Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Тамбовский государственный технический университет»

ФИЗИКА

МЕХАНИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ЖИДКОСТИ И КОЛЕБАНИЙ

Конспект лекций

*Утверждено Ученым советом ТГТУ
в качестве учебного пособия*

Тамбов
2008

УДК 535. 338 (0765)

ББК В 36 я 73-5

Р е ц е н з е н т ы:

Д. п. н., профессор,
заведующий кафедрой теоретической механики ТГТУ
Н.Я.Молотков
Д. ф.-м. н., профессор,
заведующий кафедрой прикладной математики ТГТУ
Г.М.Куликов

Б261 Физика. Механика абсолютно твердого тела, жидкости и колебаний.: конспект лекций / авт.-сост. В.И.Барсуков. Тамбов: Тамб. гос. техн. ун-т, изд-во ООО « Центр-пресс », 2008.- 124с.

Предлагаемое учебное издание представляет собой конспект лекций по разделу “Физические основы механики” курса общей физики, читаемого в соответствии с Государственным стандартом для высших технических учебных заведений.

Оно предназначено для студентов первых курсов всех специальностей инженерного профиля дневного и заочного отделений.

УДК 535. 338 (0765)
ББК В 36я 73-5

МЕХАНИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

1 ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. *Абсолютно твёрдым* телом называется тело, деформациями которого в данной задаче можно пренебречь. При движении абсолютно твердое тело выступает как единое целое.

2. Любое сколь угодно сложное движение твёрдого тела может быть сведено к сумме двух простейших движений - поступательного и вращательного.

3. *Поступательным движением твёрдого тела* называется такое движение, при котором *любая прямая,* проведенная в теле, сохраняет неизменное направление в пространстве, т.е. *перемещается параллельно самой себе.*

По *форме* траектории поступательное движение может быть как прямолинейным, так и криволинейным (например, каждая точка кабины “колеса обозрения” (рис.1) движется по криволинейной траектории - по окружности).

Поступательное движение твёрдого тела называется плоским, если любая точка или частица тела во время движения описывает плоскую *траекторию.*

При поступательном движении все точки твердого тела за один и тот же промежуток времени совершают *одинаковые* (равные по величине и направлению) перемещения. Следовательно, при поступательном движении скорости и ускорения всех точек тела в любой момент времени также одинаковы. Поэтому, чтобы описать поступательное движение абсолютно твёрдого тела, достаточно определить движение одной из его точек.

4. *Вращательным движением твёрдого тела* вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, назы-

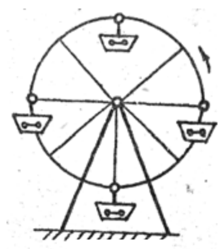


Рис.1

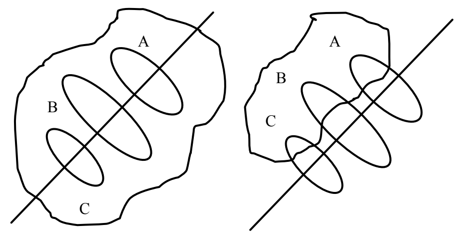


Рис.2

ваемой *осью вращения*.

Ось вращения может проходить сквозь тело или лежать за его пределами (рис.2). Если ось вращения проходит сквозь тело, то те точки тела, которые лежат на этой оси, во время движения тела остаются в покое.

Вращательное движение вокруг неподвижной оси всегда является плоским движением.

2 КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

1. При вращательном движении твёрдого тела все его точки двигаются по окружностям (рис.3). При этом радиус-векторы, проведенные из центров соответствующих окружностей к точкам тела, за равные промежутки времени поворачиваются на один и тот же угол. Угол поворота $\Delta\varphi$ любого из радиус-векторов определяет *угловой путь,* пройденный телом за данный промежуток времени Δt. При этом *угол* $\Delta\vec{\varphi}$ является *аксиальным вектором*, направленным вдоль оси вращения с учетом правила правого винта.

2. Быстроту *изменения* углового пути с течением времени характеризует *угловая скорость*. По аналогии с линейной скоростью вводят среднюю и истинную угловые скорости. Средняя угловая скорость с учётом того, что угол $\vec{\varphi}$ является вектором, тоже есть вектор

$$\vec{\omega}_{cp} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} \tag{2.1}$$

Истинная (мгновенная) угловая скорость

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \tag{2.2}$$

Оба вектора направлены вдоль оси вращения (рис.4-*а, б*)

3. Быстроту *изменения угловой скорости* характеризует *угловое ускорение* – среднее и мгновенное. Среднее угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon}_{cp} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \tag{2.3}$$

Мгновенное ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{2.4}$$

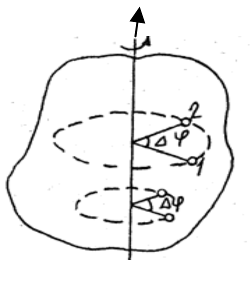


Рис.3

Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ - вектор, направление которого либо совпа-

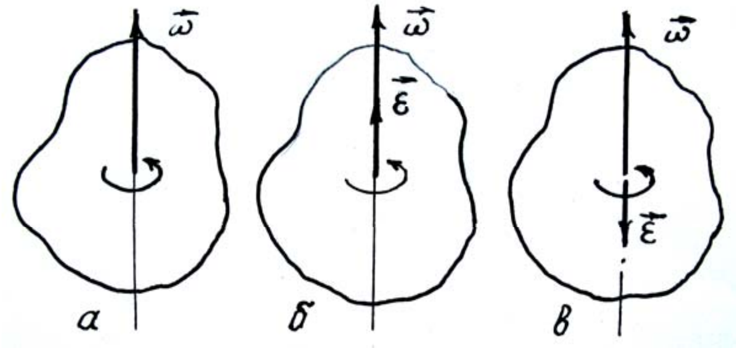


Рис.4

дает с направлением угловой скорости (при *ускоренном* вращении), либо *противоположно* ему (при *замедленном* вращении) рисунок 4 - *б* и *в*.

4. Угловой путь $\vec{\varphi}$, угловая скорость $\vec{\omega}$, угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ при равнопеременном вращении связаны между собой формулами, по внешнему виду напоминающими формулы прямолинейного равнопеременного движения (в скалярном виде):

$$\omega_t = \omega_0 \pm \varepsilon t \tag{2.5}$$

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} \tag{2.6}$$

$$\omega_t^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi \tag{2.7}$$

где ω_t - угловая скорость в данный момент времени;

ω_0 - начальная угловая скорость.

5. Угловой путь в системе СИ измеряется в радианах (*рад.*), угловая скорость - в радианах в секунду $\left(\frac{рад}{сек}\right)$, угловое ускорение - в радианах в секунду за секунду $\left(\frac{рад}{сек^2}\right)$.

6. Кроме угловых характеристик, движение *каждой* точки вращающегося тела характеризуют обычные линейные величины: линей-

ный путь S, линейная скорость υ, линейные ускорения – тангенциальное a_τ и нормальное a_n. Установим связь между линейными и угловыми характеристиками. Как известно, дуга окружности связана с радиусом этой окружности соотношением: $ds = rd\varphi$, где $d\varphi$ - центральный угол, образованный радиусами, проведёнными к концам дуги.

