cdot 5 + 0{,}6\cdot 5^2) = 27(м/c).$$

4) Значение среднего ускорения определим как

$a_{cp} = \dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$, где $\Delta\upsilon$ - изменение скорости υ за промежуток времени Δt $\quad \Delta\upsilon = \upsilon_5 - \upsilon_2 = (27 - 8{,}4) = 18{,}6(м/c)$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = (5-2) = 3(c)$$

$$a_{cp} = \frac{18{,}6}{3} = 6{,}2(м/c^2).$$

5) Общее выражение для мгновенного ускорения имеет вид

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 2 + 1{,}2t.$$

Подставив в это выражение вместо t его заданные значения, получим

$$a_2 = (2 + 1{,}2 \cdot 2) = 4{,}4(м/c^2),$$

$$a_5 = (2 + 1{,}2 \cdot 5) = 8{,}0(м/c^2).$$

Пример 2. Определить зависимость пути от времени, если ускорение тела пропорционально квадрату скорости и направлено в сторону, противоположную ей.

Решение. Учитывая, что по условию ускорение пропорционально квадрату скорости и противоположно ей, запишем это в виде

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon^2.$$

Произведем разделение переменных $\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = -kdt$ и проинтегрируем.

После интегрирования имеем $\frac{1}{\upsilon} = kt + C$. При $t = 0$ $\upsilon = \upsilon_0$, значит,

$C = \frac{1}{\upsilon_0}$ и $\frac{1}{\upsilon} = kt + \frac{1}{\upsilon_0} = \frac{kt\upsilon_0 + 1}{\upsilon_0}$; Откуда $\upsilon = \frac{\upsilon_0}{kt\upsilon_0 + 1} = \frac{ds}{dt}$.

Выразим ds: $ds = \frac{\upsilon_0}{1 + kt\upsilon_0}dt$, тогда $s = \frac{1}{k}\ln(k\upsilon_0 t + 1) + C_1$. При $t = 0$ $s = s_0$, значит, $C_1 = s_0$. Окончательно будем иметь $s = s_0 + \frac{1}{k}\ln(k\upsilon_0 t + 1)$.

*Пример 3***.** Зависимость пути, пройденного точкой по окружности радиусом $r = 2м$, от времени выражено уравнением $s = at^2 + bt$. Найти скорость, нормальное, тангенциальное и полное ускорение точки через $t = 0{,}5c$ после начала движения, если $a = 3м/c^2$, $b = 1м/c$.

Решение. Прежде всего находим выражение для скорости точки. Известно, что $\upsilon = \dfrac{ds}{dt}$. Взяв производную по времени от заданного уравнения пути s, получим $\upsilon = 2at + b$. Значение скорости в данный момент времени найдем, если в полученную формулу подставим время t и коэффициенты a и b:

$$\upsilon_t = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}5 + 1 = 4(м/с).$$

Теперь найдем общее выражение для тангенциального ускорения. Из теории известно, что $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$. Взяв производную по времени от уравнения скорости, находим $a_\tau = 2a$. С учетом коэффициента a, тангенциальное ускорение $a_\tau = 2 \cdot 3 = 6(м/с^2)$.

Полученное выражение для тангенциального ускорения не содержит времени; это значит, что оно постоянно по величине и движение точки по окружности будет равнопеременным.

Нормальное (центростремительное) ускорение найдем по его формуле $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{r}$, подставив выражение для скорости, а затем, и численные их значения: $a_n = \dfrac{(2at+b)^2}{r}$; $a_n = \dfrac{4^2}{2} = 8(м/с^2)$.

Полное ускорение будет равно геометрической сумме взаимно перпендикулярных тангенциального и нормального ускорений

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\,; \quad a = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = 10(м/с^2).$$

ВОПРОСЫ ДЛИ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение механического движения.
2. Что называется системой отсчета?
3. Что называется материальной точкой?
4. Как задается положение материальной точки в пространстве?
5. Что называется перемещением? путем?
6. Раскройте физический смысл мгновенной скорости и ускорения.
7. Какие изменения скорости характеризуют тангенциальное и нормальное ускорения? Как находят численные значения этих ускорений?
8. Может ли точка, движущаяся по криволинейной траектории, не иметь тангенциального ускорения? Может ли эта точка не иметь нормального ускорения?

9. Как по графику $x = f(t)$ найти составляющую скорости υ_x в заданный момент времени? Как по графику $\upsilon_x = f(t)$ найти изменения координаты X за время Δt ?

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Кинематика изучает лишь пространственно-временные соотношения. В ее уравнениях отсутствуют величины, характеризующие *свойства* материальных тел, например, масса и их *взаимодействие* друг с другом, например, сила, импульс силы и др.

Зависимость характера движения от свойств тел и от их взаимодействия друг с другом устанавливает *динамика.*

Изучение динамики начнем с динамики материальной точки.

6 ПОНЯТИЕ СИЛЫ

Рассмотрим физическое содержание одного из важнейших механических понятий - понятия *силы.*

1. Опыт показывает, что изменение физических свойств материальных объектов происходит только в процессе внешних или внутренних *взаимодействий.*

Одной из форм взаимодействия является *механическое воздействие.*

Механическое воздействие, оказываемое одним телом на другое, проявляется либо в изменении *размеров и формы тела*, либо *в изменении скорости*, либо в том и другом одновременно. Воздействуя, например, на балку, мы вызываем ее изгиб, отталкивая от берега лодку, мы заставляем ее двигаться, изменять скорость и т.д.

Понятие *силы* служит для обозначения *величины и направления механического воздействия* одного тела на другое.

Сила - это векторная физическая величина, характеризующая механическое воздействие одного тела на другое, в результате которого тела деформируются или приобретают ускорения.

2. Как видно из определения, понятие силы в механике значительно уже нашего житейского представления о ней. Мы говорим, например, о мускульном усилии, о «силе» болевого ощущения, о «силе воли» и т.д. Между тем, эти понятия никакого отношения к физическому понятию «сила» не имеют. Заметим, что даже в самой физике есть термины, связанные со словом «сила», но содержание которых не имеет отношения к понятию «сила» (например, электродвижущая сила, сила света, оптическая сила и т.д.)

3. Сила - величина *векторная.* Как и всякая другая векторная величина, сила характеризуется не только *численным значением*, но и *направлением в пространстве* (направлением действия). Кроме того, в большинстве случаев о векторе силы можно говорить как о *связанном* векторе и характеризовать *точкой приложения.*

Если действие силы проявляется только в деформациях, его называют *статическим.*

Если действие силы вызывает изменение скорости, его называют *динамическим.*

Так как и деформации, и ускорения доступны количественному измерению, то любое из этих проявлений может быть использовано для сравнения и измерения сил.

4. Конкретные силы, рассматриваемые физикой, достаточно разнообразны: сила тяжести, вес, реакции опор, силы сухого и вязкого трения, силы упругие, поверхностные, межмолекулярные, реактивная сила и т.д.

Однако по своей природе все они могут быть сведены к одной из так называемых *фундаментальных* сил.

Фундаментальные силы - это силы, характеризующие основные типы взаимодействия между материальными объектами. В настоящее время известны гравитационное, электромагнитное, ядерное или сильное и слабое взаимодействия. Гравитационное взаимодействие характеризуют *гравитационные* силы, электромагнитное - *электромагнитные*, ядерное – *ядерные.* Слабое взаимодействие, имеющее место, например, при β- распаде атомных ядер, не принято характеризовать при помощи понятия силы.

Гравитационные силы действуют *между любыми материальными частицами* и зависят от массы частиц и расстояния между ними.

Электромагнитные силы действуют между *заряженными частицами* и зависят от величины электрического заряда частиц, их взаимного расположения и относительной скорости движения. Электромагнитные силы принято делить на *электрические* (обусловлены положением заряженных частиц) и *магнитные* (обусловлены движением заряженных частиц). Наконец, *ядерные силы* действуют между *нуклонами* - частицами, образующими атомное ядро. Особенностью ядерных сил является их необычайная интенсивность и короткий радиус действия (порядка 10^{-15}м).

Действие одного материального тела на другое, по представлениям современной физики, передается с *конечной* скоростью через посредство особой непрерывной материи, называемой *физическим полем*. В соответствии с типами взаимодействия известны гравитационное, электромагнитное и ядерное поля.

7 ПОНЯТИЕ СВОБОДНОГО ТЕЛА И ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА.

1. Как уже указывалось, в динамике существенную роль играет *выбор системы отсчета.*

Физические явления протекают, вообще говоря, по-разному в разных системах отсчета. Естественно поэтому выбирать такие системы, в которых однотипные явления, например, механические, протекают *одинаково* и выглядят наиболее *просто.*

Чтобы физические явления выглядели наиболее просто, систему отсчета следует связывать с так называемым свободным телом.

Свободное (свободно движущееся) *тело* - это тело, *не взаимодействующее* с другими телами, тело, предоставленное самому себе.

Система отсчета, связанная со свободно движущимся телом, называется инерциальной.

Понятия свободного тела и инерциальной системы отсчета являются абстракциями.

Опыт показывает, что в природе нет таких тел, которые бы так или иначе не взаимодействовали друг с другом, были бы абсолютно свободными. Поэтому, строго говоря, свободных тел, а значит, и инерциальных систем отсчета не существует. Но существует бесчисленное множество реальных систем, которые со сколь угодно большой степенью точности приближаются к инерциальной системе. Например, системы, связанные с определенными звездами, будут весьма близки к инерциальным. В меньшей степени инерциальной будет система, связанная с Землей (эта система не является инерциальной потому, что она испытывает ускорение, обусловленное суточным вращением Земли вокруг своей оси и годичным движением вокруг Солнца). Однако для целого ряда физических экспериментов можно пренебречь неинерциальностью «земной» системы, поскольку вносимые при этом ошибки достаточно малы.

Мысленных инерциальных систем существует бесчисленное множество. Все системы, связанные со свободными телами, инерциальны.

8 ПЕРВЫЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

В основе динамики лежат три закона И. Ньютона (1642-1727), сформулированные им в «Математических началах натуральной философии» (1687 г.). Все три закона сформулированы для *инерциальной системны отсчета.*

1. В первом законе речь идет *о движении свободного тела.*

Физическое содержание первого закона динамики было раскрыто Г. Галилеем (1564 - 1642) задолго до того, как Ньютон дал его формулировку.

До Галилея еще со времен Аристотеля (IV век до н.э.) в физике господствовало убеждение, что равномерное прямолинейное движение поддерживается силой. В «Метафизике» Аристотеля мы читаем: «Движущееся тело останавливается, как только сила, его толкающая, прекращает свое действие».

Телам приписывалось некое *внутреннее стремление останавливаться.*

Галилей был первым, кто решительно отверг эти ошибочные представления. Он пришел к выводу, что в реальных условиях «стремление» тел останавливаться обусловлено не их внутренними свойствами, а вторичными, *внешними* причинами.

Галилей понял, что в реальных условиях сила необходима не для того, чтобы поддерживать равномерное прямолинейное движение, а для того, чтобы *компенсировать* уже имеющееся внешнее воздействие, прежде всего силу трения, которая обычно является основной причиной прекращения движения. Галилей на опыте убедился, что если силу трения постепенно уменьшать (до известных пределов этого можно добиться техническими средствами - обработкой поверхностей скольжения, подбором подходящих материалов, смазкой и т.д.), то движение, т.е. скорость тела, будет изменяться все медленнее и медленнее.

Идя дальше по этому пути уже *мысленно*, абстрагируясь от реальных условий, Галилей пришел к выводу, что в отсутствие внешних воздействий движение тела должно сохраняться неизменным сколь угодно долго, т.е. всякое *свободное тело должно двигаться равномерно и прямолинейно (или покоиться).*

Движение, которое тело совершает в *отсутствие внешнего воздействия*, называется *инерциальным*, а сам принцип инерциального движения - законом инерции.

Инерциальное движение происходит само по себе, оно является неотъемлемым, естественным состоянием любого освобожденного от внешнего воздействия материального тела и вовсе не нуждается в каких-либо внешних «двигателях».

Напротив, *неинерциальное движение* (движение неравномерное, ускоренное) всегда происходит только при *наличии непрерывного* внешнего воздействия. Неинерциальное движение тотчас же переходит в инерциальное, как только исчезает воздействие сил. Это значит, что если в момент прекращения действия сил тело покоилось, то оно и в последующем будет пребывать в этом состоянии, если же тело двигалось, то в дальнейшем оно будет сохранять величину и направление той скорости, какую имело в момент исчезновения сил.

Таким образом, первый закон динамики утверждает, что в инерциальной системе отсчета *всякое свободное тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока внешнее воздействие не заставит его изменить это состояние.*

2. Все, о чем говорилось выше, требует известного напряжения абстрактной мысли. Дело в том, что непосредственно на опыте мы не можем ни доказать, ни опровергнуть первый закон динамики. Инерциальное движение - это идеальный, предельный случай движения.

3. В реальных условиях мы можем практически полностью скомпенсировать внешние воздействия и наблюдать почти равномерное прямолинейное движение. Так, компенсируя силу трения, действующую на поезд, тягой электровоза, мы можем заставить его двигаться практически равномерно и прямолинейно. Значит*, в реальных условиях, тело покоится или движется равномерно и прямолинейно, если векторная сумма всех действующих на него сил равна нулю:*

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots\cdots + \vec{F}_n = 0$$

или кратко

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{Fi} = 0\,. \qquad (8.1)$$

4. Первый закон Ньютона справедлив только *в инерциальной системе отсчета*. Это нетрудно понять.

Представим две системы, движущиеся друг относительно друга с ускорением. Пусть тело, свободное от воздействия, движется относительно одной из систем равномерно и прямолинейно, Так как вторая система движется относительно первой с ускорением, то и тело относительно этой, второй, системы будет двигаться с ускорением.

Чтобы в отсутствии внешнего воздействия тело двигалось равномерно и прямолинейно, необходимо, чтобы *свободной от воздействия была сама система отсчета.* Такую систему мы условились называть *инерциальной.*

Так как первый закон динамики выполняется только в инерциальных системах отсчета, то само определение инерциальной (или неинерциальной) системы можно дать с точки зрения выполнения этого закона.

Инерциальная система отсчета - это система, в которой первый закон Ньютона - закон инерции выполняется абсолютно точно. Иначе говоря, это такая система, относительно которой свободное тело движется равномерно и прямолинейно.

5. Первый закон Ньютона в механике играет весьма важную роль и имеет вполне самостоятельное значение, а не является простым следствием второго закона, как это может, на первый взгляд показаться.

В этом законе содержится постулат о существовании инерциальных систем отсчета, идея об *однородности и изотропности пространства относительно инерциальных систем отсчета.*

Если тело свободно от внешних воздействий, то ничто не может изменить его скорость относительно таких систем. Пространство, будучи однородным и изотропным, само по себе изменить эту скорость не может.

9 ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

1. Второй закон Ньютона отвечает на вопрос, каким будет движение тела относительно инерциальной системы отсчета при *наличии сил.*

Этот закон утверждает: тело под действием силы приобретает ускорение, *пропорциональное* этой силе.

Несмотря на то, что второй закон динамики является обобщением опытных фактов, проверить его со всей строгостью непосредственно на опыте, в реальных *земных* условиях невозможно. На опыте этот закон оправдывается лишь приближенно.

Почему?

Во-первых, потому, что во всех таких опытах неизбежно присутствуют дополнительные воздействия (трение, сопротивление среды и т.д.), учесть которые оказывается далеко не просто.