Угловая скорость $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{1}{r}\dfrac{ds}{dt}$, но $\dfrac{ds}{dt} = \upsilon$.

Следовательно, $\omega = \dfrac{\upsilon}{r}$, откуда

$$\upsilon = \omega r \tag{2.8}$$

Аналогично

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{a_\tau}{r}$$

где $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ - тангенциальное ускорение точки, откуда

$$a_\tau = \varepsilon r \tag{2.9}$$

И, наконец, нормальная составляющая ускорения

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{r} = \omega^2 r \tag{2.10}$$

7. Равномерное вращение тела вокруг оси характеризуется еще периодом обращения T и частотой обращения ν, n.

Период обращения - это промежуток времени, в течение которого тело совершает один оборот. Угол поворота за это время равен 2π. Следовательно,

$$\omega = \frac{\varphi}{T} = \frac{2\pi}{T} \tag{2.11}$$

Частота обращения – число оборотов, совершаемых за единицу времени - ν или n

$$\nu = n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{2.12}$$

Откуда

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi n \tag{2.13}$$

Векторное изображение названных величин показано на рисунке 5.

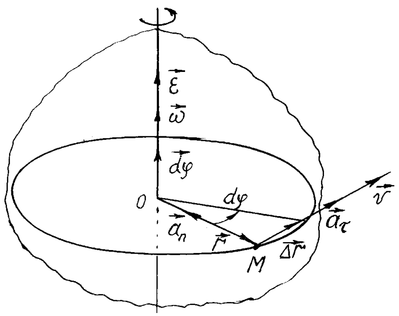


Рис.5

3 ЦЕНТР ИНЕРЦИИ (ЦЕНТР МАСС) ТВЁРДОГО ТЕЛА

1. Разбив твёрдое тело на отдельные малые элементы, мы можем рассматривать его как систему материальных точек, взаимное расположение которых не изменяется.

На каждый элемент тела могут воздействовать, во-первых, другие элементы этого же тела, во-вторых, внешние тела. Назовем силы взаимодействия элементов друг с другом *внутренними*, силы, действующие со стороны внешних тел - *внешними*. Обозначим массу *i*-го элемента через dm_i, его ускорение через $\vec{a_i}$. По второму закону Ньютона:

$$dm_i \vec{a_i} = d\vec{f_i} + d\vec{F_i} \qquad (3.1)$$

где $d\vec{f_i}$ - результирующая всех внутренних сил, действующих на элемент dm_i; $d\vec{F_i}$ - результирующая всех внешних сил, действующих на элемент dm_i Проинтегрируем выражение (3.1) по всем элементам dm_i. Учтём при этом, что сумма всех внутренних сил равна нулю (в эту сумму попарно войдут все силы действия и противодействия между элементами, равные между собой по третьему закону Ньютона). Тогда:

$$\int_0^m dm_i \vec{a_i} = \vec{F} \qquad (3.2)$$

где $\vec{F} = \int d\vec{F_i}$ - результирующая всех внешних сил, действующая на всё тело в целом.

При *поступательном* движении твёрдого тела все его элементы приобретают *одинаковые* ускорения. Следовательно,

$$\int_0^m dm_i \vec{a_i} = m\vec{a} \qquad (3.3)$$

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Таким образом*, поступательное движение твердого тела может быть заменено движением одной материальной точки, масса которой равна массе тела.*

При непоступательном движении ускорения отдельных элементов *dm разные*, поэтому ускорение $\vec{a_i}$ при интегрировании выражения (3.2) выносить из-под знака интеграла нельзя, Однако и в этом случае интеграл, стоящий в левой части соотношения (3.2), можно заменить произведением массы тела на ускорение некоторой точки *C,* определяемой из уравнения:

$$m\overrightarrow{a_c} = \int_0^m dm_i \overrightarrow{a_i} \qquad (3.4)$$

Точка C, определяемая условием (3.4) , называется *центром инерции* или *центром масс тела*. В однородном поле тяготения эта точка совпадает с центром тяжести тела.

Таким образом,

$$m\overrightarrow{a_c} = \vec{F} \qquad (3.5)$$

Центр инерции твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, если бы к ней были приложены все внешние силы, действующие на тело.

Радиус-вектор центра масс $\vec{r}_c$ твердого тела (системы материальных точек) определяется по формуле

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i, \qquad (3.6)$$

где $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – общая масса тела (системы точек), $\vec{r}_i$ – радиус-вектор каждой точки.

Если результирующая внешних сил равна нулю $\left(\vec{F} = 0\right)$, то и ускорение центра инерции равно *нулю*. Внутренние силы не могут изменить скорость движения центра масс: в отсутствие внешних сил он либо движется равномерно и прямолинейно, либо покоится.

Понятие центра масс применимо не только к отдельным телам, но и к целой совокупности взаимодействующих тел, например, к частям разорвавшегося снаряда, к двойным звёздам, к солнечной системе и т.д.

4 МОМЕНТ СИЛЫ. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

1. Вращательное действие силы (сообщение телу *углового* ускорения) зависит не только *от величины силы*, но и от того, в каком *направлении* она действует и к *какой точке* тела приложена. Величиной, которая учитывает все эти *факторы*, является *момент силы*. Дадим определение момента силы относительно *оси* (существует определение момента относительно *точки*).

Пусть на твёрдое тело, имеющее неподвижную ось вращения, в произвольном направлении действует сила $\vec{F}$ (рис.6-а). Разложим эту силу на две составляющие: $\vec{F}_{\perp}$, лежащую в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, и $\vec{F}_{//}$ — параллельную оси вращения.

Сила $\vec{F}_{//}$ вращательного движения вызвать не может, она лишь деформирует тело (стремится сдвинуть его вдоль оси).

Вращательное действие оказывает только составляющая $\vec{F}_{\perp}$. *Моментом силы* $\vec{F}$ относительно оси называется физическая величина, численно равная произведению величины составляющей этой силы $\vec{F}_{\perp}$, действующей в плоскости, перпендикулярной оси вращения, на плечо этой составляющей, т.е. на кратчайшее расстояние h от оси вращения до линии её действия (рис.6 -б).

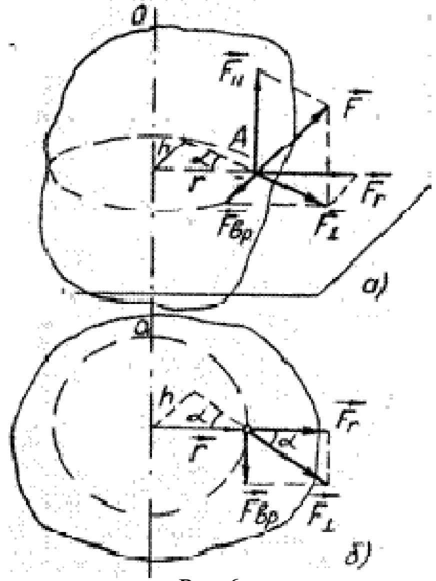


Рис.6

$$M = hF_{\perp} = r\sin\alpha F_{\perp} = rF_{\perp}\sin\alpha, \qquad (4.1)$$

где r - расстояние от оси вращения до точки приложения силы. Если сила действует в *плоскости, перпендикулярной оси вращения,* то момент этой силы равен произведению самой силы на плечо.

$$M = hF = rSin\alpha F\ . \qquad (4.2)$$

Вращательное действие, в конечном счете, вызывает только составляющая $F_{вр} = F_{\perp} Sin\alpha$, поэтому ее можно назвать *вращательной составляющей,* отсюда и индекс - *вр*. Составляющая $\vec{F}_r$ направлена перпендикулярно к оси вращения и стремится ее деформировать, вращения не вызывает (рис.6,б).

Момент силы относительно оси – вектор, направленный *вдоль* этой *оси.* Направление момента совпадает с направлением поступательного движения правого буравчика, если ось буравчика совпадает с осью вращения тела, а рукоятка поворачивается по направлению силы (рис.7). Произведение $rF_{\perp}\sin\alpha$ есть численное значение векторного

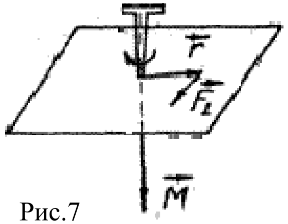


Рис.7

произведения радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного от оси вращения к точке приложения силы $\vec{F}_\perp$, и силы $\vec{F}_\perp$. Следовательно,

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}_\perp] \qquad (4.3)$$

2. Установим связь между моментом сил, действующих на вращающееся твёрдое тело, и угловым ускорением этого тела.

Выделим в рассматриваемом теле элемент dm_i. Радиус окружности, по которой движется этот элемент, обозначим через $\vec{r_i}$. Пусть сила, действующая на этот элемент в плоскости, перпендикулярной оси вращения тела, равна $d\vec{F_i}$. Разложим эту силу на две составляющие: касательную $d\vec{F_{i\tau}}$ и нормальную $d\vec{F_{i\,n}}$ (рис.8). Первая из них сообщает выделенному элементу касательное ускорение $\vec{a_{i\tau}}$, вторая - нормальное $\vec{a_{in}}$. По второму закону Ньютона

$$dm_i a_{i\tau} = dF_{i\tau} \qquad (4.4)$$

Как видно из рисунка 8 $dF_{i\tau} = dF_i \cos\alpha_i$. Тангенциальное и угловое ускорения связаны соотношением (2.9): $a_{i\tau} = \varepsilon r_i$; подставим в (4.4): $dm_i \varepsilon r_i = dF_i \cos\alpha_i$; умножим обе части этого равенства на r_i:

$$\varepsilon dm_i r_i^2 = r_i dF_i \cos\alpha_i \qquad (4.5)$$

В правой части этого выражения стоит момент силы $d\vec{F}_i$, так как $r_i \cos\alpha_i = h$ - плечо силы. Следовательно,

$$\varepsilon dm_i r_i^2 = dM_i \qquad (4.6)$$

Чтобы оценить действие *всех* сил, приложенных к телу, необходимо проинтегрировать уравнение (4.6) по всем элементам тела:

$$\int dM_i = \varepsilon \int_0^m dm_i r_i^2 \qquad (4.7)$$

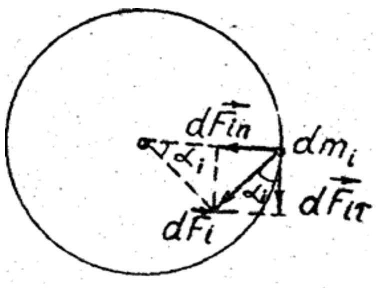


Рис.8

Интеграл $\int dM_i$ представляет собой полный вращательный момент всех внешних сил, действующих на тело - *M*.

Величина численно равная произведению массы элемента dm_i на квадрат расстояния от этого элемента до оси вращения r_i^2, называется *моментом инерции* этого элемента относительно оси, а интеграл $\int_0^m dm_i r_i^2$ называется моментом инерции I всего тела относительно этой оси.

$$I = \int_0^m dm_i r_i^2 \qquad (4.8)$$

Момент инерции характеризует *инерционные* свойства *вращающихся* тел: чем больше момент инерции тела, тем труднее изменить его угловую скорость. Момент инерции различных тех зависит от распределения масс относительно оси вращения. Расчет моментов инерции - довольно сложная математическая задача.

Приведем выражения моментов инерции некоторых тел: тонкий обруч (цилиндр) радиуса *r:* $I=mr^2$; сплошной однородный диск (цилиндр) радиуса *r:* $I=½mr^2$ (в обоих случаях оси вращения совпадают с осями цилиндров); однородный шар радиуса *r:* $I = \frac{2}{5}mr^2$ (относительно оси, проходящей через центр шара).

Таким образом, $I\varepsilon = M$, откуда

$$\varepsilon = \frac{M}{I} \qquad (4.9)$$

Учитывая, наконец, векторный характер момента силы и углового ускорения, запишем:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I} \qquad (4.10)$$

Угловое ускорение, приобретаемое вращающимся твёрдым телом, прямо пропорционально результирующему моменту всех внешних сил, зависит от его момента инерции и направлено в сторону момента силы.

Это и есть ***основной закон*** динамики вращательного движения твердого тела.

3. Второй закон Ньютона для материальной точки мы привели в нескольких формах, в частности, в форме $d(m\vec{\upsilon}) = \vec{F}dt$. Аналогично можно представить основной закон и для вращательного движения:

$$d(I\vec{\omega}) = \vec{M}dt \qquad (4.11)$$

В этой формуле $I\vec{\omega}$ (обозначается как $\vec{L}$) – *момент импульса* твёрдого тела (момент количества движения). Момент импульса $\vec{L}$ - вектор, численно равный произведению момента инерции тела на угловую скорость и направленный в сторону угловой скорости. $\vec{M}dt$ – импульс момента силы.

Изменение момента импульса вращающегося тела равно импульсу вращательного момента, действующего на это тело.

Изменение момента импульса за конечный промежуток времени при $I = const$ равно

$$dL = I\overrightarrow{\omega_2} - I\overrightarrow{\omega_1} = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{M}dt \tag{4.12}$$

Если $\overrightarrow{M}$ =const (момент силы не изменяется с течением времени),

$$I\overrightarrow{\omega_2} - I\overrightarrow{\omega_1} = \overrightarrow{M}\Delta t \tag{4.13}$$

Таковы основные соотношения динамики вращательного движения твёрдого тела.