Во-вторых, потому, что опыты проводятся на Земле - в неинерциальной системе отсчета, в системе, которая сама *движется с ускорением*. Результатом этого является то, что *наблюдаемые* ускорения не вполне соответствуют реально действующим силам. Наблюдаемые ускорения обусловлены не только воздействием сил, но и *неинерциальностью системы отсчета*. Однако если предпринять меры к тому, чтобы ускорения, *обусловленные силами*, были значительно больше ускорений, обусловленных неинерциальностью системы отсчета, то экспериментальная точность опытов будет вполне удовлетворительной.

2. Будем воздействовать на одно и то же тело разными силами и всякий раз находить отношение силы к соответствующему ускорению -

$\frac{F}{a}$. Опыт покажет, что это отношение для *данного* тела является величиной постоянной. Обозначим эту величину буквой *m:*

$$\frac{F}{a} = m \qquad (9.1)$$

Можно убедиться в том, что отношение силы к сообщаемому ею ускорению постоянно для любых других тел (при этом величина его может оказаться разной). Мы приходим к выводу, что отношение $\frac{F}{a}$ зависит только от того*, к какому* телу приложена сила. Следовательно, величина $\frac{F}{a} = m$, называемая *массой* может *служить мерой вполне определенного динамического свойства тел, а именно, свойства приобретать под действием данной силы вполне определенное ускорение, свойства изменять скорость механического движения не сразу, не мгновенно, а постепенно.*

Свойство тел изменять величину и направление скорости *постепенно* называется *инерцией.*

Можно сказать, таким образом, что *масса* есть количественная *мера инерции* материальных тел.

Чем больше масса тела, тем меньшее ускорение оно приобретает под действием данной силы, т.е. тем *медленнее* изменяется его скорость.

Масса тела не зависит от температуры тела, его агрегатного состояния, химического состава, электрических, магнитных, упругих и иных свойств. В классической механике масса полагается величиной *аддитивной* (масса составного тела равна сумме масс отдельных его частей и *не зависящей от скорости* движения). Содержание массы, однако, не исчерпывается одними только динамическими проявлениями. В ряде физических явлений масса служит мерой иных свойств материальных объектов. Поэтому часто массу, фигурирующую во втором законе Ньютона и характеризующую инерционные свойства тел, называют «инертной».

3. Соотношение (9.1) позволяет по динамическому эффекту, обусловленному силой,- ускорению, найти массу тела.

Мы будем, однако, полагать, что масса измерена каким-либо другим способом (это возможно). Тогда соотношение (9.1) можно толковать как зависимость ускорения не только от силы, но и от массы:

$$a = k\frac{F}{m}, \tag{9.2}$$

k - коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерения ускорения, силы и массы. Эти единицы выбирают таким образом, чтобы *k = 1*.

Тогда
$$a = \frac{F}{m} \tag{9.3}$$

Опыт показывает, что направление ускорения всегда совпадает с направлением силы, вызвавшей это ускорение. Учитывая направления $\vec{a}$ и $\vec{F}$, получаем:
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{9.4}$$

Это – одна из простейших формулировок второго закона Ньютона.

Ускорение, приобретаемое телом относительно инерциальной системы отсчета, прямо пропорционально силе, действующей на тело, зависит от массы тела и направлено в сторону силы.

4. Формулу (9.4) можно записать в виде
$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{9.5}$$

Это соотношение используется в качестве определяющего уравнения при установлении единиц измерения силы.

В системе СИ масса измеряется в килограммах (сокращенно *кг*), ускорение – в метрах на секунду за секунду ($м/с^2$). Единицей силы в системе СИ является ньютон (Н). Ньютон – это такая сила, под действием которой тело массой в $1кг$ приобретает ускорение $1\frac{м}{с^2}$:

$$1Н = 1кг \cdot 1\frac{м}{с^2}.$$

Силу часто измеряют в килограммах (*кГ*). Килограмм – это такая сила, которая телу массой 1кг сообщает ускорение 9,8 $м/с^2$:

$$1кГ = 1кг \cdot 9{,}8\frac{м}{с^2} = 9{,}8Н.$$

5. Чтобы перейти от векторной формы записи второго закона к скалярной, векторные величины соотношения (9.5) следует спроектировать на координатные оси выбранной системы координат:

$$ma_x = F_x;$$
$$ma_y = F_y \qquad ; \qquad (9.6)$$
$$ma_z = F_z;$$

6. Опыт показывает, что при взаимодействии материальных тел выполняется *принцип независимости действия сил* (принцип суперпозиций): если на тело одновременно действует несколько сил, *то действие каждой силы происходит независимо от других.* Это значит, что деформация или ускорение, обусловленные данной силой, будут таковыми, как если бы других сил не было.

Следовательно, в общем случае, когда на тело одновременно действуют несколько сил, под $\vec{a}$ в формуле (9.4) нужно понимать *результирующее* ускорение, под $\vec{F}$ — *геометрическую* сумму всех действующих сил, а не какую-то «особую» силу ускорения:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{Fi}}{m}. \qquad (9.7)$$

т.е. ускорение, приобретенное телом, прямо пропорционально результирующей всех действующих на тело сил и обратно пропорционально его массе.

7. Приведем теперь более общую формулировку второго закона Ньютона.

Механическое движение в процессе взаимодействия тел может быть частично или полностью передано от одного тела к другому. Чтобы судить о потенциальных возможностях какого-либо тела в этом отношении, недостаточно знать одну только скорость перемещения – в этом нас убеждает опыт. Сравните, например, движения футбольного мяча, летящего со скоростью *20 м/с*, и поезда, идущего со скоростью *20 м/с*; «запасы» механического движения этих тел различны, несмотря на одинаковую скорость. По-видимому, должна существовать *единая мера* механического движения, *одинаковая* для всех тел. Такая мера действительно существует и называется *импульсом или количеством движения.*

Импульс - это векторная физическая величина, характеризующая способность механического движения передаваться от одного тела к другому, численно равная произведению массы тела на его скорость и совпадающая по направлению с направлением скорости:

$$\vec{K} = m\vec{V} \qquad (9.8)$$

Заметим, что численное значение импульса и его направление зависят от выбора системы отсчета, так как от системы отсчета зависит величина и направление скорости.

Опыт показывает, что изменение импульса тела однозначно связано с величиной и направлением силы, которая на него действует. Пусть в некоторый момент времени t импульс тела был $m\vec{\upsilon}$. Под действием силы $\vec{F}$ (она может быть переменной) за элементарный промежуток времени dt импульс тела изменился на $d(m\upsilon)$ (в случае переменной силы промежуток времени dt должен быть таким, чтобы сила в течение этого промежутка времени практически *не изменялась*). Разделив изменение импульса на промежуток времени, в течение которого это изменение произошло, мы рассчитаем, на сколько изменился импульс за единицу времени при условии, что во все последующие интервалы времени движение будет изменяться точно такими же темпами, что и в течение промежутка dt. Отношение $\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}$ *есть скорость изменения* импульса.

Ньютон установил, что *скорость изменения импульса тела* (производная от импульса по времени), *равна по величине действующей силе и совпадает с ней по направлению:*

$$\frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon}) = \vec{F} \qquad (9.9)$$

Это соотношение и есть общая форма математической записи второго закона Ньютона. Из этой формулы можно получить тот частный вид математического выражения второго закона, который мы привели выше. Действительно, если масса не изменяется с течением времени, то ее можно вынести за знак производной:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}, \text{ но } \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{a}, \text{ следовательно, } m\vec{a} = \vec{F}.$$

8. Создавая свою механику, Ньютон не подозревал, что масса, так же как и пространство, и время, - понятие относительное, зависящее от

системы отсчета, от скорости движения. Поэтому предположение о неизменности массы без каких-либо специальных оговорок молчаливо положено в основу классической механики.

С точки зрения ньютоновской механики выражение второго закона динамики

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}, \qquad \text{и} \qquad \frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon})=\vec{F} \qquad \text{тождественны.}$$

С точки зрения современной физики эти формулы равноправны только для *медленных* (по сравнению со скоростью света) движений, когда изменением массы, обусловленным изменением скорости тела, можно пренебречь.

При скоростях, соизмеримых со скоростью света, эффект возрастания массы будет столь ощутим, что формула (9.5) оказывается непригодной. Для быстрых движений необходимо пользоваться формулой (9.9). Дифференцируя левую часть этого уравнения по правилам дифференцирования сложной функции, получим:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}+\vec{\upsilon}\frac{dm}{dt}=\vec{F}. \qquad (9.10)$$

9. Соотношение (9.9) позволяет сделать вывод о том, что *сила характеризует процесс передачи механического движения от одного тела к другому* и численно равна импульсу, передаваемому за единицу времени.

10. Математическое выражение второго закона часто приводят еще в одном виде. Умножим обе части уравнения (9.9) на dt :

$$d(m\vec{\upsilon})=\vec{F}dt. \qquad (9.11)$$

Величина $\vec{F}dt$ описывает действие силы во времени и называется *импульсом силы*.

Импульс силы – это вектор, численно равный произведению силы на время ее действия и совпадающий по направлению с направлением силы.

В левой части соотношения (9.11) стоит изменение импульса тела за элементарный промежуток времени dt. Таким образом, *изменение импульса тела за время* dt *равно импульсу действующей на него силы за тот же промежуток*. Это еще одна из формулировок второго закона Ньютона.

11. Из формулы (9.11) видно, что второй закон Ньютона – закон дифференциальный. Его можно привести к интегральному виду. Обозначим импульс буквой $\vec{K}$ и перепишем формулу (9.11):

$$d\vec{K} = \vec{F}dt \tag{9.12}$$

Сложим все элементарные приращения импульса за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ и одновременно подсчитаем импульс действующей силы за тот же промежуток. Для этого возьмем определенные интегралы от левой и правой частей соотношения (9.12):

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{K} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt\ . \tag{9.13}$$

Если $\vec{F} =$const, мы получим: $\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{F}\Delta t$ (9.14)

Если $\vec{F} = \vec{F}(t)$, то $$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt \tag{9.15}$$

12. Обратимся к более подробному рассмотрению понятия *инерции.*

Инерция - *важнейшее свойство, присущее всем материальным объектам* (в том числе и полевой форме материи). Этим свойством тела обладают независимо от того, свободны они или взаимодействуют с другими телами, покоятся или движутся.

Необходимо чётко представлять, в чем проявляется инерция тел в различных условиях: в отсутствии внешнего воздействия и при наличии такового.

Ответ на этот вопрос дают первый и второй законы Ньютона.

В отсутствие внешнего воздействия *инерция* проявляется в том, что тело *сохраняет неизменным* свое состояние движения или покоя.

При *наличии* внешнего воздействия – *сил*, инерция проявляется не в том, что тело стремится сохранить свое состояние движения неизменным (ибо как только нескомпенсированая, даже сколь угодно малая сила начинает действовать, движение тела - величина и направление скорости - тотчас же *изменяются*, возникает ускорение), а в том, что *изменения движения тела происходит постепенно*.

Следовательно, *инерция* - это *свойство* тела *сохранять* имеющееся состояние *движения или покоя* (относительно инерциальной системы отсчета) *неизменным* при *отсутствии* воздействия и *изменять* это *состояние постепенно* при *наличии* воздействия.

С проявлениями инерции мы сталкиваемся очень часто. Но, к сожалению, объяснения этих проявлений иногда бывают ошибочными. Поэтому мы рассмотрим здесь один пример. Пусть на гладком, без бортиков столике движущегося вагона лежит предмет. При резком торможении поезда этот предмет может соскользнуть со столика. Почему? Потому, отвечают некоторые, «что предмет *сохраняет* свою первоначальную скорость», «продолжает двигаться по инерции». Такое объяснение, в сущности, ошибочно.

В самом деле, почему столик *изменяет* свою скорость, а предмет ее *сохраняет*? Могут ответить: «на столик действует тормозящая сила со стороны вагона (столик жестко скреплен с вагоном). Это верно, но разве на предмет не действует тормозящая сила? *Действует!* Тормозящей силой для предмета является *сила трения*, приложенная к нему со стороны столика (при торможении поезда эта сила направлена в сторону, противоположную движению). Так как на предмет действует неуравновешенная сила, скорость его (относительно полотна дороги) *не может сохраняться, она изменяется*! Вся суть в том, что изменение скорости столика и предмета происходят *неодинаково быстро,* иными словами, столик и предмет приобретают *разные* ускорения: столик *большее,* предмет *меньшее*. В результате предмет, *опережая* столик, начнет скользить по его поверхности в направлении по ходу поезда. Если же сила трения, действующая на предмет, *достаточна* для того, чтобы сообщить предмету *такое* же точно ускорение, какое имеет столик, - никаких относительных перемещений происходить не будет: столик и предмет будут тормозиться или ускоряться как единое целое.

Таким образом, инерционные эффекты объясняются не тем, что одни тела «сохраняют» свое движение (или покой) неизменным, а другие, напротив, изменяют, а тем, что *изменение движения, изменение скорости всех взаимодействующих тел происходит неодинаково быстро*: одни тела изменяют свое движение быстрее, другие медленнее. В результате мы наблюдаем относительные перемещения тел.

И еще одно обстоятельство не следует забывать. Изменение скорости тела зависит не от одной только инерции (читай: *массы*) тела. Оно зависит также от величины силы и времени ее воздействия.

10 ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

1. Особо следует сказать о динамике движения тела, масса которого изменяется за счет *присоединения* или *отделения частиц.* Например, масса падающей дождевой капли изменяется вследствие испарения молекул или, наоборот, их конденсации, масса ракеты или самоле-

та изменяется за счет выбрасывания продуктов сгорания; в принципе, к телам с изменяющейся массой можно отнести автомобиль, тепловоз и т.д.

2. Движение тела переменной массы в общем случае может изменяться, во-первых, за счет воздействия *внешних сил,* во-вторых, за счет *взаимодействия* тела с *отделяющимися (или присоединяющимися) частицами.* У одних тел решающую роль в изменении скорости играют внешние силы (автомобиль, тепловоз, винтовой самолет), у других – силы, возникающие при взаимодействии с отделяющимися частицами (реактивный самолет, ракета).

Закономерности движения тел переменной массы были подробно исследованы И.В.Мещерским и К.Э.Циолковским.

Силы, возникающие при отделении (или присоединении) частиц, называются *реактивными.*

Можно доказать в самом общем случае, что величина и направление реактивной силы, возникающей при отделении (или присоединении) частиц, зависит: 1) от быстроты изменения массы тела $\frac{dm}{dt}$ (в случае присоединения частиц масса тела увеличивается, поэтому $\frac{dm}{dt}>0$, в случае отделения частиц масса тела уменьшается, поэтому $\frac{dm}{dt}<0$);

2) от величины и направления скорости $\vec{u}$ (относительно тела), с которой частицы покидают тело или присоединяются к нему:

$$\vec{f}_r=\vec{u}\,\frac{dm}{dt}\,. \qquad (10.1)$$

Как видно из этой формулы, реактивная сила, действующая на тело, *совпадает* по направлению с направлением $\vec{u}$, если частицы *присоединяются*, и *противоположна* этой относительной скорости, если частицы *отделяются.*

Поскольку на тело переменной массы всегда действует не только реактивная сила, но также и внешние силы (например, на ракету действует сила притяжения к Земле, Солнцу, сопротивление атмосферы и т.д.), ускорение такого тела будет определяться результирующей внешних и реактивных сил:

$$m\vec{a}=\vec{F}+\vec{f}_r\,, \qquad (10.2)$$

здесь m - масса тела в данный момент времени; $\vec{F}$ - внешняя сила;

$\vec{f}_r$ - реактивная сила

Учитывая (10.1), соотношение (10.2) , можно переписать:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}\,\frac{dm}{dt}\,. \qquad (10.3)$$

Последнее соотношение носит название уравнения Мещерского. Оно позволяет решать ряд важных прикладных задач механики.