5 КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. *Кинетическая энергия вращения* твёрдого тела складывается из кинетических энергий отдельных элементов. Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси. Кинетическая энергия элемента dm_i, находящегося на расстоянии r_i от оси, равна

$$\frac{dm_i\upsilon_i^2}{2} = \frac{dm_i r_i^2}{2}\omega^2 \tag{5.1}$$

так как $\upsilon_i = \omega r_i$

Кинетическая энергия всего тела

$$E_K = \int_0^m \frac{dm_i r_i^2}{2}\omega^2 = \frac{\omega^2}{2}\int_0^m dm_i r_i^2$$

Интеграл $\int_0^m dm_i r_i^2$ есть момент инерции тела: $\int_0^m dm_i r_i^2 = I$, поэтому

$$E_K = \frac{I\omega^2}{2} \tag{5.2}$$

Мы видим, что кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, выражается так же, как и кинетическая энергия поступательного движения, только вместо массы фигурирует момент инерции, а вместо линейной скорости – угловая.

2. Найдём *работу*, совершаемую приложенным к телу вращательным моментом при повороте тела на некоторый угол вокруг неподвиж-

ной оси.

Пусть сила F, создающая вращательный момент действует по касательной к окружности, которую описывает при вращении тела точка приложения этой силы (рис.9).

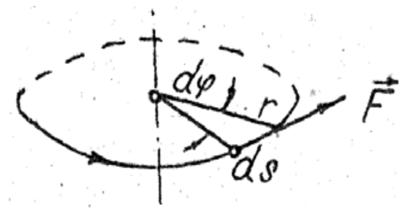


Рис.9

При повороте тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ точка приложения силы переместится на расстояние ds (ds-длина дуги окружности).

Работа силы F при этом повороте будет равна:

$$dA = Fds \tag{5.3}$$

(направление силы и направление перемещения *совпадают*). Из геометрических соотношений $ds = rd\varphi$. Тогда работа $dA = Frd\varphi$. Но $rF = M$ есть момент силы F относительно оси вращения. Следовательно,

$$dA = Md\varphi. \tag{5.4}$$

Работа силы, действующей на твёрдое тело при вращении его вокруг неподвижной оси, равна произведению момента этой силы относительно оси вращения на угол поворота тела.

При повороте тела на конечный угол $\Delta\varphi$ работа будет равна сумме элементарных работ:

$$A_{1,2} = \int_1^2 dA_i = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_i d\varphi_i \tag{5.5}$$

Если момент $M = const$, то работа, совершаемая при повороте тела на угол $\Delta\varphi$, будет равна

$$A_{1,2} = M\Delta\varphi. \tag{5.6}$$

3. Покажем, что если к телу приложен вращательный момент, то *работа* сил, создающих этот момент, будет *равна приращению кинетической энергии вращательного движения* этого тела.

По основному закону динамики вращательного движения

$$M = I\varepsilon = I\frac{d\omega}{dt} \tag{5.7}$$

Подставим (5.7) в (5.4): $dA = I\dfrac{d\omega}{dt}d\varphi$,

но $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega$ есть угловая скорость.

Следовательно, $$dA = I\omega d\omega. \qquad (5.8)$$

Полная работа

$$A_{1,2} = I\int_{\omega_1}^{\omega_2}\omega d\omega = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}, \qquad (5.9)$$

что и требовалось доказать.

4. В общем случае движение твёрдого тела может быть представлена как суперпозиция поступательного движения центра инерции и вращательного движения вокруг соответствующей оси.

Пусть скорость движения центра инерции тела - $\vec{\upsilon}_c$ и тело вращается вокруг оси, проходящей через центр инерции. Тогда полная кинетическая энергия тела, обусловленная его участием в этих видах движения, будет равна: $$E_K = E_{Кпоступ} + E_{Кврац} = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \qquad (5.10)$$

Первое слагаемое определяет кинетическую энергию поступательного движения, второе – кинетическую энергию вращательного движения.

5. В заключение приведём таблицу, в которой сопоставляются величины, играющие аналогичную роль в поступательном и вращательном движениях.

1. Линейный путь S (м)	1. Угловой путь φ (рад)
2. Линейная скорость $\vec{\upsilon}$ (м/с)	2. Угловая скорость $\vec{\omega}$ (рад/с)
3. Линейное ускорение $\vec{a}$ (м/с^2)	3. Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ (рад/с^2)
4. Масса m (*кг*)	4. Момент инерции относительно оси I (кг м^2)
5. Сила $\vec{F}$ (Н)	5. Момент силы $\vec{M}$ (Н м)
6. Импульс $m\vec{\upsilon}$ (кг м/ с)	6. Момент импульса $I\vec{\omega}$ (кгм^2/с)
7. Импульс силы $\vec{F}dt$ (Н с)	7. Импульс момента силы $\vec{M}dt$
8.Второй закон Ньютона $\vec{a} = \vec{F}/m$	8. Основной закон динамики: $\vec{\varepsilon} = \vec{M}/I$
9. Работа $dA=Fds$ (Дж)	9. Работа $dA=Md\varphi$ (Дж)
10. Кинетическая энергия $E_K = \frac{m\upsilon^2}{2}$ (Дж)	10.Кинетическая энергия $E_K = \frac{I\omega^2}{2}$ (Дж)

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Маховик, вращавшийся с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 10 об/с$, при торможении начал вращаться равнозамедленно. Когда торможение прекратилось, вращение маховика снова сделалось равномерным, но уже с угловой скоростью $\omega = 6 об/с$.

Определить угловое ускорение ε маховика и продолжительность торможения *t,* если за время равнозамедленного движения маховик сделал $N = 50$ оборотов.

Решение. Угловое ускорение ε маховика связано с начальной ω_0 и конечной ω угловыми скоростями соотношением

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi,$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varphi}.$$

Но так как $\varphi = 2\pi N$, то

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{4\pi N}.$$

Выразим ω, ω_0 и N в единицах системы СИ:

$\omega_0 = 10 об/с = 10 \cdot 2\pi рад/с = 20\pi$ *рад/с*, $\omega = 6 об/с = 6 \cdot 2\pi рад/с =$ $12\,\pi$ *рад/с*, $N = 50$ *об.*

Подставив числовые значения в выражение для ε, получим

$$\varepsilon = \frac{(144 - 400)\pi^2}{4\pi \cdot 50} = -4 \; рад/с^2.$$

Угловое ускорение получилось отрицательным, так как маховик вращался замедленно.

Для определения продолжительности торможения используем формулу, связывающую угол поворота φ со средней угловой скоростью $\omega_{ср}$ вращения и временем t:

$$\varphi = \omega_{ср} t \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t,$$

откуда

$$t = \frac{2\varphi}{\omega_0 + \omega} = \frac{4\pi N}{\omega_0 + \omega}.$$

Подставив числовые значения, найдём

$$t = \frac{4\pi N}{20\pi + 12\pi} = \frac{4 \cdot 50}{32} = 6{,}25c.$$

Пример 2. Два шара массой m и $2m$ (m = 10 *г*) закреплены на тонком, невесомом стержне длиной l = 40 *см* так, как это указано на рисунке 10 в двух случаях. Определить момент инерции J системы, относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец в этих двух случаях. Размерами шаров пренебречь.

Решение. Для определения момента инерции воспользуемся теоремой Штейнера $J = J_0 + Ma^2$,

где J_0 – момент инерции системы шаров относительно оси, проходящей через центр масс – точку *C; M* – масса всей системы, a - расстояние между заданной осью, проходящей через точку *O* и осью, проходящей через центр масс.

Положение центра масс определим по формуле

$$r_c = \frac{1}{M}(\sum m_i r_i),$$

где m_i – масса i части системы, r_i – положение этой массы относительно заданной оси *O*.

Случай а. Находим положение центра масс

$$r_c = \frac{1}{m + 2m}(m \cdot l/2 + 2ml) = \frac{5}{6}l.$$

Это r_c есть расстояние a между осями, т.е. $a = \frac{5}{6}l$.

Расстояние шара массой $2m$ от центра масс равно $l - \frac{5}{6}l = \frac{l}{6}$; расстояние шара массой m от центра масс равно $\frac{l}{2} - \frac{l}{6} = \frac{l}{3}$. С учётом этих замечаний момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр масс равен

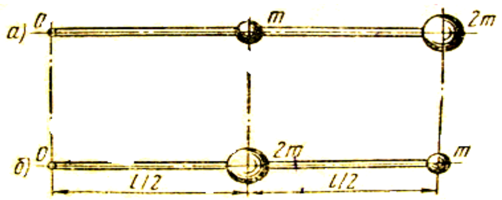


Рис.10

$$J_0 = 2m\left(\frac{l}{6}\right)^2 + m\left(\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{ml^2}{18} + \frac{ml^2}{9} = \frac{ml^2}{6}.$$

Момент инерции системы относительно заданной оси, проходящей через точку O равен

$$J_1 = J_0 + Ma^2 = \frac{ml^2}{6} + 3m\left(\frac{5l}{6}\right)^2 = \frac{ml^2}{6} + \frac{75ml^2}{36} = \frac{9ml^2}{4}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$J_1 = \frac{9\cdot 10.10^{-3}\cdot 0{,}4^2}{4} = 3{,}6.10^{-3} \ \text{кг.м}^2.$$

Случай б. Находим положение центра масс (расстояние a)

$$r_c = \frac{1}{3m}(2m\frac{l}{2} + ml) = \frac{2l}{3}, \quad \text{т.е. } a = r_c = \frac{2l}{3}.$$

Положение шара массой $2m$ относительно центра масс

$$\frac{2l}{3} - \frac{l}{2} = \frac{l}{6}.$$

Положение шара массой m относительно центра масс

$$l - \frac{2l}{3} = \frac{l}{3}.$$

Момент инерции системы шаров относительно оси, проходящей через центр масс

$$J_0 = 2m\left(\frac{l}{6}\right)^2 + m\left(\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{ml^2}{6}.$$

Момент инерции относительно заданной оси O

$$J_2 = \frac{ml^2}{6} + 3m\left(\frac{2l}{3}\right)^2 = \frac{ml^2}{6} + \frac{12ml^2}{9} = \frac{3ml^2}{2}.$$

Численное значение момента инерции равно

$$J_2 = \frac{3\cdot 10.10^{-3}\cdot 0{,}4^2}{2} = 2{,}4.10^{-3} \ \text{кг.м}^2.$$

Пример 3. Определить момент инерции сплошного шара массой m= 10 *кг* и радиусом R = 0,1 *м* относительно оси, проходящей через центр тяжести.

Решение. При определении момента инерции шара воспользуемся тем, что момент инерции однородного диска относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно его плоскости равен

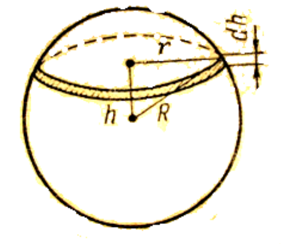


Рис.11

$$J = \frac{mr^2}{2},$$

где m – масса диска, r – радиус диска.

Поэтому будем разбивать шар на диски толщиной dh, расположенные перпендикулярно оси, проходящей через центр масс (рис.11).

Выделим один из таких дисков радиусом r. Его момент инерции равен

$$dJ = \frac{mr^2}{2} = \rho\pi r^2 dh \frac{r^2}{2} = \frac{\pi\rho}{2} r^4 dh.$$

Из рисунка следует, что

$$r^2 = R^2 - h^2, \text{ тогда } r^4 = (R^2 - h^2)^2 = R^4 - 2R^2h^2 + h^4$$

и момент инерции всего шара

$$J = 2\int_0^R dJ = \pi\rho\int_0^R (R^4 - 2R^2h^2 + h^4)dh = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\cdot\rho R^2 = \frac{2}{5}mR^2.$$

Подставив числовые значения величин, получим

$$J = \frac{2}{5}10\cdot 0{,}1^2 = 0{,}04 \text{ кг.м}^2.$$

Пример 4. Маховик в виде сплошного диска радиусом $R = 0{,}2$ *м* и массой $m = 50$ *кг* раскручен до частоты вращения $n_1 = 8\ с^{-1}$ и предоставлен сам себе. Под действием сил трения маховик остановился через $t = 50\ с$. Найти момент M сил трения.

Решение. Для решения задачи воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела в виде

$$M_z = J_z\varepsilon,$$

где M_z – момент внешних сил (в данном случае момент сил трения), действующих на маховик относительно оси z, совпадающей с геометрической осью маховика, J_z – момент инерции маховика в виде сплошного диска (определяется как $\frac{mR^2}{2}$), ε – угловое ускорение.

Угловое ускорение определим как $\varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t}$, где $\omega_2 = 0$,

$\omega_1 = 2\pi n_1$.

Тогда момент M сил трения будет равен $M_z = \pi m R^2 (0 - n_1)/t$.

Подставим числовые значения величин и произведем вычисления

$$M_z = \frac{3{,}14 \cdot 50 \cdot 0{,}2^2 (0-8)}{50} = -1 \ \textit{Н.м.}$$

Знак минус показывает, что момент сил трения оказывает на маховик тормозящее действие.

Пример 5. Маятник Максвелла представляет собой массивный диск, ось которого подвешена на двух накрученных на нее нитях (см. рис.12). Если маятник отпустить, то он будет совершать возвратно-поступательное движение в вертикальной плоскости при одновременном вращении диска вокруг оси.

Определить ускорение поступательного движения маятника, полагая, что момент инерции оси равен нулю.

Решение. Если маятник опустится и пройдет путь x, то потенциальная энергия равная mgx перейдет в кинетическую энергию поступательного и вращательного движений, т.е.

$$mgx = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где $J = \frac{mr^2}{2}$ – момент инерции диска (m – его масса, r – радиус диска), $\omega = \frac{\upsilon}{r}$ – угловая скорость вращения диска, выраженная через линейную скорость крайних точек диска.

Учитывая замечания, имеем

$$mgx = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{mr^2\upsilon^2}{2 \cdot 2r^2} = \frac{3m\upsilon^2}{4},$$

откуда $\upsilon = 2\sqrt{\frac{g}{3}} x^{\frac{1}{2}}$;

Ускорение поступательного движения есть производная по времени от скорости, т.е.