11 ТРЕТИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

1. Опыт показывает, что воздействие одного тела на другое никогда не является односторонним. Если тело 1 действует на тело 2 с силой $\vec{F}_{21}$, то, в свою очередь, тело 2 действует на тело 1 с силой $\vec{F}_{12}$, причем силы взаимодействия равны по величине и противоположны по направлению (рис.10):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}\,. \qquad (11.1)$$

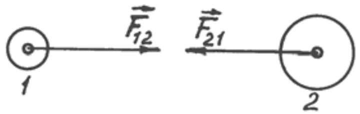

Рис.10

В этом и заключается суть третьего закона Ньютона: *силы, с которыми взаимодействуют два тела, равны по величине и противоположны по направлению.*

2. Одну из сил взаимодействия обычно называют силой «действия», другую – силой «противодействия». Не следует, однако, думать, что «действие» и «противодействие» чем-либо принципиально отличаются друг от друга. Обе силы совершенно равноправны и имеют *одинаковую природу.* Так, если *«действующая»* сила обусловлена упругой деформацией, то сила *«противодействия»* обусловлена также деформацией другого тела, с которым данное тело взаимодействует, если сила «действия» имеет гравитационное происхождение, то «противодействие» вызвано той же причиной и т.д. Любую из сил мы вправе назвать «действующей» и любую – «противодействующей».

Изучая движение какого-либо тела, мы обычно указываем только те силы, которые действуют на *это* тело, и отвлекаемся от сил, приложенных к другим телам. Но эти силы существуют, и забывать о них, вообще говоря, не следует. Они позволяют лучше понять происхождение той или иной силы. Следует всегда помнить, что за каждой силой стоит реальное тело, с которым данное тело взаимодействует. Указывая силу, мы тем самым всегда указываем на *два тела*, которые взаимодействуют друг с другом.

Так как силы действия и противодействия приложены к *разным* телам, то они *не могут уравновесить друг друга.*

Если заменить силы в формуле (11.1) в соответствии со вторым законом Ньютона произведениями масс на ускорения, то третий закон Ньютона будет иметь вид:

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2 \qquad \text{или} \qquad \vec{a}_1 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{a}_2, \tag{11.2}$$

т.е. ускорения, сообщаемые друг другу взаимодействующими телами, обратно пропорциональны их массам и направлены в противоположные стороны.

Из третьего закона Ньютона непосредственно вытекает одно важное следствие: взаимодействие двух тел не может вызвать их перемещение в одном направлении.

Чтобы оба взаимодействующих тела пришли в движение в одном направлении, необходимо, чтобы на одно из тел или на оба одновременно подействовало третье тело.

12 ХАРАКТЕРИСТИКА НЕКОТОРЫХ СИЛ, РАССМАТРИВАЕМЫХ В МЕХАНИКЕ

Дадим краткую характеристику сил, рассматриваемых в механике.

1. *Упругая* сила – сила, возникающая при *деформации* тела, т.е. при изменении его формы или объема, обусловленном действием *внешних* сил.

Если после прекращения действия внешней силы, вызвавшей деформацию, тело *полностью* восстанавливает свою первоначальную форму и размеры, оно называется *упругим.* Упругими называются и деформации, возникающие в таком теле. Упругие тела обладают способностью оказывать сопротивление изменению их формы и объема. В таких телах возникают внутренние силы, препятствующие дальнейшему смещению частиц деформируемого тела, в результате чего внешние силы оказываются уравновешенными.

Для упругих деформаций справедлив *закон Гука:* упругая сила, возникающая при деформации (например, при сжатии или растяжении), пропорциональна величине деформации:

$$F_x = -kx, \tag{12.1}$$

$x -$ величина смещения (растяжения или сжатия);

F_x – проекция упругой силы на направление смещения.

Знак «минус» означает, что направление упругой силы всегда противоположно направлению смещения частиц тела (рис.11).

k - так называемый *коэффициент упругости* – константа, характеризующая и вещество, и «геометрию» тела – его форму, размеры и т.д.

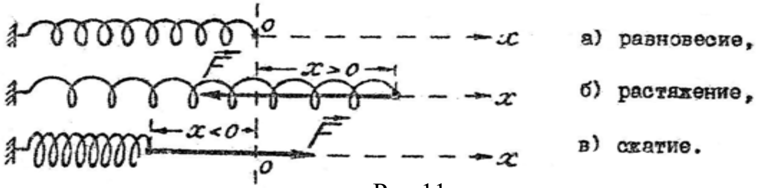

Рис.11

2. *Сила всемирного тяготения* $\vec{F}_\gamma$ - сила взаимного *притяжения,* действующая между любыми материальными телами или частицами, обусловлена гравитационным взаимодействием материальных тел. Если размеры тел малы по сравнению с расстоянием между ними (материальные точки) или имеют сферическую форму и однородны, сила тяготения между ними численно равна

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (12.2)$$

(закон всемирного тяготения Ньютона), где m_1 и m_2 - массы тел; r - расстояние между телами (в случае шаров – расстояние между центрами шаров); γ - гравитационная постоянная.

Так как размеры обычных тел малы по сравнению с радиусом Земли и так как Земля по своей форме близка к шару, силу земного тяготения, действующую на тело массой m, можно вычислить по формуле:

$$F_\gamma = \gamma \frac{mM_З}{R^2}, \qquad (12.3)$$

где $M_З$ - масса Земли; R - расстояние от тела до центра Земли.

3. *Сила тяжести* $\vec{P}$ - *отвесная* составляющая силы земного тяготения (на Луне – лунного тяготения и т.д.).

Сила тяжести во всех точках земной поверхности, кроме полюсов и экватора, *не совпадает* с силой тяготения по *направлению* и во всех точках, кроме полюсов, *меньше* ее по величине.

Объяснение. Пусть некоторое тело лежит на поверхности Земли в точке, находящейся на широте φ (рис.12). На тело действует сила тяготения $\vec{F}_\gamma$ и реакция опоры $\vec{N}$ (эта сила обусловлена *упругостью* опоры). Равнодействующая этих сил сообщает телу центростремительное ускорение (тело вследствие вращения Земли вокруг своей оси движется по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной земной оси).Реакция опоры уравновешивает не силу тяготения $\vec{F}_\gamma$, а ее составляющую $\vec{P}$, которая и называется силой тяжести.

Как видно из рис.12, силы $\vec{F}_\gamma$ и $\vec{P}$ не равны по величине и не совпадают по направлению.

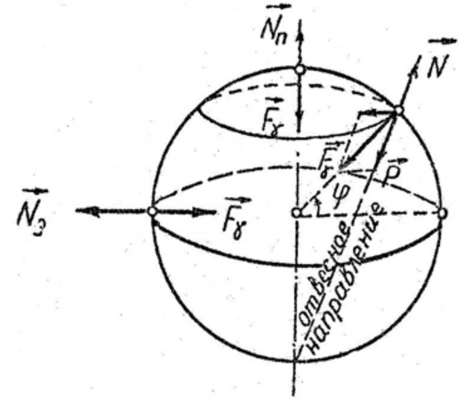

Рис.12

4. *Вес тела* – это сила, с которой тело давит на горизонтальную опору или натягивает вертикальный подвес.

Причиной возникновения этой силы являются упругие деформации, появляющиеся при взаимодействии тела и опоры (деформации тела и опоры могут быть вызваны действием сил тяготения или каких-либо других сил).

Опыт показывает, что любое тело оказывается *деформированным,* если оно движется относительно Земли с ускорением $\vec{a}$, *не равным* ускорению свободного падения $\vec{g}$. Это ускорение, в частности, может быть равно *нулю*, т.е. тело либо покоится относительно Земли, либо равномерно и прямолинейно движется.

Будучи деформированным, стремясь восстановить свою первоначальную форму, тело давит *на опору* с вполне определенной силой, которую и называют весом тела - Q.

Численно значение веса может значительно отличаться от численного значения силы тяжести (мы говорим лишь о *численных* значениях этих сил потому, что они приложены *к разным* телам!). В одних случаях вес может быть *больше* силы тяжести (например, в космических кораблях во время разгона), в других – *меньше* ее (например, в самолетах при «проваливании» в воздушные «ямы»).

Вес тела может быть равен *нулю.* Это *особое состояние*, при котором тело не оказывает давления на опору (становится невесомым), называется *невесомостью*. В этом состоянии тело свободно от деформаций. Единственной силой, которая продолжает действовать на тело в состоянии невесомости, является сила тяготения.

Если тело и опора *покоятся* относительно Земли, то *сила тяжести и вес тела численно равны!* Это используется при нахождении силы тяжести тела.

Определив силу, с которой тело растягивает пружину *неподвижного* динамометра или давит на чашку *неподвижных* весов, т.е. его *вес*, мы тем самым найдем и численное значение силы тяжести. Поэтому, когда задают вес тела, например, $Q = 10$ Н, то, в конечном счете, задают его силу тяжести P =10 Н.

5. Давление тела на опору приводит к его деформации. Будучи деформированной, опора оказывает действие *на тело.* Это действие проявляется в возникновении так называемой *реакции опоры,* которую принято раскладывать на две составляющие – *нормальную реакцию опоры* $\vec{N}$ *и силу трения* $\vec{F}_{тр}$. *Нормальная реакция опоры - это упругая сила,* действующая со стороны опоры на тело в направлении, перпендикулярном плоскости соприкосновения тела и опоры (Если тело подвешено, то реакция подвеса направлена *вдоль* подвеса). Реакция опоры зависит от *степени деформации* опоры.

Если опора *горизонтальна*, то нормальная реакция опоры и вес тела являются по отношению друг к другу силами действия и противодействия. Следовательно, определив из условий движения силу, с которой такая опора действует на тело, мы найдем, с какой силой тело давит на опору, т.е. его вес.

Рассмотрим пример.

На тело, помещенное в кабине лифта (рис.13), действует сила тяжести $\vec{P}$ и реакция опоры $\vec{N}$. При движении лифта с ускорением $\vec{a}$, направленным вертикально *вверх*, второй закон динамики для тела запишется в виде

$$N - P = ma, \tag{12.4}$$

откуда сила N, а стало быть, и вес тела Q будут равны

$$|Q| = N = P + ma \tag{12.5}$$

При *таком* направлении ускорения (не движения, а ускорения!) вес тела оказывается *больше* силы тяжести ($Q > P$).

Если ускорение направлено вертикально *вниз,* то реакция опоры и вес тела оказы-ваются *меньше* силы тяжести:

$$Q = N = P - ma. \tag{12.6}$$

В состоянии невесомости вес и реакция опоры равны нулю, единственной силой, сообщающей и телу, и опоре ускорение, будут иметь вид $P = ma$, но $P = mg$. Следовательно, в состоянии невесомости тела двигаются с ускорением $\vec{a} = \vec{g}$.

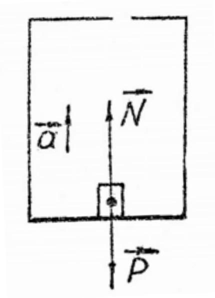

Рис.13

6. *Силы трения* возникают при движении твердых тел, жидкостей и газов. Различают *сухое* (или внешнее) и *вязкое* (или внутреннее) трение. Сухое трение возникает при относительном перемещении соприкасающихся *твердых* тел, вязкое трение – при движении *жидкостей и газов.* В зависимости от характера перемещения одного твердого тела по поверхности другого различают *трение скольжения и трение качения.*

Сила трения скольжения возникает при *скольжении* одного тела по поверхности другого. Направлена эта сила по *касательной* к плоскости соприкосновения тел в сторону, противоположную направлению относительного движения.

Сила трения качения – сила, возникающая при *качении* одного тела по поверхности другого.

Сухое трение может возникнуть и между неподвижными телами – так называемое *трение покоя.*

Сила трения покоя (неполная сила трения) возникает тогда, когда внешняя сила, действующая на тело в плоскости соприкосновения, недостаточна для того, чтобы вызвать его скольжение.

Сила трения покоя всегда равна по величине и противоположна по направлению этой *внешней силе*.

Сила трения покоя *максимальна,* когда тело находится *на грани скольжения.*

Численное значение максимальной силы трения покоя определяется *из закона Кулона*:

$$F_{тр(\max)} = kN\,, \tag{12.7}$$

где k - коэффициент, зависящий от свойств поверхностей соприкосновения и определяемый экспериментально (*коэффициент трения);*

N - *сила нормального давления опоры на тело* (нормальная реакция опоры).

Если внешняя сила достигает значения, чуть-чуть превышающего $F_{тр(\max)}$, начинается скольжение.

Силу трения скольжения при малых скоростях движения можно приближенно вычислить по формуле (12.7).

Существенным отличием вязкого трения от сухого является то, что в жидкостях и газах трение покоя *отсутствует*. Если тело, погруженное в жидкость или газ, покоится, то со стороны жидкости или газа на тело могут действовать только силы, направленные *перпендикулярно* к поверхности соприкосновения.

Сила вязкого трения *зависит от скорости* (при небольших скоростях она пропорциональна первой степени скорости, при больших скоростях – более высоким степеням скорости).

13 МЕХАНИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ

1. Механический принцип относительности Галилея отвечает на вопрос: одинаково ли протекают механические процессы (*при одинаковых условиях)* в разных инерциальных системах. Иными словами, влияет ли равномерное и прямолинейное движение системы на ход механических процессов, происходящих внутри системы?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, необходимо сравнить *вид основных законов механики* в разных инерциальных системах. Если окажется, что законы механики *не изменяют* своего вида при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, то это и будет означать, что механические явления протекают во всех инерциальных системах одинаково.

2. Для того чтобы осуществить переход от одной инерциальной системы отсчета к другой, мы должны знать *правила*, по которым осуществляется преобразование координат и времени, а также правила сложения скоростей, ускорений, сил и т.д. Преобразования координат и времени, в основе которых лежат *классические представления о пространстве и времени*, называются *преобразованиями Галилея.*

3. Рассмотрим две инерциальные декартовы системы координат O и O'. Будем полагать условно, что одна из систем покоится (система O), а другая (O') равномерно и прямолинейно движется относительно первой со скоростью $\vec{\upsilon}$. Из соображений простоты будем считать, что в начальный момент времени (*t=0*) начала координат обеих систем и направления соответствующих осей совпадают (рис.14)

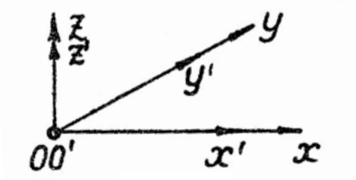

Рис.14

Движение системы O' происходит вдоль оси *X* неподвижной системы без поворота осей Y' и Z' (во время движения системы O'` оси Z и Z', Y и Y' остаются *параллельными* друг другу).

Найдем связь между координатами одной и той же материальной точки *M* в этих двух системах. Пусть положение точки относительно движущейся системы в некоторый момент времени определяется радиус-вектором $\vec{r}^{\,/}$, относительно неподвижной - $\vec{r}$ (рис. 15), перемещение системы O' относительно системы O за промежуток времени *t*, прошедший от начального момента до рассматриваемого, определяет радиус-вектор $\vec{R}$.

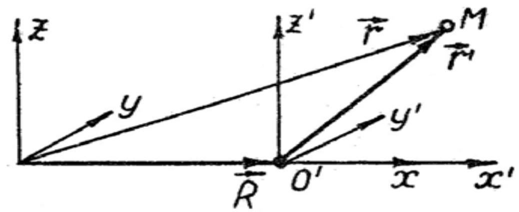

Рис.15

По правилам векторного сложения

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}^{\,/} \qquad (13.1)$$

Перемещение подвижной системы

$$\vec{R} = \vec{\upsilon}\ t\,. \qquad (13.2)$$

Тогда $\vec{r} = \vec{\upsilon}\ t + \vec{r}^{\,/}$,

Откуда $\vec{r}^{\,/} = \vec{r} - \vec{\upsilon}\ t\,.$ (13.3)

Спроектировав все векторы соотношения (13.3) на оси координат, мы найдем связь между компонентами векторов $\vec{r}$ и $\vec{r}^{\,/}$:

$$x^{/} = x - \vec{\upsilon}\ t$$

(Так как $\upsilon_x = \upsilon$);

$$y^{/} = y \qquad (13.4)$$

$$z^{/} = z$$

К этим формулам следует добавить формулу преобразования времени. Классическая механика, как уже говорилось, полагает, что время *абсолютно.* Это значит, что показания двух часов, связанных с системами O и O', и выверенных (*синхронизированных*) для начального момента, должны быть *одинаковыми* для любых последующих моментов: $t^{/} = t\,.$

(13.5)

Соотношения (13.3) – (13.5) и называются *преобразованиями Галилея.*

4 Из преобразований Галилея вытекает *закон сложения скоростей* в классической механике.

Продифференцируем (13.3) по времени:

$\dfrac{d\vec{r}\,'}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} - \vec{\upsilon}$, где $\dfrac{d\vec{r}\,'}{dt} = \vec{U}'$ - скорость точки *относительно движущейся системы координат;* $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{U}$ - скорость точки *относительно «неподвижной» системы.*

Учитывая обозначения, получаем:

$$\vec{U}' = \vec{U} - \vec{\upsilon} \qquad (13.6)$$

Для проекций: $U'_x = U_x - \upsilon$

$$U'_y = U_y \qquad (13.7)$$

$$U'_z = U_z$$

Обращаем внимание на то, что в основе формул (13.6) – (13.7) лежит предположение, что *время в обеих системах течет одинаково быстро:*

$$dt' = dt \, . \qquad (13.8)$$

Из преобразований Галилея вытекает также, что расстояние меду точками (длины отрезков), относительные скорости, ускорения, промежутки времени, силы *не изменяют своих численных значений* при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, т.е. являются абсолютными, неизменными, или, как говорят, *инвариантными* по отношению к преобразованиям Галилея.

Убедимся в этом.

а) Пусть некоторый стержень покоится относительно системы O'. Обозначим длину стержня в этой системе

$$l_0 = x'_2 - x'_1 , \qquad (13.9)$$

(стержень параллелен оси x'). Относительно системы *O* этот стержень движется со скоростью υ. Отметив координаты концов стержня в системе *O* в один и тот же момент времени, мы найдем его длину в системе, относительно которой он движется. Пусть эти координаты будут x_1 и x_2. Тогда длина стержня в этой системе будет равна:

$$l = x_2 - x_1 \, . \qquad (13.10)$$

Выразим x'_1 и x'_2 через x_1 и x_2 по (13.4) и найдем разность x'_1 - x'_2:

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = (x_2 - \upsilon t) - (x_1 - \upsilon t) = x_2 - x_1 = l \, .$$

$$l_0 = l \qquad (13.11)$$

Мы видим, что *длина* стержня при переходе от «неподвижной» инерциальной системы к движущейся *не изменяется.* Совершенно аналогично можно было бы показать, что не изменяются при таком переходе и относительные скорости.

б) Убедимся теперь в том, что второй закон Ньютона инвариантен относительно преобразований Галилея.

Пусть в «неподвижной» системе на материальную точку действует сила $\vec{F}$ и сообщает ей ускорение $\vec{a}$. Второй закон Ньютона в системе *O* имеет вид:

$$m\vec{a} = \vec{F} \, . \qquad (13.12)$$

Найдем вид второго закона Ньютона в движущейся инерциальной системе.

Рассматриваемые в механике силы зависят либо от относительного расположения взаимодействующих тел (например, силы тяготения), либо от относительной скорости их движения (магнитные силы), либо от времени.

Так как при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой ни взаимные расстояния, ни относительные скорости, ни промежутки времени не изменяются, то *не изменяются* при этих переходах и *силы:*

$$\vec{F}' = \vec{F}\,. \tag{13.13}$$

В проекциях:

$$F'_x = F_x$$

$$F'_y = F_y \tag{13.14}$$

$$F'_z = F_z$$

Не изменяется и ускорение. В этом легко убедиться, продифференцировав формулу сложения скоростей (13.6), учитывая при этом, что $\vec{\upsilon}$ постоянно:

$$\frac{d\vec{U}'}{dt} = \frac{d\vec{U}}{dt}\,.$$

Слева стоит ускорение тела в движущейся системе ($\vec{a}'$), справа – ускорение этого же тела в «неподвижной» системе ($\vec{a}$):

$$\vec{a}' = \vec{a}\,. \tag{13.15}$$

В проекциях:

$$a'_x = a_x;$$

$$a'_y = a_y; \tag{13.16}$$

$$a'_z = a_z.$$

Что касается массы, то классическая механика «априори» полагает, что эта величина остается неизменной в любой системе отсчета.

Следовательно,

$$m' = m \tag{13.17}$$

Мы видим, что при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой инерциальной системе и силы взаимодействия, и ускорения, и масса не изменяются.

Следовательно, второй закон Ньютона в системе O' имеет вид

$$m'\vec{a}' = \vec{F}',\qquad (13.18)$$

полностью совпадающий с тем же законом в системе *O*.

Таким образом, мы доказали, что второй закон Ньютона инвариантен по отношению к преобразованиям Галилея.

Можно убедиться в том, что и другие соотношения механики инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея.

Так как уравнения механики имеют одинаковый вид в разных инерциальных системах, то все механические явления в этих системах должны протекать одинаковым образом. Иначе говоря, равномерное прямолинейное движение системы *не оказывает влияния на ход механических процессов* и его невозможно обнаружить из механических опытов. Так, находясь в каюте корабля, идущего равномерно и прямолинейно, мы не сможем, не выглянув в иллюминатор, не слыша гула работающей машины, определить, движется корабль или нет. Все механические процессы будут протекать в этом случае так, как если бы корабль был неподвижен.

Таким образом, *никакими механическими опытами, проведенными в инерциальной системе отсчета, невозможно установить, движется ли эта система равномерно и прямолинейно или покоится*. Такова одна из формулировок механического принципа относительности Галилея.

14 ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА. СИЛЫ ИНЕРЦИИ

1. Пусть теперь одна из рассматриваемых нами систем, например, движущаяся, *неинерциальна*; пусть ускорение этой системы относительно инерциальной равно $\vec{a}_0$.

Если ускорение тела в «неподвижной» системе равно $\vec{a}$, то в движущейся, неинерциальной системе оно будет отлично от $\vec{a}$. В самом деле, продифференцируем формулу сложения скоростей Галилея, полагая $\vec{\upsilon}$ переменной величиной:

$$\frac{d\vec{U}'}{dt} = \frac{d\vec{U}}{dt} - \frac{d\upsilon}{dt},\qquad \text{или}$$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0.\qquad (14.1)$$

Следовательно, $\vec{a}' \neq \vec{a}$.

Что же касается сил взаимодействия между телами, то при переходе от инерциальной системы к неинерциальной они остаются *неизменными*

$$\vec{F}' = \vec{F} \, .$$

Таким образом, несмотря на то, что в обеих системах отсчета (и в инерциальной, и в неинерциальной) на тело действует *одна и та же* сила, ускорение его относительно этих *систем* оказывается *разным*. В неинерциальной системе

$$\vec{F}' \neq m'\vec{a}' \, . \tag{14.2}$$

Иными словами, в неинерциальных системах отсчета нарушается прямо пропорциональная зависимость ускорения от действующей силы. *Наблюдаемые ускорения не «соответствуют» силам!* В неинерциальных системах перестает быть справедливым и принцип инерции: движение свободного тела в таких системах перестает быть равномерным и прямолинейным.

Как быть?

2. В принципе, мы могли бы при описании движения в неинерциальных системах отсчета вообще отказаться от «обычной» механики Ньютона. Но тогда нам пришлось бы создавать для каждой неинерциальной системы «свою» механику, поскольку законы движения, установленные для одной неинерциальной системы, были бы несправедливы в другой.

Можно, однако, попытаться «приспособить» «обычную» механику к неинерциальным системам. Но при этом придется отказаться от некоторых положений, лежащих в основе обычной механики.

В основе «обычной» механики, *механики инерциальных систем* лежат два принципа:

1) *Ускорения тел обусловлены только силами* (при этом существует *однозначная* зависимость между этими величинами, определяемая вторым законом Ньютона).

2) *Силы обусловлены только взаимодействием тел* друг с другом.

Сохранить оба эти принципа в неинерциальных системах отсчета невозможно.

Так, если мы постулируем, что *ускорения* в неинерциальных системах обусловлены *только силами*, то мы должны признать (если хотим на основе «обычных» законов Ньютона объяснить наблюдаемые факты), что *силы необязательно обусловлены взаимодействием тел друг с другом.*

Если же мы постулируем, что *силы* обусловлены только взаимодействием тел, то будем вынуждены отказаться от утверждения, что ускорения вызываются только силами.

Положим в основу механики неинерциальных систем первый принцип – *ускорения всегда обусловлены силами* и откажемся от второго.

Тогда при описании движения в неинерциальных системах придется вводить *дополнительные силы*, происхождение которых нельзя объяснить непосредственным действием на данное тело других тел.

Появление этих сил обусловлено исключительно неинерциальностью выбранной системы отсчета.

Эти силы получили название *сил инерции.*

3. Сформулируем первый и второй законы Ньютона в неинерциальной системе отсчета и отметим некоторые особенности сил инерции.

В неинерциальной системе отсчета тело покоится или движется равномерно и прямолинейно, если векторная сумма «обычных» сил, обусловленных взаимодействием, и сил инерции равна нулю:

$$\vec{F} + \vec{F}_{ин} = 0 \qquad (14.3)$$

Ускорение, с которым тело движется относительно неинерциальной системы отсчета, прямо пропорционально векторной сумме «обычных» сил и сил инерции, и обратно пропорционально массе тела:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{F} + \vec{F}_{ин}}{m}. \qquad (14.4)$$

$\vec{F}$ - сумма сил, действующих на данное тело со стороны других тел;

$\vec{F}_{ин}$ - сумма сил инерции.

Заменим $\vec{a}'$ в соответствии с формулой (14.1):

$$(\vec{a} - \vec{a}_0)m = \vec{F} + \vec{F}_{ин},$$

откуда сила инерции получается равной

$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_0, \qquad (14.5)$$

$\vec{a}_0$ - ускорение, с которым неинерциальная система движется относительно инерциальной.

Таким образом, сила инерции *пропорциональна массе тела*, на которое она действует, и *ускорению*, с которым движется система отсчета. Направление силы инерции *противоположно* направлению ускорения системы отсчета.

Так как силы инерции не обусловлены взаимодействием тел, то к ним неприменим третий закон Ньютона. И еще одна примечательная особенность характерна для сил инерции: в данной неинерциальной системе отсчета *силы инерции сообщают всем телам одинаковые ускорения.* (Речь идет о системах, движущихся поступательно)

4. Введение сил инерции вовсе не является принципиально необходимым. Любое движение можно рассматривать по отношению к инерциальной системе. Однако часто бывает проще описать движение по отношению к неинерциальной системе. В этом случае (и только в этом!) прибегают к силам инерции с тем, чтобы сохранить внешнюю форму законов движения. Проиллюстрируем сказанное простейшим примером.

Пусть неинерциальной системой отсчета будет вагон ускоренно движущегося поезда. «Неподвижной» инерциальной системой отсчета будем считать Землю (при этом, разумеется, мы на время «забудем» о том, что в действительности Земля вращается).

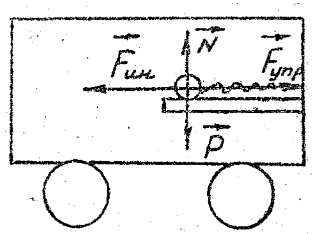

Рис.16

В вагоне имеется гладкая горизонтальная полка, на которой лежит шар, скрепленный с передней стенкой вагона пружиной (рис.16).

При ускоренном движении вагона пружина будет растянута и на шар, кроме взаимно уравновешивающихся сил тяжести $\vec{P}$ и реакции опоры $\vec{N}$, будет действовать нескомпенсированная упругая сила растянутой пружины.

Опишем движение шара относительно инерциальной системы – Земли и относительно неинерциальной системы – вагона.

Относительно инерциальной системы – Земли шар движется *с ускорением* $\vec{a}$. Это ускорение шару сообщает упругая сила деформированной пружины. Все происходит в полном согласии с законами динамики.

Относительно неинерциальной системы – вагона шар *покоится,* несмотря на то, что, на него действует упругая сила. Чтобы с позиций механики объяснить равновесие шара относительно вагона, мы вынуждены считать, что кроме упругой силы $\vec{F}$, обусловленной взаимодействием шара и пружины, на шар действует равная ей по величине и противоположная по направлению сила инерции $\vec{F}_{ин}$, которая и компенсирует действие силы $\vec{F}$:

$$\vec{F} + \vec{F}_{ин} = 0 .$$

Таким образом, вводя силы инерции, мы имеем возможность описывать движение тел в неинерциальных системах отсчета при помощи тех же уравнений движения, каким мы пользуемся при описании движения в инерциальных системах.

5. В заключение отметим, что мы указали на некоторые особенности сил инерции, действующих на тела в системах, движущихся поступательно.

В зависимости от характера движения неинерциальной системы отсчета выражение сил инерции будет иметь разный вид. Так, например, во *вращающихся* системах отсчета силы инерции зависят не только от массы тела, но и *от расстояния* от тела до центра вращения (такие силы инерции называются *центробежными*), а также *от скорости*, с которой тело движется относительно неинерциальной системы (эти силы инерции называются *кориолисовыми*).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Вратарь, бросая мяч, действует на него с постоянной силой в течение 0,1 с. Рука его движется вперед на расстояние 1 м. Масса мяча 600 *г*. Считая мяч материальной точкой, определить ускорение мяча и силу, действующую на него.

Решение. Выбираем ось x в направлении движения мяча. Тогда проекция вектора силы будет равна $F_x = ma_x$. Так как на мяч действовала постоянная сила, а начальная скорость равнялась нулю, то уравнение движения будет иметь вид $x = \frac{a_x t^2}{2}$. Из этого выражения находим ускорение $a_x = \frac{2x}{t^2}$, а затем и силу $F_x = \frac{2mx}{t^2}$. Произведем вычисления: $a_x = \frac{2 \cdot 1}{0{,}1^2} = 200(м/с^2)$; $F_x = \frac{2 \cdot 0{,}6 \cdot 1}{0{,}1^2} = 120(Н)$.

Пример 2. На тело действует сила, пропорциональная времени $F = kt$. Найти уравнение движения тела при условии, что при $t = 0$ тело имеет начальную скорость υ_0.

Решение. Запишем второй закон динамики в виде $F = m\dfrac{d\upsilon}{dt}$. По условию $F = kt$. Приравняем правые части $m\dfrac{d\upsilon}{dt} = kt$, откуда $d\upsilon = \dfrac{k}{m}tdt$. Проинтегрируем последнее выражение $\upsilon = \dfrac{k}{m}(\dfrac{t^2}{2} + C)$.