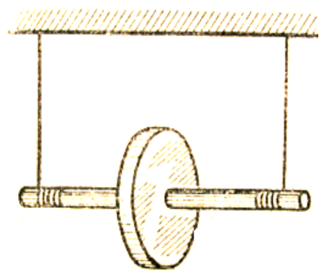


Рис.12

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{3}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{dt},$$

но так как $\frac{dx}{dt}$ – есть скорость υ, равная $\upsilon = 2\sqrt{\frac{g}{3}} x^{\frac{1}{2}}$, то ускорение

будет равно $$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{3}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} 2\sqrt{\frac{g}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} g.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какое тело является абсолютно твёрдым?
2. Какое движение твёрдого тела называется поступательным?
3. Какое движение твёрдого тела называется вращательным?
4. Что называется угловой скоростью вращательного движения? Как определяется направление угловой скорости?
5. Что такое угловое ускорение? Как выражается среднее и истинное угловое ускорение? Каково направление углового ускорения?
6. В каких единицах измеряется угловой путь, угловая скорость, угловое ускорение?
7. Какова связь между соответствующими линейными и угловыми характеристиками вращательного движения?
8. Что называется центром инерции твёрдого тела?
9. Что называется моментом силы относительно оси?
10. Какая физическая величина является мерой инерционных свойств вращающихся тел? От чего она зависит и как, в принципе, рассчитывается?
11. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения. Запишите математическое выражение этого закона.
12. Как выражается кинетическая энергия вращения твёрдого тела?
13. Как выражается работа при вращении твёрдого тела?
14. Какова связь между кинетической энергией вращательного движения и работой вращательного момента, действующего на тело?

ВСЕМИРНОЕ ТЯГОТЕНИЕ

6 ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

1. В природе исключительную роль играют *силы тяготения*. Закон, которому они подчиняются, - закон всемирного тяготения – открыт Ньютоном в 1687 году.

Согласно этому закону *любые две материальные точки притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению масс этих точек, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними и направленной по прямой, соединяющей эти точки* (рис.13).

Численное значение силы тяготения

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{6.1}$$

здесь: m_1 *и* m_2 - массы материальных точек; r - расстояние между точками; γ - гравитационная постоянная (размерный коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерения, F, m и r)

2. Чтобы придать закону тяготения векторный вид, проведём от первой точки ко второй радиус-вектор $\overrightarrow{r_{12}}$ и умножим правую часть (6.1) на единичный вектор этого направления $\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$. Тогда сила, действующая на второе тело со стороны первого $\overrightarrow{F_{21}}$, будет равна:

$$\overrightarrow{F_{21}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \overrightarrow{r_{12}}$$

Знак “минус” означает, что направления радиус-вектора $\overrightarrow{r_{12}}$ и силы $\overrightarrow{F_{21}}$ противоположны.

3. Силы тяготения подчиняются третьему закону Ньютона: они равны по величине и противоположны по направлению:

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}$$

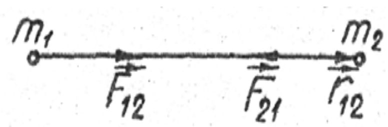


Рис.13

4. Силы тяготения – *всепроникающие силы*: от них нельзя экранироваться, их нельзя усилить или ослабить. Материальная среда, в которой находятся взаимодейст-

вующие тела, на величину и направление силы тяготения никакого влияния не оказывает.

5. Формула (6.1) позволяет найти силу гравитационного взаимодействия между *материальными точками*.

Чтобы рассчитать силу тяготения между телами, размеры которых соизмеримы с расстояниями между ними, поступают следующим образом. Оба тела разбивают на столь малые элементы, что каждый такой элемент можно считать материальной точкой. Выбирают в первом теле произвольный элемент и определяют *результирующую* силу, действующую на него со стороны *всех* элементов второго тела, иначе говоря, определяют *силу, с которой второе тело в целом притягивает к себе этот выделенный элемент*. Затем проделывают то же самое для остальных элементов первого тела, после чего находят полную геометрическую сумму сил, найденная сумма и будет представлять собой силу, с которой второе тело действует на первое. С такой же по величине, но противоположной по направлению силой первое тело действует на второе. Расчёт показывает, что математическое выражение для силы тяготения, действующей между *однородными* шарами, шарами с плотностью, зависящей от r (r – расстояние от центра шара), между сферическими слоями будет совпадать с (6.1), если под r понимать расстояние между центрами этих тел (рис.14). Закон тяготения справедлив также для тел, одно из которых - однородный шар, а другое - материальная точка (с этим случаем мы имеем дело, например, при расчёте силы, с которой Земля притягивает к себе находящиеся на её поверхности тела).

6. В формулу закона тяготения входит *масса*. Масса уже фигурировала в уравнениях механики, в частности, в выражении второго закона Ньютона. Там она характеризовала *инерционные свойства* тел и называлась “инертной”.

Роль массы в законе тяготения *иная.* Здесь она определяет силу гравитационного взаимодействия материальных тел, т.е. является мерой их гравитационных свойств. Эту массу, в отличие от “инертной”, называют *“гравитационной*” или “тяжёлой”.

Различать гравитационную и инертную массу в настоящее время нет необходимости. Многими, весьма тонкими экспериментами (Бессель, Этвеш, Крылов и др.) установлено, что инертная и гравитационная массы с точностью до 10^{-8} совпадают. Это, в сущности, одна и та же физическая величина, по-разному проявляющая себя в различных физических явлениях. С одной стороны, масса - это *мера инерционных свойств, с дру-*

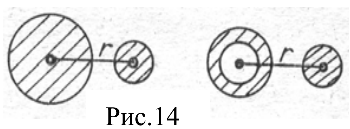


Рис.14

гой - мера гравитационных свойств.

7. Гравитационная постоянная γ является универсальной константой, не зависящей от природы взаимодействующих тел. Эта величина численно равна *силе*, с которой притягиваются друг к другу две материальные точки *единичной массы*, расположенные на единичном расстоянии друг от друга: если $|m_1| = |m_2| = 1$, $|r| = 1$, то $|\gamma| = |F|$.

Численное значение γ было впервые определено У. Кавендишем в 1797 г.

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Нм^2}{кг^2}$$

Это значит, что два точечных тела (или шара) массой по 1кг каждый, расположенные на расстоянии 1м друг от друга, притягиваются с силой $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н.

Необычайно малая величина γ указывает на то, что гравитационное взаимодействие становится заметным только в случае очень *больших масс*. В механике таких объектов, как атомы и молекулы, гравитационные силы практически не играют никакой роли.

Движение же таких макроскопических тел, как звёзды, Солнце, планеты, Луна, спутники (после того, как выключены двигатели) полностью управляется силами тяготения.

7 ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ТЯГОТЕНИЯ

1. Так как силы тяготения зависят только от взаимного расположения тел, то любая система тел обладает вполне определённой потенциальной энергией тяготения.