Найдем постоянную интегрирования. При $t = 0$ $\upsilon_0 = \dfrac{k}{m}C$, $C = \dfrac{m}{k}\upsilon_0$;

Тогда $\upsilon = \upsilon_0 + \dfrac{k}{2m}t^2 = \dfrac{dx}{dt}$. Из этого выражения $dx = \upsilon_0 dt + \dfrac{k}{2m}t^2 dt$; интегрируя от 0 до t, имеем

$$x = \upsilon_0 t + \frac{k}{6m}t^3 .$$

Пример 3. Два шара массами $m_1 = 2{,}5кг$ и $m_2 = 1{,}5кг$ движутся друг другу навстречу со скоростями $\upsilon_1 = 6м/с$ и $\upsilon_2 = 2м/с$. Определить скорость шаров после неупругого прямого удара.

Решение. Неупругие шары не восстанавливают после удара свою первоначальную форму. Следовательно, не возникают силы, способные оттолкнуть шары друг от друга. Это приводит к тому, что шары после удара движутся совместно с одинаковой скоростью u. Определим эту скорость по закону сохранения импульса

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

В проекции на ось x с учетом направления движения шаров это даст

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)u ,$$

откуда
$$u = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} .$$

После подстановки данных получим

$$u = \frac{2{,}5 \cdot 6 - 1{,}5 \cdot 2}{2{,}5 + 1{,}5} = 3(м/с) .$$

Пример 4. Вычислить дополнительную силу трения между колесами автомобиля и дорогой, необходимую для движения его под вертикальным дождем со скоростью 12 *м/с*. Масса дождевой капли $m = 0{,}1г$. Ежесекундно на 1 $м^2$ поверхности автомобиля падает $a = 3.10^4$ капель дождя. Поверхность автомобиля, смачиваемая дождем, равна $S = 8\ м^2$.

Решение. В применении к дождевым каплям изменение их количества движения равно $Md\upsilon = M(\upsilon_2 - \upsilon_1)$, где υ_1 - скорость капли в момент удара о крышу (при вертикальном падении проекция скорости υ_1 на направление движения автомобиля равна нулю), υ_2 - конечная скорость капли (горизонтальная, равная скорости автомобиля υ). Общая масса капель, падающих на автомобиль, равна $M = aSm\Delta t$.

Изменение количества движения капель $Md\upsilon = M\upsilon = aSm\Delta t\upsilon$ равно импульсу силы, действующей на автомобиль, которую можно принять равной силе трения, т.е. $F\Delta t = aSm\Delta t\upsilon$, откуда $F = maS\upsilon$.

После подстановки данных имеем

$$F = 0{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 3.10^4 \cdot 8 \cdot 12 = 288(H).$$

Пример 5. Ракета, масса которой в начальный момент $m_0 = 1{,}5кг$, запущена вертикально вверх. Определить ускорение, с которым движется ракета через $t = 5с.$ после старта, если скорость расхода горючего $\mu = 0{,}2кг/с$, а относительная скорость выхода продуктов сгорания $u = 80м/с$. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Запишем уравнение Мещерского в общепринятом виде

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F + u\frac{dm}{dt},$$

где $m = m_0 - \mu \cdot t$ - масса ракеты в момент времени t, $\frac{d\upsilon}{dt} = a$ - ускорение ракеты, которое определяется результирующей внешних сил F и реактивных сил $f_p = u\frac{dm}{dt}$ (u – скорость продуктов сгорания, $\frac{dm}{dt} = \mu$ - расход горючего). Тогда уравнение Мещерского примет вид

$$(m_0 - \mu \cdot t)a = F - u\mu .$$

Здесь внешняя сила $F = (m_0 - \mu \cdot t)g$ - сила тяжести, действующая на ракету в момент t.

Получаем, что $a = -\dfrac{\mu u}{m_0 - \mu \cdot t} + g$; $a = -22{,}2(м / c^2)$

Пример 6. Определить жесткость системы двух пружин при последовательном и параллельном их соединении (см. рис.17). Жесткость пружин $k_1 = 2 \cdot 10^3 н / м$ и $k_2 = 6 \cdot 10^3 н / м$.

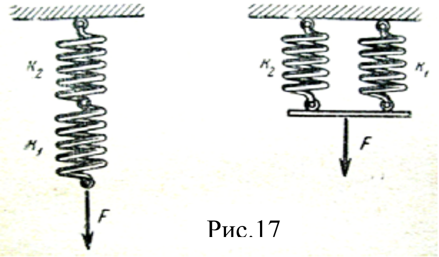

Рис.17

Решение. а). Рассмотрим случай последовательного соединения пружин. На каждую из них вдоль оси действует одна и та же сила F .

Деформации, полученные пружинами, будут в соответствии с законом Гука равны: для первой пружины -

$$\Delta x_1 = \frac{F}{k_1}, \quad \text{для второй - } \quad \Delta x_2 = \frac{F}{k_2}.$$

Для системы пружин, как одного целого, применим закон Гука в виде $F = k\Delta x$,

где k - жесткость системы двух пружин, Δx - их результирующая деформация. Заменим Δx через Δx_1 и Δx_2 , т.е.

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \quad \text{или} \quad \frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}, \text{ откуда } \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

Таким образом, коэффициент жесткости системы двух последовательно соединенных пружин равен $k = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

Подставляя числовые значения, получим

$$k = \frac{2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^3} = 1{,}5 \cdot 10^3 н / м.$$

б). Рассмотрим параллельное соединение пружин.

В этом случае силу F можно рассматривать как равнодействующую двух параллельных сил F_1 и F_2 , действующих на каждую из пружин. Под действием этих сил пружины получают одинаковую деформацию $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$. С учетом замечаний имеем $F = F_1 + F_2$

или $\quad k\Delta x = k_1 \Delta x + k_2 \Delta x$, $\quad$ откуда $\quad k = k_1 + k_2$.

Подставив числовые значения жесткости, получим

$$k = 2\cdot 10^3 + 6\cdot 10^3 = 8\cdot 10^3\ н/м.$$

Пример 7. Для осуществления телевизионной связи необходимо иметь спутник, вращающийся по круговой орбите в плоскости экватора с запада на восток. Определить работу, необходимую для вывода на орбиту радиусом $R_{орб}$ =4,23.10^7 *м* спутника массой $m = 2.10^3\ кг$, если его линейная скорость на орбите $\upsilon_{орб} = 3{,}08.10^3\ м/с$, а период обращения $T = 24$ *часа*.

Решение. Эта работа будет состоять из работы по преодолению силы тяжести и работы, необходимой для изменения кинетической энергии спутника, т.е.

$$A = A_{тяг} + \Delta E_к.$$

Работа силы, направленной против силы тяготения, на элементарном перемещении вдоль радиуса Земли, равна

$$dA = \gamma \frac{mM_З}{r^2}dr.$$

При поднятии спутника с поверхности Земли ($R_З$) до высоты, определяемой радиусом орбиты ($R_{орб}$), будет проделана работа

$$A_{тяг} = \int_{R_З}^{R_{орб}} \frac{\gamma m M_З}{r^2}dr = \gamma m M_З\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{R_З}^{R_{орб}} = \gamma m M_З\frac{R_{орб}-R_З}{R_{орб}R_З}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$A_{тяг} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 10^3\cdot 5{,}96\cdot 10^{24}\frac{4{,}23\cdot 10^7 - 6{,}37\cdot 10^6}{6{,}37\cdot 10^6\cdot 4{,}23\cdot 10^7} = 10{,}6\cdot 10^{10}\ Дж$$

Работа по изменению кинетической энергии будет равна разности их значений на высоте орбиты - $E_{орб}$ и на поверхности Земли - $E_З$, т.е.

$$A = \Delta E_к = E_{орб} - E_З = \frac{m\upsilon_{орб}^2}{2} - \frac{m\upsilon_З^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\upsilon_{орб}^2 - \frac{4\pi^2R_З^2}{T^2}\right).$$

Подставив числовые значения, получим

$$\Delta E_к = \frac{2\cdot 10^3}{2}\left[\left(3{,}08\cdot 10^3\right)^2 - \frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot\left(6{,}37\cdot 10^6\right)^2}{(24\cdot 3600)^2}\right] = 0{,}93\cdot 10^{10}\ Дж$$

Таким образом, полная работа по выведению спутника на орбиту будет равна

$$A = A_{тяг} + \Delta E_к = 10{,}6\cdot 10^{10} + 0{,}93\cdot 10^{10} = 11{,}53\cdot 10^{10}\ Дж.$$

Пример 8. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы забросить тело на Луну? Считать, что в процессе движения взаимное положение Луны и Земли не меняется.

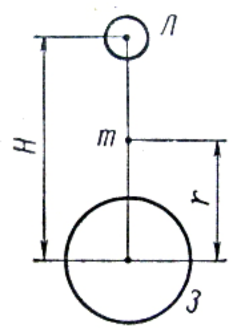

Рис.18

Решение. В процессе перемещения тела на него первоначально действуют две силы тяготения: со стороны Земли - $F_З$ и со стороны Луны - $F_Л$. Затем, по мере приближения к Луне, найдется такая точка, в которой результирующая сил тяготения будет равна нулю. После этого тело будет перемещаться под действием притяжения со стороны Луны. Поэтому минимальная работа, которую нужно совершить на Земле, это будет работа по перемещению тела с поверхности Земли в точку, где результирующая сила тяготения равна нулю, т.е.

$$A = \int_{R_З}^{r_0}(F_З - F_Л)dr = -\gamma m\int_{R_З}^{r_0}\left[\frac{M_З}{r^2} - \frac{M_Л}{(H-r)^2}\right]dr,$$

где r_0 - расстояние от центра Земли до точки, в которой результирующая сил тяготения равна нулю; $H -$ расстояние между центрами Земли и Луны; $m, M_З, M_Л -$ соответственно массы тела, Земли и Луны; $\gamma -$ гравитационная постоянная; $r -$ расстояние от центра Земли до точки, в которой находится тело (см. рис.18). Проинтегрировав, получим

$$A = -\gamma m\left(\frac{M_З}{r_0} - \frac{M_З}{R_З} + \frac{M_Л}{H-R_З} - \frac{M_Л}{H-r_0}\right),$$

где r_0 находится из условия $\dfrac{\gamma m M_З}{r_o^2} = \dfrac{\gamma m M_Л}{(H-r_0)^2}$ и равно

$$r_0 = \frac{M_З - \sqrt{M_З M_Л}}{M_З - M_Л} H .$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ.

1. Что такое сила? В чем проявляется статическое и динамическое действие силы?
2. Какое тело называют свободным?
3. Какая система отсчета называется инерциальной?
4. Сформулируйте первый закон Ньютона.
5. Приведите все известные вам формулировки второго закона Ньютона.
6. Что такое импульс тела и что такое импульс силы?
7. Что такое масса?
8. Что такое инерция? (разъяснить на конкретном примере).
9. Сформулируйте третий закон Ньютона.
10. Что такое сила тяжести и вес тела?
11. Что такое невесомость?
12. Какие априорные положения лежат в основе преобразований Галилея?
13. Сформулируйте принцип относительности Галилея.
14. Сформулируйте первый и второй законы Ньютона для неинерциальной системы.
15. Дайте характеристику силам инерции.

МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ И РАБОТА.

15 ПОНЯТИЕ ОБ ЭНЕРГИИ

1. Опыт показывает, что различные формы движения материи способны к *взаимным превращениям*. Так, упорядоченное механическое движение может превратиться в хаотическое молекулярное движение, электромагнитное движение может превратиться в механическое и т.д.

Опытом установлено, что все взаимные превращения различных форм движения материи происходит в строго определенных *количественных соотношениях*. Движение бесследно не исчезает. «Исчезновение» одной формы движения всегда сопровождается «возникновении ем» эквивалентного количества движения другой формы – подтверждается одно из основных положений материалистической философии – положение о *неучтожимости движения.*

Изучение закономерностей превращения одних форм движения в другие с *количественной точки зрения* убеждает в том, что должна объективно существовать *единая мера* различных форм движения материи, *одинаковая для всех форм движения и типов взаимодействия.* Причем эта мера должна характеризовать *любую* форму движения (в том числе и механическое движение!) с точки зрения *принципиальных возможностей превращения данной формы движения в другую.*

Может ли служить такой универсальной мерой импульс $m\vec{\upsilon}$, введенный нами при изучении механического движения? Нетрудно убедиться, что эта величина не может служить такой мерой.

Действительно, представим движение с трением. Если тело движется равномерно и прямолинейно, то его скорость, а стало быть, и импульс не изменяются ни по величине, ни по направлению. Значит ли это, что механическое движение данного тела не передается в процессе перемещения окружающим телам, не превращается в качественно новые формы движения? Нет, не значит. Опыт показывает, что при движении с трением всегда происходит превращение упорядочного механического движения в неупорядочное молекулярное движение (доказательством этого превращения служит увеличение интенсивности движения атомов и молекул соприкасающихся тел, о чем мы судим по нагреванию тел).

Следовательно, импульс тела никак не характеризует той части механического движения, которая превращается в другие виды.

Импульс может служить мерой лишь той части механического (не любого, а именно *механического*) движения, которая в процессе взаимодействия сохраняется в *механической же форме*. Иначе говоря, величина $m\vec{\upsilon}$ определяет, какое количество механического движения не «способно» в рамках данной системы отсчета к превращению в другие виды движения. Поиски *такой* всеобщей меры, посредством которой можно было бы измерить различные формы движения и взаимодействия, привели к открытию одного из важнейших физических понятий – понятия *энергии* и одного из самых фундаментальных законов природы – *закона сохранения и превращения энергии.*

2. Состояние тела или системы тел, частиц и т.д. определяется рядом физических величин, называемых *параметрами состояния*. Параметры состояния характеризуют некоторые *существенные свойства* системы.

Значения параметров состояния в рассматриваемые моменты времени определяются из уравнений, описывающих *процессы*, происходящие в системе. Сравнение параметров состояния для различных моментов времени дает возможность видеть, насколько быстро протекает во времени тот или иной процесс.

Перечислим некоторые физические величины, являющиеся параметрами состояния.

Мы уже отмечали, что механическое состояние материальной точки определяется координатами (x, y, z) и проекциями вектора скорости на координатные оси $(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$; так называемое термодинамическое состояние системы определяется молярным объемом V, давлением p и абсолютной температурой T. Состояние электромагнитного поля – векторами напряженности $\vec{E}$ и индукции $\vec{B}$ (точнее, их проекциями на координатные оси: $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$).

3. Энергия, как единая мера различных форм движения материи, представляет собой физическую величину, *зависящую от параметров состояния* системы.

Энергия (в широком смысле слова) – *единая мера различных форм движения и типов взаимодействия материальных объектов*, являющаяся однозначной, непрерывной, конечной, дифференцируемой функцией параметров состояния системы:

$$E = E(x, y, z, \upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z, p, V, T, E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z) \qquad (15.1)$$

4. В любой системе могут происходить изменения, обусловленные *участием системы в различных формах движения* (в системах могут происходить, например, механические перемещения тел, различные молекулярные, электромагнитные, ядерные и т.д. процессы). Обычно изменения, обусловленные различными формами движения, рассматривают раздельно. В связи с этим разумно и энергию, определяемую соотношением (15.1), рассматривать «по частям», иначе говоря*, каждой форме движения приписывать определенный вид энергии.* Энергию, зависящую от параметров механического состояния, называют *механической*; энергию, зависящую от параметров термодинамического состояния – *внутренней* и т.д.

5. Обратим внимание на то, что механическая энергия зависит от двух векторных параметров: параметра $\vec{r}$, определяющего *положение* тела относительно другого тела, с которым оно взаимодействует, и па-

раметра $\vec{\upsilon}$, определяющего *интенсивность движения* тела в пространстве:

$$E = E(\vec{r}, \vec{\upsilon}). \qquad (15.2)$$

Представляется возможным разбить механическую энергию на два слагаемых, каждое из которых зависит только от одного параметра:

$$E(\vec{r}, \vec{\upsilon}) = E(\vec{r}) + E(\vec{\upsilon}). \qquad (15.3)$$

Часть механической энергии, зависящая от скорости движения тела в пространстве, называется кинетической энергией:

$$E(\vec{\upsilon}) = E_k. \qquad (15.4)$$

Часть механической энергии, зависящая от относительного расположения взаимодействующих тел или их частей, называется потенциальной энергией:

$$E(\vec{r}) = E_n. \qquad (15.5)$$

6. Изменение любого вида энергии, передача ее от одних материальных объектов к другим происходит в процессе *взаимодействия.* Изменение энергии системы означает изменение ее движения, изменение ее параметров состояния.

Существуют два принципиально различных способа изменения энергии. Один из них называется *работой*, другой – *теплопередачей.*

Роль этих способов в изменении разных видов энергии неодинакова.

Внутренняя энергия, например, может изменяться и за счет работы, и за счет теплопередачи. Механическая же энергия макроскопических тел может изменяться *только за счет работы.*

Поскольку мы рассматриваем пока закономерности механической формы движения, обратимся к более подробному рассмотрению механической энергии и работы.

16 МЕХАНИЧЕСКАЯ РАБОТА

1. Работа представляет собой *процесс,* связанный с *упорядоченными перемещениями* взаимодействующих макроскопических тел. Это процесс, в ходе которого *изменяются параметры состояния тела или системы.* Это процесс передачи движения, *передачи энергии* от одного тела к другому («вода, падая на лопасти гидротурбины, совершает работу» - это лишь иной способ сказать, что вода передает свое движение, свою энергию лопастям и валу турбины). Это процесс, в ходе которого происходит *превращение одного вида энергии в другой.*

Подчеркнем: *превращение одного вида энергии в другой*, одной формы движения в другую – важнейший *признак работы.* Когда мы говорим, что при движении автомобиля силы трения совершают работу, то это снова лишь иной способ сказать, что энергия движения автомобиля *как целого,* т.е. его механическая энергия, превращается в энергию беспорядочного молекулярного движения – во внутреннюю энергию.

Наконец, можно сказать, что работа – это *пространственная характеристика действия силы.*

2. Для того чтобы совершалась работа, необходимо, чтобы на тело действовала сила, вызывающая либо перемещение тела как целого, либо смещение отдельных его частей.

Численное значение элементарной работы равно произведению силы на перемещение точки приложения силы и на косинус угла между направлением действия силы и направлением перемещения:

$$dA = Fdr\cos\alpha \,. \qquad (16.1)$$

Записанная формула представляет собой количественное *определение работы.* Именно эта, а не какая-либо другая величина, оказывается однозначно связанной с функцией параметров состояния – энергией.

Из векторной алгебры известно, что величина $Fdr\cos\alpha$ есть численное значение скалярного произведения вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$:

$$Fdr\cos\alpha = \vec{F}d\vec{r}$$

Следовательно, численное значение работы равно *скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения:*

$$dA = \vec{F}d\vec{r} \qquad (16.2)$$

3. Произведение $F\cos\alpha$ можно рассматривать как проекцию вектора силы на направление перемещения (рис.19):

$$F\cos\alpha = F_r \,.$$

Тогда $dA = F_r\, dr \,.$ (16.3)

Можно спроектировать вектор перемещения на направление силы: $dr\cos\alpha = dr_F \,.$

В этом случае: $dA = Fdr_F \,.$ (16.4)

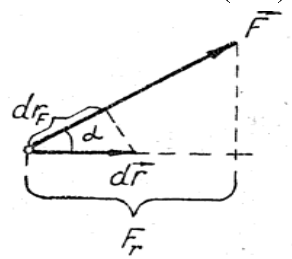

Рис.19

4. Формула (16.1) позволяет вычислить работу, совершаемую силой на бесконечно малом перемещении $d\vec{r}$. Бесконечно малое перемещение $d\vec{r}$ по абсолютной величине равно бесконечно малой длине пути dS . Поэтому уравнение (16.1) можно переписать в форме:

$$dA = FdS\cos\alpha = F_s dS \qquad (16.5)$$

5. Формулы (16.1) – (16.5) – *дифференциальные.* Они справедливы и для постоянных, и для переменных сил. Чтобы вычислить работу, совершаемую *переменной* силой на конечном произвольном пути S_{12}, надо сначала рассчитать работу на каждом из бесконечно малых участков dS этого пути, а затем сложить все элементарные работы. Это суммирование сведется к интегрированию:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_{S_{12}} FdS\cos\alpha \qquad (16.6)$$

Если величина и направление силы не изменяются, а движение происходит по прямолинейному пути, то интегрирование приведет к очень простой формуле:

$$A_{12} = F_S S = FS\cos\alpha\ . \qquad (16.7)$$

6. Работа – величина *алгебраическая*. Это означает, что она может быть и положительной, и отрицательной. Если $0 \le \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ ($\cos\alpha > 0$), то работа, совершаемая силой, положительна (силу, совершающую положительную работу, иногда называют движущей). Если $\dfrac{\pi}{2} <$ $\alpha \le \pi$ ($\cos\alpha < 0$), то работа силы отрицательна (такую силу называют силой *сопротивления*).

Сила, действующая на тело, не совершает работы, если

а) тело покоится ($dS = 0$);

б) направление силы перпендикулярно направлению перемещения ($\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ и $\cos\alpha = 0$).

Так, если человек стоит с тяжелым грузом в руках, то, несмотря на напряжение мышц, он не совершает механической работы. Более того, он не совершит работы, если перенесет этот груз на некоторое расстояние по *горизонтальному* пути. Мы видим, что понятие работы в механике значительно уже нашего обыденного представления о ней. Не всякое усилие и не всякая деятельность есть «работа» в механическом смысле.

7. Если на тело действует несколько сил, то из принципа независимости действия сил вытекает, что работа равнодействующей силы (полная работа) равна алгебраической сумме работ всех составляющих

сил:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n)d\vec{r} =$$

$$\vec{F}_1 d\vec{r} + \vec{F}_2 d\vec{r} + ... + \vec{F}_n d\vec{r} \qquad (16.8)$$

$$= dA_1 + dA_2 + ... + dA_n$$

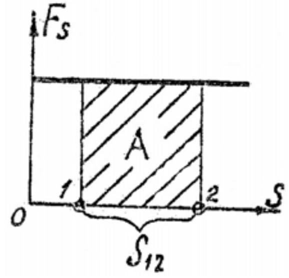

Рис.20

8. Работа может быть представлена графически на диаграмме $F_S - S$. Вдоль оси абсцисс откладывается путь, вдоль оси ординат – проекция силы на направление пути. Если проекция силы на направление S постоянна (F_S=const), то графиком ее будет прямая, параллельная оси S (рис.20), а работа, совершенная силой на пути S_{12} (она равна в этом случае $A_{12} = F_S S_{12}$), изобразится площадью *прямоугольника*, покрытого штриховкой.

Если проекция силы на направление S изменяется, графиком F_S будет некоторая кривая (рис.21). Работа в этом случае изобразится площадью криволинейной трапеции (она будет равна интегральной сумме бесконечно узких полосок, изображающих элементарные работы на отдельных малых перемещениях): $A_{12} = \int_1^2 F_S dS$

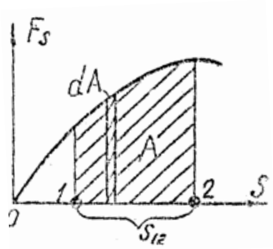

Рис.21

9. Для характеристики *быстроты* совершения работы вводится величина, называемая *мощностью.*

Мощностью называется физическая величина, численно равная работе, совершаемой за единицу времени.

Вводят понятие средней мощности: $N_{ср} = \dfrac{\Delta A}{\Delta t}$, (16.9)

мгновенной: $$N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} \qquad (16.10)$$

Выразим элементарную работу через силу и перемещение $dA = \vec{F}d\vec{r}$

и подставим в формулу мощности $N = \dfrac{\vec{F}d\vec{r}}{dt}$, но $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ есть мгновенная скорость движения $\vec{\upsilon}$. Следовательно, мгновенная мощность оказывается равной скалярному произведению вектора силы $\vec{F}$ на вектор скорости $\vec{\upsilon}$:

$$N = \vec{F}\vec{\upsilon}$$

или

$$N = F\upsilon \cos\alpha . \qquad (16.11)$$

10. Единицей работы в системе СИ является *джоуль*.

Джоуль (*Дж*) – это работа, совершаемая силой *1Н* на пути *1м* (при условии, что направление силы совпадает с направлением перемещения): *1Дж=1Н* × *1м*.

Единица мощности в системе СИ – *ватт*.

Ватт (*Вт*) – это такая мощность, при которой совершается работа в *1Дж* за *1сек*.

Распространенный внесистемной единицей работы является килограммометр (*кГм*). Соответствующая единица мощности - $\dfrac{кГм}{сек}$.

17 РАБОТА И КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

1. Покажем теперь, что работа силы, действующей на тело, однозначно связана с *изменением энергии* этого тела.

Пусть на тело, движущееся в горизонтальной плоскости *без трения*, в течение некоторого времени действовала переменная сила, которая изменила скорость этого тела от υ_1 до υ_2, причем во время движения тело не выходило из указанной горизонтальной плоскости (это ограничение означает, что высота тела над поверхностью Земли остается неизменной).

Выясним, на что затрачивается работа этой силы.

Подсчитаем сначала работу, совершаемую силой на бесконечно малом отрезке пути dS (рис.22). Согласно (16.5) она равна $dA = F_S\, dS$, где F_S (или F_τ) – касательная составляющая силы. Касательная составляющая силы сообщает телу тангенциальное ускорение a_S. По второму закону Ньютона $F_S = m\,a_S$ (в скалярном виде).

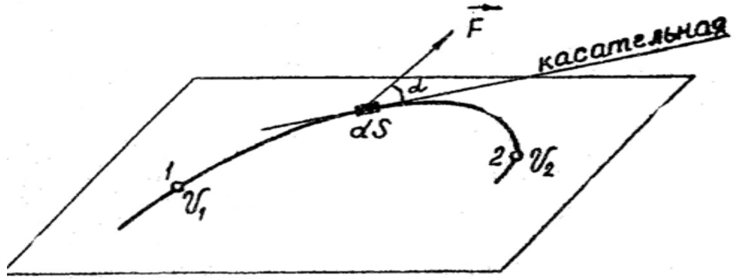

Рис.22

Мы знаем, что численное значение тангенциального ускорения равно производной от скорости по времени: $a_S = \dfrac{d\upsilon}{dt}$.

Тогда
$$dA = m\frac{d\upsilon}{dt}dS.$$

Но $\dfrac{dS}{dt} = \upsilon$ есть численное значение скорости в произвольный момент времени *t*. Следовательно,

$$dA = m\upsilon d\upsilon. \qquad (17.1)$$

Чтобы найти полную работу, совершаемую силой на всем пути от точки 1 (начальное состояние) до точки 2 (конечное состояние), надо сложить все элементарные работы, т.е. проинтегрировать выражение (17.1).

$$\int_1^2 dA = \int_1^2 m\upsilon d\upsilon.$$

Начальное состояние характеризуется скоростью υ_1, конечное - υ_2, поэтому пределы интегрирования 1-2 можно представить как υ_1 -- υ_2:

$$A_{12} = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\upsilon d\upsilon = \frac{m\upsilon^2}{2}\Bigg|_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} = \frac{m\upsilon_2{}^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}. \qquad (17.2)$$

Мы видим, что работа силы, изменяющей *величину* скорости тела равна *разности* двух значений физической величины $\frac{m\upsilon^2}{2}+C$, где C – некоторая произвольная постоянная. Величина $\frac{m\upsilon^2}{2}+C$ является *функцией состояния* тела, так как ее изменение *не зависит от пути перехода* тела из начального состояния 1 в конечное состояние 2, от способов, посредством которых достигнуто изменение скорости от значения υ_1 до значения υ_2. Иными словами, изменение этой величины не зависит от того, каковы были промежуточные состояния, быстро или медленно изменялась скорость тела, какая сила – постоянная или переменная – действовала на него, по какой траектории – прямолинейной или криволинейной – происходило движение и т.д. Если скорость тела массой m изменилась от υ_1 до υ_2, то это значит, что силы, действующие на тело, совершили за это время работу, величина и знак которой определяются разностью $\frac{m\upsilon_2^2}{2}-\frac{m\upsilon_1^2}{2}$. По изменению величины $\frac{m\upsilon^2}{2}+C$ можно судить о величине произведенной работы и, наоборот, по совершенной работе можно судить об изменении величины $\frac{m\upsilon^2}{2}+C$.

Функцию механического состояния, зависящую от скорости движения тела, называют *кинетической энергией:*

$$\frac{m\upsilon^2}{2}+C=E_K. \qquad (17.3)$$

Константа C должна быть определена. Из физических соображений ясно, что кинетическая энергия равна *нулю*, если равна нулю скорость тела $\upsilon = 0$. Отсюда следует, что $C = 0$. Следовательно,

$$E_K=\frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad (17.4)$$

Используя введенное обозначение, соотношение (17.2) можно переписать:

$$E_{K2} - E_{K1} = A_{12}, \tag{17.5}$$

где E_{K1} - кинетическая энергия тела в начальном состоянии;

E_{K2} - кинетическая энергия тела в конечном состоянии;

A_{12} - работа, совершаемая силой, действующей на тело, в процессе перехода его из начального состояния в конечное.

Обозначим $E_{K2} - E_{K1} = \Delta E_K$.

Тогда $$\Delta E_K = A_{12}. \tag{17.6}$$

2. В общем случае изменение скорости тела может быть обусловлено совместным действием *нескольких сил*. В этом случае под A_{12} в выражении (17.6) следует понимать *алгебраическую сумму работ,* совершаемых всеми силами:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} (A_i)_{12}. \tag{17.7}$$

Если скорость изменяется на бесконечно малую величину, то

$$dE_K = dA. \tag{17.8}$$

Таким образом, *приращение кинетической энергии тела при его переходе из одного состояния в другое равно алгебраической сумме работ, совершаемых всеми силами, действующими на него в процессе этого перехода.* Это утверждение носит название *теоремы об изменении кинетической энергии,* а соотношения (17.6) и (17.8) есть математические выражения (интегральное и дифференциальное) этой теоремы.

Из формулы (17.6) видно, что если работа силы, действующей на тело, *положительна,* то кинетическая энергия тела *возрастает* ($\Delta E_K > 0$), тело получает энергию от тех тел, которые являются «источником» силы, если эта работа *отрицательна*, то энергия *уменьшается* ($\Delta E_K < 0$), тело *отдает* энергию окружающим телам.

3. Обладая кинетической энергией, тело способно совершить работу, т.е. способно отдать эту энергию другим телам – заставить их двигаться, изменять скорость, деформироваться и т.д. В этом смысле говорят об энергии как о *способности тела совершать работу*. Максимум работы, которую может совершить тело в данной системе от-

счета благодаря тому, что оно перемещается, обладает скоростью, определяется запасом его кинетической энергии, т.е. величиной $\frac{m\upsilon^2}{2}$.

18 РАБОТА И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

1. Энергией тело обладает не только тогда, когда оно перемещается в пространстве, но и тогда, когда оно *взаимодействует* с другими телами. Силы взаимодействия, в принципе, могут вызывать перемещение, и тогда оно оказывается способным отдать свое движение другим телам, - иными словами, совершить работу. Но пока тело «неподвижно», его движение (энергия) внешне никак не проявляется, оно существует «скрыто», «втуне», поэтому можно говорить лишь о *потенциальных возможностях* этого тела передать свою энергию другим телам.