Найдём потенциальную энергию взаимодействия двух *точечных* тел. Для этого сначала рассчитаем работу, совершаемую силами тяготения при изменении взаимного расположения этих тел. Пусть массы тел равны соответственно m_1 и m_2. Будем считать, что одно из тел (m_1) неподвижно, а другое (m_2) перемещается по произвольному пути. Начальное и конечное положения перемещающегося тела определяют радиус-векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, проведённые из точки, где находится тело m_1 (рис.15).

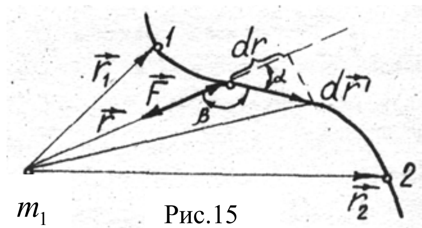


Рис.15

Элементарная работа, совершаемая силой тяготения при перемещении тела m_2 на $d\vec{r}'$, равна

$$dA = Fdr'\cos\beta = -Fdr\cos\alpha \qquad (7.1)$$

(так как cosβ = - cosα).

Сила тяготения равна: $F = \gamma\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$, $dr'\cos\alpha = dr$ - есть проекция вектора перемещения $d\vec{r'}$ на направление радиальной прямой, (прямой, соединяющей тела), иначе говоря, изменение *расстояния* между телами. Следовательно,

$$dA = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}dr. \qquad (7.2)$$

Взяв интеграл от выражения (7.2) в пределах от r_1 до r_2, мы найдём работу сил тяготения при перемещении тела m_2 из точки (1) в точку (2):

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_1^2 dA = -\int_{r1}^{r2}\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = \gamma\frac{m_1 m_2}{r}\Big|_{r1}^{r2} = \\ &\gamma\frac{m_1 m_2}{r_2} - \gamma\frac{m_1 m_2}{r_1} = \left(-\gamma\frac{m_1 m_2}{r_1}\right) - \left(-\gamma\frac{m_1 m_2}{r_2}\right) \end{aligned} \qquad (7.3)$$

Как видно из этой формулы, работа сил тяготения зависит только от *изменения расстояния между телами*, но не зависит от величины и направления вектора перемещения $d\vec{r'}$.

Мы убедились так же, что работа силы тяготения не зависит от формы пути.

Следовательно, силы тяготения – *консервативные* силы, поэтому правую часть (7.3) следует рассматривать как разность начального и конечного значений потенциальной энергии:

$$A_{12} = E_{n_1} - E_{n_2} \qquad (7.4)$$

где $E_{n_1} = -\gamma\dfrac{m_1 m_2}{r_1} + C, E_{n_2} = -\gamma\dfrac{m_1 m_2}{r_2} + C$

C – произвольная постоянная, зависящая от выбора нулевого уровня потенциальной энергии.

Определим *C*.

Условимся считать потенциальную энергию рассматриваемых тел равной нулю, когда они находятся на таком расстоянии друг от друга, что силами взаимодействия между ними можно пренебречь,

т.е. когда $r = \infty$: $E_n(\infty) = 0$

При таком выборе нулевого уровня

$$0 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{\infty} + C,$$

Откуда $C = 0$. Следовательно,

$$E_n = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \quad (7.5)$$

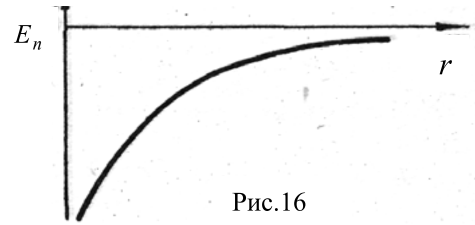


Рис.16

Взаимная потенциальная энергия тяготения *отрицательна* и возрастает с увеличением расстояния. На рисунке 16 приведён график потенциальной энергии двух материальных точек.

8 ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ. НАПРЯЖЁННОСТЬ И ПОТЕНЦИАЛ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

1. В 18-19 в.в. в физике господствовала идеалистическая теория *дальнодействия.* Согласно этой теории действие одного тела на другое передается *мгновенно* - с бесконечно большой скоростью, без всякого участия промежуточной материальной среды.

По современным материалистическим представлениям действие на расстоянии мыслится как процесс распространения изменений особой формы материи, связанной с взаимодействующими объектами и называемой полем[1] (теория *близкодействия*).

Гравитационное взаимодействие осуществляется через посредство *гравитационного поля* или *поля тяготения.*

Каждое тело создает в окружающем пространстве свое собственное гравитационное поле.

2. Исследование свойств гравитационного поля осуществляется при помощи „пробного тела" (иногда говорят о “пробной массе”, понимая под этим тело, обладающее вполне определенной массой).

Измеряя величину и направление силы, которая действует на пробное тело в данной точке поля, оценивая его потенциальную энергию, можно судить об интенсивности и свойствах поля в рассматриваемой точке.

Пробное тело должно быть *точечным* и не должно обладать слишком большой массой (в противном случае исследуемое поле будет

[1] Термин “поле” употребляется также для описания *физического состояния* обычных сред (например, волновое поле, поле температур и т.д.) и для характеристики пространственного распределения какой-либо величины (например, поле вектора скорости).

сильно искажаться полем пробного тела).

3. Как показывает опыт, сила, действующая в данной точке поля на пробные тела различной массы, прямо пропорциональна массе этих тел. Но если *рассчитать* силу, действующую на тело *единичной* массы (для этого достаточно найти отношение $\frac{F}{m}$), то эта сила будет зависеть только от свойств поля в данной точке и поэтому может служить его характеристикой. Эта векторная величина называется *напряжённостью*.

Напряжённость гравитационного поля - векторная физическая величина, характеризующая *силовое действие* гравитационного поля на вносимые в него материальные тела и *численно равная* силе, с которой поле действует на *точечное* тело *единичной массы,* помещённое в данную точку:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{8.1}$$

Направление вектора напряжённости совпадает с направлением *силы,* действующей на пробное тело.

Как видно из формулы (8.1), напряжённость гравитационного поля измеряется в таких же единицах, что и ускорение.

Если во всех точках поля вектор напряжённости имеет одно и то же численное значение и одинаково направлен, то такое поле называется *однородным.*

4. Найдём напряжённость в произвольной точке гравитационного поля Земли. Так, как Земля в первом приближении - шар, силу взаимодействия её с пробным телом можно найти по формуле Ньютона (6.1). Тогда численное значение напряжённости

$$G = \frac{F}{m} = \frac{\gamma m M_З}{m(R_З + h)^2} = \gamma \frac{M_З}{(R_З + h)^2} \tag{8.2}$$

где $M_З$ - масса Земли; $R_З$ - радиус Земли; h - расстояние от поверхности Земли до точки наблюдения (рис.17).

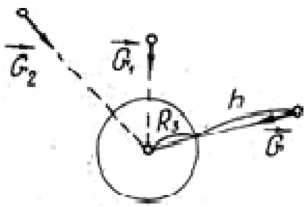


Рис.17

Мы видим, что гравитационное поле Земли в целом *неоднородно.*

Учитывая, однако, что *центр* этого поля (центр Земли) отстоит от поверхности Земли на расстоянии 6400 км, можно с достаточной степенью точности считать, что вблизи поверхности Земли (например, в масштабах лаборатории) гравитационное поле Земли *однородно*.