Энергию, которой обладает тело вследствие того, что оно взаимодействует с другими телами, и зависящую от взаимного расположения тел и их частей, как мы говорили, называют *потенциальной.*

Потенциальной энергией обладает, например, тело, поднятое над Землей, сжатая или растянутая пружина, заряженное тело, находящееся в электростатическом поле, и т.д. Следует, однако, подчеркнуть, что не всякое состояние и не всякое взаимодействие можно характеризовать потенциальной энергией. Состояние взаимодействующих тел можно характеризовать потенциальной энергией, если между ними действуют силы, величина и направление которых зависят только от *относительного расположения* тел (от координат) и не зависит от величины и направления скорости, иными словами, если эти силы *не зависят от времени* и не являются следствием движения. Мы убедим-ся в последующем, что таковыми являются, например, силы тяготения (тяжести), упругие силы, силы электростатического взаимодействия зарядов.

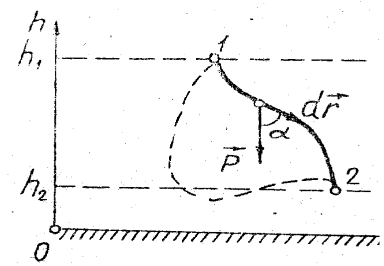

Рис.23

2. Найдем работу, которую совершает сила тяжести, действующая на некоторое тело при его перемещении по произвольному пути из точки 1, находящейся на высоте h_1 над поверхностью Земли, в точку 2, находящуюся на высоте h_2 (рис.23). Перемещение может

осуществляться как угодно – с постоянной или переменной скоростью – это не скажется на величине работы, совершаемой силой тяжести. Элементарная работа, совершаемая силой тяжести на бесконечно малом перемещении $d\vec{r}$, равна

$$dA = Pdr\cos\alpha \tag{18.1}$$

Полная работа $A_{12} = \int_1^2 Pdr\cos\alpha$.

Так как величина и направление силы тяжести в любой точке траектории остаются неизменными (что справедливо в случае, когда масштабы перемещения значительно меньше радиуса Земли: $h_1 \ll R_З$, $h_2 \ll R_З$), то ее можно вынести из-под знака интеграла:

$$A_{12} = P\int_1^2 dr\cos\alpha .$$

Произведение $dr\cos\alpha$ есть проекция вектора перемещения $d\vec{r}$ на направление h. Эта проекция *отрицательна* (так как направление оси h и направление вектора $d\vec{r}$ образуют *тупой угол*).

$$dr\cos\alpha = -d\,h .$$

Таким образом,

$$A_{12} = P\int_{h_1}^{h_2} -dh = -Ph\Big|_{h_1}^{h_2} = Ph_1 - Ph_2 = mgh_1 - mgh_2 . \tag{18.2}$$

Работа, совершаемая силой тяжести при изменении высоты тела *над поверхностью Земли, зависит только от начального и конечного положений* тела относительно Земли и не зависит от формы пути, по которому происходило перемещение из начальной точки 1 в конечную точку 2. Это значит, что если бы движение происходило по другой траектории, например, по траектории, изображенной на рис.23 пунктиром, то работа силы тяжести все равно была бы равна разности $mgh_1 - mgh_2$.

3. *Силы*, работа которых *не зависит от формы пути,* называются *консервативными.*

Силы, работа которых *зависит от формы пути,* называются *неконсервативными.*

Сила тяжести является, следовательно, консервативной силой.

Каждое из слагаемых выражения (18.2) должно быть представлено в виде $mgh + C$.

Величина $mgh + C$ является *функцией состояния* взаимодействующих тел (тела массы m и Земли). Она является таковой потому, что ее изменение не зависит от промежуточных состояний, от пути перехода тела из начального положения в конечное.

Следовательно, величину $mgh + C$ мы вправе назвать потенциальной энергией поднятого над Землей тела:

$$E_n = mgh + C. \tag{18.3}$$

4. Численное значение потенциальной энергии может быть определено лишь с точностью до некоторой произвольной постоянной C. Величина этой константы зависит от начала отсчета координат (в нашем случае от начала отсчета высот h) и от выбора так называемого *нулевого уровня потенциальной энергии.*

Выбор нулевого уровня потенциальной энергии – это выбор точки или уровня (поверхности), где *потенциальная энергия тела условно полагается равной нулю.*

Выбор начала отсчета координат произволен. Столь же произволен и выбор нулевого уровня потенциальной энергии. В принципе, его можно выбирать где угодно. Однако, практически этот уровень стремятся выбрать так, чтобы константа C обратилась в *нуль*.

Условимся в случае поднятого над Землей тела высоты отсчитывать от поверхности Земли, а потенциальную энергию тела считать равной нулю, когда оно лежит на этой поверхности, т.е. на высоте h =0. Подставив в (18.3) E_n =0 и h =0, найдем, что C =0.

При таком выборе нулевого уровня потенциальная энергия тела, поднятого на высоту h, равна

$$E_n = mgh. \tag{18.4}$$

(формула верна для $h \ll R_З$, где $R_З$ - радиус Земли).

Неопределенность численного значения потенциальной энергии не имеет принципиального значения, поскольку мы всегда имеем дело не с самой энергией, а с ее *изменениями.* При нахождении разности энергий произвольная постоянная *исключается.*

5. Потенциальная энергия может иметь как *положительное*, так и *отрицательное* численное значение.

Потенциальная энергия тела *отрицательна*, если при его перемещении из данной точки на нулевой уровень консервативные силы, действующие на него, совершают *отрицательную работу.* Рис.24 поясняет это.

6. Говоря об энергии – и кинетической, и потенциальной, следует иметь в виду, что энергия всегда характеризует *систему*, состоящую, по крайней мере, из двух тел, ибо лишено смысла говорить о движении или взаимодействии данного тела, если не указано другое тело, относительно которого данное тело движется или с которым оно взаимодействует.

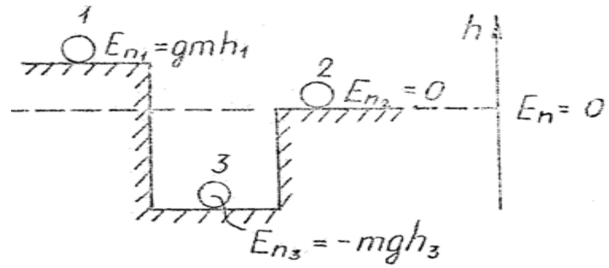

Рис.24

7. Итак, мы можем записать окончательно:

$$A_{12}=E_{n1}-E_{n2}=-\Delta E_n\,. \qquad (18.5)$$

Работа, совершаемая силой тяжести при изменении относительного расположения тела и Земли, равна убыли потенциальной энергии этой системы.

Если сила тяжести совершает *положительную* работу (A_{12} >0), то потенциальная энергия тела *уменьшается* ($E_{n2}<E_{n1}$). В этом случае говорят, что тело совершает работу за счет убыли потенциальной-энергии.

8. При изменении высоты тела над поверхностью Земли на бесконечно малую величину dh : $dA=-dE$ (18.6)

Мы рассмотрели потенциальную энергию, зависящую от взаимного расположения различных *макроскопических* тел.

9. Рассмотрим теперь потенциальную энергию, зависящую от взаимного расположения частей одного и того же тела.

В качестве такого тела рассмотрим упругую пружину.

Опыт показывает: для того, чтобы сжать (или растянуть) пружину, необходимо приложить внешнюю силу. Эта внешняя сила в процессе деформации пружины совершает работу. В результате потенциальная энергия пружины увеличивается.

Освобожденная от внешнего воздействия, пружина восстанавливает свою форму. При этом потенциальная энергия, запасенная пружиной в процессе деформации, превращается в другие виды энергии. Мерой энергии, превратившейся в другие виды, является величина работы, совершенной упругой силой. Вычислим работу, которую совершает упругая сила, при изменении удлинения (деформации) пружины от величины x_1 до величины x_2 ($x_1 > x_2$). Вычислим сначала работу на бесконечно малом перемещении dx (так как упругая сила – величина переменная)

$$dA = F_x dx,$$

где F_x - проекция упругой силы на ось x.

По закону Гука

$$F_x = -kx.$$

Следовательно, $$dA = -kxdx \qquad (18.7)$$

Полная работа при изменении длины пружины на конечную величину Δx равна:

$$A_{12} = -\int_{x_1}^{x_2} kxdx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \qquad (18.8)$$

Полученная работа вновь не зависит от того, как произошло изменение длины пружины. *Упругая сила,* так же как сила тяжести*, консервативна*, а разность $\frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$ есть разность двух значений (начального и конечного) потенциальной энергии пружины:

$$A_{12} = E_{n1} - E_{n2}, \qquad (18.9)$$

где $$E_{n1} = \frac{kx_1^2}{2} + C \quad \text{и} \quad E_{n2} = \frac{kx_2^2}{2} = C.$$

C - константа, зависящая от выбора состояния пружины, при котором ее потенциальную энергию можно считать равной нулю. Обычно считают равной нулю потенциальную энергию недеформированной пружины ($x = 0$). Тогда $C = 0$ и, следовательно,

$$E_n = \frac{kx^2}{2}. \qquad (18.10)$$

Мы рассмотрели потенциальную энергию одного из видов деформации – *линейного растяжения или сжатия*. Заметим, что формулы потенциальной энергии других видов упругой деформации (кручения, сдвига, изгиба и т.д.) будут иметь точно такой же вид, если под k понимать коэффициент жесткости тела по отношению к конкретному виду деформации, а под x - меру этой деформации (например, угол закручивания, стрелу прогиба и т.д.).

11. Вид формул, выражающих потенциальную энергию взаимодействия, обусловленного другими консервативными силами, зависит от *природы* этих сил и *характера их зависимости от координат* (с некоторыми из этих формул мы в последующем ознакомимся).

12. Тело одновременно может обладать и кинетической, и потенциальной энергией. Следовательно, в общем случае полная механическая энергия тела складывается из кинетической и потенциальной энергии:

$$E = E_k + E_n. \qquad (18.11)$$

13. Энергия, так же как и работа, в системе СИ измеряется *в джоулях*.

19 СВЯЗЬ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ С СИЛОЙ

Между потенциальной энергией системы взаимодействующих тел и консервативной силой, обусловливающей наличие этой энергии, существует вполне определенная связь. Установим эту связь.

1. Если в каждой точке пространства на тело действует консервативная сила, то говорят, что оно находится в *потенциальном поле.*

2. При изменении положения тела в этом поле потенциальная энергия тела изменяется, при этом консервативная сила совершает вполне определенную работу. Выразим эту работу обычным образом.

Будем полагать, что тело переместилось в произвольном направлении r на бесконечно малое расстояние dr (рис.25). Тогда

$$dA = Fdr\cos\alpha = F_r dr, \qquad (19.1)$$

где $F_r = F\cos\alpha$ - проекция вектора силы на направление r. Но

$$dA = -dE_n \qquad (19.2)$$

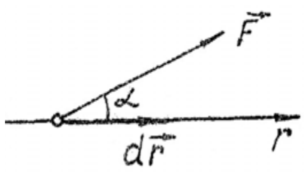

Рис.25

Приравнивая правые части выражений (19.1) и (19.2), получим: $F_r\,dr = -dE_n$,

откуда $F_r = -\dfrac{dE_n}{dr}$. (19.3)

$\dfrac{dE_n}{dr}$ есть производная потенциальной энергии по направлению r; эта величина показывает, *насколько быстро изменяется потенциальная энергия вдоль этого направления.*

Таким образом, *проекция силы* на произвольное направление равна по величине и противоположна по знаку *производной от потенциальной энергии по этому направлению.*

Выясним смысл знака «минус». Если в направлении r потенциальная энергия возрастает ($\dfrac{dE_n}{dr} > 0$), то согласно (19.3) $F_r < 0$. Это значит, что направление силы $\vec{F}$ образует с направлением r *тупой угол*, следовательно, составляющая этой силы, действующая вдоль r, противоположна направлению r. И наоборот, если $\dfrac{dE_n}{dr} < 0$, то проекция $F_r > 0$, угол между силой $\vec{F}$ и направлением r *острый,* составляющая этой силы, действующая вдоль r, совпадает с направлением r.

3. В общем случае потенциальная энергия может изменяться не только в направлении r, но и в любом другом направлении. Можно рассматривать, например, изменения E_n вдоль осей x, y, z декартовой системы координат.

Тогда $$F_x = -\frac{\partial E_n}{\partial x};\, F_y = -\frac{\partial E_n}{\partial y};\, F_z = -\frac{\partial E_n}{\partial z}. \qquad (19.4)$$

(значок $\dfrac{\partial}{\partial x}$ означает, что берется *частная* производная).

Зная проекции силы F_x, F_y, F_z, легко найти вектор силы:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} = F_z\vec{k}\,. \qquad (19.5)$$

Учитывая (19.4) будем иметь:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_n}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_n}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_n}{\partial z} \vec{k} \right). \qquad (19.6)$$

Вектор, стоящий в правой части соотношения (19.6), называется *градиентом* величины E_n и обозначается $grad\ E_n$.

Следовательно,

$$\vec{F} = -\,gr\vec{ad}\ E_n .$$

(19.7)

Консервативная сила, действующая на тело, равна по величине и противоположна по направлению градиенту потенциальной энергии этого тела. Градиент потенциальной энергии – это вектор, указывающий направление быстрейшего возрастания потенциальной энергии и численно равный изменению энергии, приходящемуся на единицу длины этого направления.

При перемещении тела в *направлении* действия консервативной силы $\vec{F}$ совершается *максимальная* работа (так как $\cos\left(\vec{F},\hat{}\ d\vec{r}\right)$=1). Но $dA = -dE_n$. Следовательно, направление силы $\vec{F}$ указывает направление быстрейшего *уменьшения потенциальной энергии.*

20 ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

1. Потенциальная энергия является *функцией координат*. В некоторых простейших случаях она зависит только от одной координаты (например, в случае поднятого над Землей тела E_n зависит только от высоты h). Зависимость потенциальной энергии системы от той или иной координаты может быть представлена *графически.*

График, изображающий зависимость потенциальной энергии от соответствующей координаты, называют *потенциальной кривой.*

Проанализируем одну из возможных потенциальных кривых (рис.26). Кривая $E_n(x)$, изображенная на рисунке, показывает, как изменяется потенциальная энергия системы частиц, если одна из частиц перемещается вдоль оси x, а все остальные остаются на своих местах. Каждая точка графика дает возможность определить E_n системы, соответствующую координате частицы x.

2. По наклону потенциальной кривой можно судить о величине и направлении силы, действующей на частицу вдоль соответствующего направления. Величина и знак проекции этой силы на рассматриваемое направление определяется величиной и знаком тангенса угла наклона касательной к кривой E_n в соответствующих точках; в нашем случае

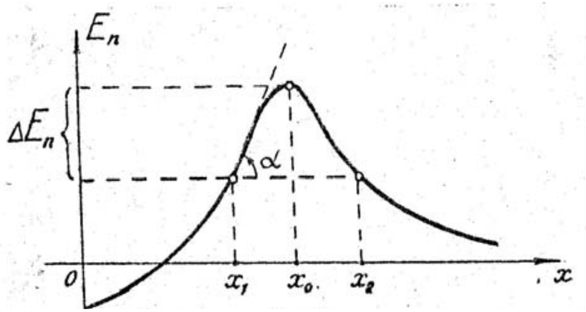

Рис.26

$$F_x = -\frac{dE_n}{dx} = -tg\alpha , \qquad (20.1)$$

так как $\frac{dE_n}{dx} = tg\alpha$.

Таким образом, чем *круче* идет потенциальная кривая, тем *больше сила,* действующая на частицу вдоль соответствующего направления. На восходящих участках потенциальной кривой тангенсы углов наклона касательных положительны, следовательно, проекция силы *отрицательна.* Это значит, что направление силы, действующей *вдоль данной оси, противоположно* направлению этой оси, сила препятствует удалению частицы из системы (рис.26, точка x_1).

В точках же, соответствующих *нисходящим* участкам потенциальной кривой, проекции силы *положительны*, сила способствует движению частицы вдоль данного направления (точка x_2). В точках, в которых $tg\alpha$ =0, сила на частицу не действует (точка x_0).

3. Если же при удалении одной из частиц (в любом направлении) потенциальная энергия системы резко *возрастает* (потенциальная кривая «взмывает» вверх), то говорят о существовании *потенциального барьера.* Говорят о *высоте* барьера и его ширине в соответствую-

щих местах. Так, если частица находится в точке с координатой x_1 (рис.26), то ее потенциальная энергия равна E_{n1}, высота потенциального барьера для нее ΔE_n, ширина барьера $\Delta x = x_2 - x_1$. Если потенциальный барьер встречается на пути частицы при ее движении, как в положительном, так и в отрицательном направлении выбранной оси, то говорят, что частица находится в *потенциальной яме*. Форма и глубина потенциальной ямы зависит от природы сил взаимодействия и конфигурации системы.

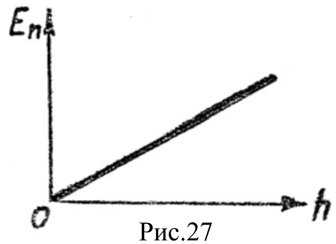

Рис.27

4. Приведем некоторые примеры. На рис.27 изображена потенциальная кривая тела, поднятого над Землей. Как известно, потенциальная энергия такого тела зависит только от одной координаты – высоты h: $E_n = Ph$.

Проекция силы тяжести на ось h равна $P_h = -\dfrac{dE_n}{dh} = -P$.

Знак «минус» означает, что направление силы тяжести противоположно направлению оси h. На рис.28 изображена потенциальная кривая тела, скрепленного с пружиной и совершающего колебания. Как видно из рисунка, такое тело находится в потенциальной яме с симметричными стенками. Потенциальная энергия этого тела и проекция силы, действующей на него, равны соответственно:

$$E_n = \frac{kx^2}{2}, F_x = -\frac{dE_n}{dx} = -kx.$$

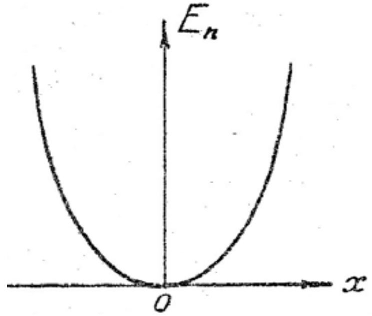

Рис.28

Кривая, изображенная на рис.29, характерна для взаимодействия атомов и молекул в твердом теле. Особенностью этой кривой является то, что она асимметрична; один край ее крутой, другой – пологий.

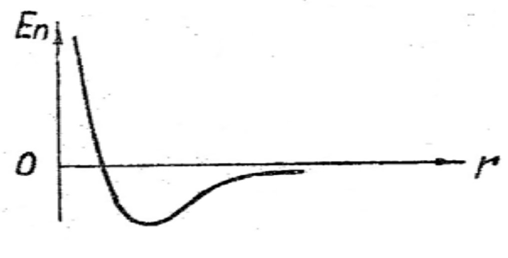

Рис.29

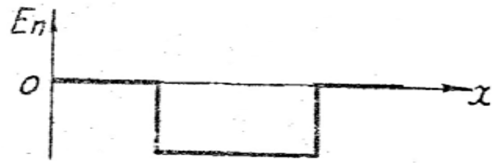

Рис.30

Наконец, кривая на рис.30 характеризует, в первом приближении, потенциальную энергию свободных электронов в металле. Стенки этой ямы почти вертикальны. Это значит, что сила, действующая на электроны на границе металла, весьма велика.

Гладкое горизонтальное дно ямы означает, что на электроны внутри металла сила не действует.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Определить работу по сжатию пружины железнодорожного вагона на 5 *см,* если под действием силы $F_0 = 3 \cdot 10^4 H$ пружина сжимается на $x_0 = 1 см$.

Решение. Пренебрегая массой пружины, можно считать, что при ее сжатии действует только переменная сила давления, равная по величине упругой силе, определяемой по закону Гука $|F| = kx$. Работу этой силы при сжатии пружины на 5 *см* надо определить. Считая на малом перемещении dx силу постоянной, определим элементарную работу как

$$dA = Fdx = kxdx .$$

Здесь коэффициент жесткости пружины равен $k = \frac{F_0}{x_0}$.

Всю работу найдем взяв интеграл от dA в пределах от $x_1 = 0$ до

$x_2 = 5$ *см.*

$$A = \int dA = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} = \frac{kx_2^2}{2} = \frac{F_0 x_2^2}{2x_0}.$$

После вычислений будем иметь

$$A = \frac{3 \cdot 10^4 (5 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 3750(\textit{Дж}).$$

Пример 2. Самолет массы m=3 *т* для взлета должен иметь скорость υ=360 *км/ч* и длину разбега S=600 *м.* Какова должна быть минимальная мощность мотора, необходимая для взлета самолета? Коэффициент трения k колес о землю равен 0,2. Движение при разгоне самолета считать равноускоренным.

Решение. В задаче требуется определить *мгновенную* мощность мотора *в момент взлета* самолета. Она и будет являться той минимальной мощностью, при которой самолет может еще набрать скорость, необходимую для взлета.

$$N_{\min} = F_{тг}\upsilon .$$

Силу тяги $F_{тг}$ определим из уравнения (второй закон динамики)

$$ma = F_{тг} - f_{тр} = F_{тг} - kmg$$

Ускорение найдем из уравнения равнопеременного движения

$$\upsilon^2 = 2aS ;$$

$$a = \frac{\upsilon^2}{2S}$$

С учетом сделанных замечаний минимальная мощность равна

$$N_{\min} = m\left(\frac{\upsilon^2}{2S} + kg\right)\upsilon \approx 3000(\kappa Bm) .$$

Пример 3. Скорость реактивного самолета на некотором участке меняется с расстоянием по закону $\upsilon = D + Bs$. Найти работу за промежуток времени (t_1, t_2), если масса самолета m. В момент времени t_1 скорость равна υ_1.

Решение. Примем, что работа равна разности кинетических энергий в моменты времени t_2 и t_1, т.е. $A=\dfrac{m\upsilon_2^2}{2}-\dfrac{m\upsilon_1^2}{2}$. Необходимо определить закон изменения скорости со временем. Ускорение самолета $a=\dfrac{d\upsilon}{dt}=B\dfrac{ds}{dt}=B\upsilon.$ Откуда $\dfrac{d\upsilon}{\upsilon}=Bdt$. После интегрирования и потенцирования последнего выражения получим, что скорость в момент времени t_2 равна

$$\upsilon_2=\upsilon_1 e^{B(t_2-t_1)}.$$

Таким образом работа, за заданный промежуток времени, равна

$$A=\frac{m\upsilon_2^2}{2}-\frac{m\upsilon_1^2}{2}=\frac{m\upsilon_1^2}{2}\left[e^{2B(t_2-t_1)}-1\right]$$

Пример 4. Тело массой m под действием постоянной силы ветра движется прямолинейно, причем зависимость пройденного пути от времени меняется по закону $s=At^2+Bt+C$. Найти работу силы ветра за промежуток времени от 0 до *t.*

Решение. Работа силы ветра при малом перемещении тела равна $dA=F_s ds$, где перемещение найдем как производную от пути по времени, т.е. $ds=(2At+B)dt.$ Сила по второму закону динамики равна

$$F_s=ma=m\frac{d^2s}{dt^2}=2mA.$$

Полная работа за промежуток времени от 0 до *t* равна интегралу от dA

$$A=\int dA=\int_0^t 2mA(2At+B)dt=\int_0^t 4mA^2tdt+\int_0^t 2mABdt=2mAt(At+B).$$

Пример 5. Шар массой $m_1=2кг$ движется со скоростью $\upsilon_1=5м/с$ навстречу шару массой $m_2=3кг$, движущемуся со скоростью $\upsilon_2=10м/с$. Найти величину и объяснить причину изменения кинетической энергии системы шаров после неупругого центрального удара.

Решение. Энергия системы шаров до удара

$$E_1 = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}.$$

После неупругого удара шары будут двигаться с одинаковой скоростью u, которую найдем, применяя закон сохранения импульса

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)u .$$

Откуда

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$

Энергия системы шаров после удара

$$E_2 = (m_1 + m_2)\frac{u^2}{2} .$$

Убыль кинетической энергии после удара

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} - (m_1 + m_2)\frac{(m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1 m_2(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Изменение кинетической энергии расходуется на деформацию и в конечном счете на нагревание шаров:

$$\Delta E = \frac{2\cdot 3(5+10)^2}{2(2+3)} = 135(Дж).$$

Пример 6. Автомобиль массой $m = 100кг$, движущийся по горизонтальному участку пути со скоростью $\upsilon = 30км/час$, развивает мощность, равную $N = 22кВт$. Какую мощность должен развивать автомобиль при движении его в гору с уклоном 10^0 с той же скоростью?

Определить крутизну спуска (угол наклона), по которому автомобиль будет идти со скоростью 30 *км/час*, при выключенном моторе.

Решение. 1) Мощность автомобиля при движении в гору будет определяться силой тяги и скоростью движения

$$N_1 = F_{тг}\upsilon = (F_{тр} + F_{ск})\upsilon .$$

Сила трения определяется как $F_{тр} = kP_n$, где сила нормального давления на наклонной плоскости $P_n = mg\cos\alpha$. Если считать коэффициент трения одинаковым на всем пути движения, то на горизонтальном участке он равен $k = \dfrac{F'_{тр}}{mg}$. Сила трения может быть найдена из соотношения (при равномерном горизонтальном движении) $N = F'_{тр}\,\upsilon$, т.е. $F'_{тр} = \dfrac{N}{\upsilon}$ и $k = \dfrac{N}{mg\upsilon}$. Тогда сила трения на наклонной плоскости

$$F_{тр} = kP_n = \frac{Nmg\cos\alpha}{mg\upsilon} = \frac{N}{\upsilon}\cos\alpha.$$

Скатывающая сила равна $F_{ск} = mg\sin\alpha$. С учетом сделанных замечаний мощность автомобиля, движущегося в гору будет равна

$$N_1 = (\frac{N}{\upsilon}\cos\alpha + mg\sin\alpha)\upsilon = N\cos\alpha + mg\upsilon\sin\alpha.$$

Подставим данные задачи

$N_1 = 22000\cdot 0{,}98 + 100\cdot 9{,}8\cdot 8{,}3\cdot 0{,}17 = 23084 \approx 23{,}1(кВт)$

2) При движении под гору при выключенном двигателе сила тяги равна нулю. Действуют только скатывающая сила $F_{ск} = mg\sin\alpha$ и сила трения $F_{тр} = kP_n = \dfrac{N}{\upsilon}\cos\alpha.$ С учетом их направления

$$mg\sin\alpha - \frac{N}{\upsilon}\cos\alpha = 0\ ,$$

откуда $\alpha = arctg\,\dfrac{N}{mg\upsilon}$; $\alpha = arctg\,\dfrac{22000}{100\cdot 9{,}8\cdot 8{,}3} = arctg 2{,}7 \approx 15^0$.

Таким образом, крутизна спуска равна 15^0.

Пример 7. Тяжелый шарик соскальзывает без трения по наклонному желобу, образующему ”мертвую петлю” радиуса *R*. С какой высоты шарик должен начать движение, чтобы не оторваться от желоба в верхней точке траектории?

Решение. Дана задача о неравномерно переменном движении материальной точки по окружности. Причем в процессе движения изменяется положение тела по высоте. Такие задачи решаются с применением закона сохранения энергии и составлением уравнения по второму закону динамики для направления нормали. Так как для замкнутой системы энергия остается неизменной, то запишем это в виде $E_1 = E_2$.

Примем за начальное положение шарика начало движения, за конечное – положение в верхней точке траектории. Уровень отсчета высоты установим от поверхности стола.

Энергия шарика в первом положении $E_1 = mgh$, во втором положении $E_2 = \frac{m\upsilon^2}{2} + mg2R$. Следовательно $mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + mg2R$, откуда

$$\upsilon^2 + 4gR - 2gh = 0. \qquad (1)$$

Для определения h необходимо знать скорость шарика в верхней точке. При этом учтем, что в верхней точке петли на шарик в общем случае действуют вниз две силы – сила тяжести P и сила реакции со стороны опоры N. Под действием этих сил шарик движется по окружности, т.е.

$$P + N = \frac{m\upsilon^2}{R}.$$

При спуске с достаточно большой высоты шарик приобретает такую скорость, что в каждой точке петли давит на желоб с некоторой силой P_n. По третьему закону Ньютона желоб действует на шарик с такой же по величине силой N в противоположную сторону и отжимает его на дугу окружности радиуса R.

По мере уменьшения начальной высоты скорость шарика уменьшается и при некотором значении h становится такой, что он пролетает верхнюю точку петли, лишь касаясь желоба. Для такого предельного случая $N = 0$ и уравнение второго закона динамики примет вид

$$P + 0 = \frac{m\upsilon^2}{R} \quad \text{или} \quad mg = \frac{m\upsilon^2}{R},$$

откуда

$$\upsilon^2 = gR \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1) и решая последнее уравнение относительно h, получим

$$h = 2{,}5R.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ.

1. Что называется энергией? Что называется кинетической энергией? Что называется потенциальной энергией?
2. Что такое работа? Как вычисляется работа постоянной и переменной силы?
3. Что такое мощность?

4. Какова связь между механической работой и кинетической энергией?
5. Докажите, что сила тяжести является консервативной силой.
6. Какова связь между работой консервативных сил и потенциальной энергией?
7.Что такое нулевой уровень потенциальной энергии? Как он выбирается?
8. Какова связь между потенциальной энергией тела и консервативной силой, действующей на него?
9. Что такое потенциальная яма и потенциальный барьер?

ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Савельев И. В. Курс общей физики: в 3 т.; учебное пособие для вузов. т.1: Механика. Молекулярная физика. /И.В. Савельев.-4-е изд. стер.-СПб.: Лань, 2005.

Зисман Г. А. Курс общей физики. Т.1 /Г.А. Зисман, О.М.Тодес.– М.:Наука,1972.

Детлаф А. А. Курс физики: учебное пособие для втузов. /А.А. Детлаф, Б.М. Яворский.-4-е изд., испр.- М.: Высш.шк.,2002.- 718 с.

Трофимова Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов. /Т.И.Трофимова.- 7-е изд., стер.- М.: Высш. шк., 2001.- 541 с.

Чертов А.Г. Задачник по физике: учебное пособие для втузов./А.Г.Чертов, А.А.Воробьев.- 8-е изд., перераб. и доп.- М.: Физматлит, 2006.- 640 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное пособие

БАРСУКОВ Владимир Иванович

ФИЗИКА

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Конспект лекций

Издано в авторской редакции

Подписано к печати
Формат 60х84/16 Бумага офсетная. Печать офсетная
Гарнитура Times New Roman Объем 5,8 усл. печ. л.
Тираж 000 экз. Заказ ООО

Отпечатано с готового оригинал-макета
ЗАО «НПО ПК «Спектр»

ФИЗИКА

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

• ТАМБОВ •