5. По своему смыслу напряженность гравитационного поля и ускорение, которое приобретает тело под действием силы тяготения, - одно и то же, если ускорение отсчитывается относительно инерциальной системы отсчета[2]. В земных условиях, однако, отсчет ведется относительно системы, связанной с Землей. Земля же, как известно, не является инерциальной системой. Поэтому ускорение свободного падения[3] $\vec{g}$, наблюдаемое относительно Земли, обусловлено как силой тяготения, так и центробежной силой инерции[4] (рис.18). Если вращением Земли пренебречь, то можно поставить знак равенства между ускорением "свободного" падения $\vec{g}$ и напряжённостью гравитационного поля Земли $\vec{G}$:

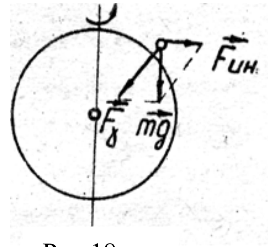


Рис.18

$$\vec{g} = \vec{G} \tag{8.3}$$

Учитывая (8.2), найдём, что численное значение g равно

$$g = \gamma \frac{M_з}{(R_з + h)^2} \tag{8.4}$$

Это соотношение показывает, что ускорение, испытываемое телами различной массы, *одинаково* (если эти тела одинаково удалены от центра Земли).

Если тело находится вблизи поверхности Земли (h практически равно *нулю*), то

$$g_0 = \gamma \frac{M_з}{R_з^2} \tag{8.5}$$

Выразив из (8.5) массу Земли и подставив ее в (8.4), получим

$$g = \left(\frac{R_з}{R_з + h} \right)^2 \cdot g_0 \tag{8.6}$$

6. Гравитационное поле можно описать с *энергетической точки зрения*. Для этого вновь воспользуемся точечным пробным телом.

---

[2] Кроме того, необходимо полагать, что инертная и гравитационная массы равны.

[3] Если тело движется вертикально вниз с ускорением, обусловленным действием одной только силы тяготения, то говорят, что оно свободно падает.

[4] Напомним, что силы инерции вводятся для описания движения в *неинерциальных системах* отсчёта. *Центробежная* сила инерции вводится тогда, когда система отсчёта вращается.

В каждой точке гравитационного поля пробное тело обладает вполне определённой потенциальной энергией. Эта энергия зависит не только от величин, определяющих поле (от положения точки наблюдения и от массы тела, создающего поле), но и от массы пробного тела.

Вычислим отношение потенциальной энергии пробного тела к его массе: $\frac{E_n}{m}$

Легко видеть, что это отношение *не зависит от массы пробного тела* и характеризует исключительно *свойства поля*. Эта величина характеризует энергетическое *состояние* поля в той точке, куда помещено пробное тело, и называется *потенциалом*.

Потенциал данной точки гравитационного поля - скалярная физическая величина, характеризующая *энергетическое состояние* поля в этой точке и *численно равная потенциальной энергии* пробного тела *единичной* массы, внесённого в эту точку:

$$\varphi = \frac{E_n}{m} \qquad (8.7)$$

Две материальные точки массой M и m обладают взаимной потенциальной энергией (7.5), равной

$$E_n = -\gamma \frac{Mm}{r}$$

Подставив это выражение в (8.7), мы найдем, что потенциал поля, созданного материальной точкой (или шаром) равен:

$$\varphi = -\gamma \frac{M}{r} \qquad (8.8)$$

В частности, потенциал поля тяготения Земли в произвольной точке (вне Земли) равен:

$$\varphi = -\gamma \frac{M_з}{R_з + h}, \qquad (8.9)$$

где $M_з$ - масса Земли; $R_з$ - радиус Земли; h - расстояние от поверхности Земли до точки наблюдения.

Заметим, что потенциал, так же как и потенциальная энергия, определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной C. Выбор нулевого уровня потенциала осуществляется произвольно. Формулы (8.8), (8.9) записаны в предположении, что нулевой уровень потенциала выбран в бесконечности.

7. Из (8.7) следует, что тело массой m, помещенное в точку поля с потенциалом φ, обладает потенциальной энергией

$$E_n = m\varphi \qquad (8.10)$$

Работа сил тяготения равна *убыли* потенциальной энергии:

$$A_{12} = -(E_{n_2} - E_{n_1}) = m(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (8.11)$$

Таким образом, *работа сил гравитационного поля* при перемещении тела массой *m* равна *произведению массы этого тела на разность потенциалов начальной и конечной точек пути*.

Если тело удаляется из точки с потенциалом φ_1, в бесконечность, где, по соглашению, потенциал поля равен нулю, то работа сил поля будет равна:

$$A_{1\infty} = m(\varphi_1 - 0) = m\varphi_1 \qquad (8.12)$$

Отсюда следует $\varphi_1 = \dfrac{A_{1\infty}}{m}$, т.е. потенциал численно равен *работе,* совершаемой силами гравитационного поля при перемещении точечного тела единичной массы из данной точки в бесконечность (или просто на нулевой уровень, так как в общем случае нулевой уровень потенциала может быть выбран где угодно).

8. Гравитационное поле можно изобразить *графически* либо при помощи *линий вектора напряжённости*, либо при помощи *поверхностей равного потенциала.* Линия вектора напряженности (силовая линия или просто линия поля) - линия, касательная в каждой точке которой, совпадает с направлением вектора напряжённости в этой же точке (рис.19).

Линии гравитационного поля обычно проводят с такой густотой, чтобы она была пропорциональна напряжённости в соответствующих местах.

Поверхность равного потенциала (эквипотенциальная поверхность) - поверхность, все точки которой имеют один и тот же потенциал.

Работа сил тяготения при перемещении тела по одной и той же эквипотенциальной поверхности равна нулю (так как потенциалы на-

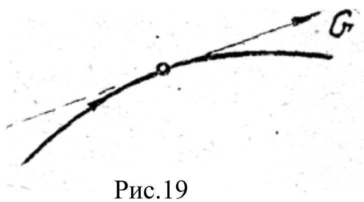


Рис.19

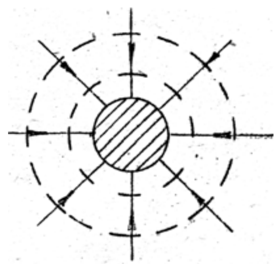


Рис.20

чальной и конечной точек пути одинаковы):

$$dA = md\varphi = 0$$

Но с другой стороны $dA = FdrCos(\vec{F}\vec{dr})$, где $F \neq 0$ $dr \neq 0$.

Следовательно, $Cos(\vec{F}\vec{dr}) = 0$. Отсюда следует, что угол между линией вектора напряжённости и элементом эквипотенциальной поверхности *прямой,* т.е. *линии вектора напряжённости всюду перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям*. На рисунке 20 изображены линии вектора напряжённости и эквипотенциальные поверхности (вернее, не сами поверхности, а их сечения плоскостью чертежа) поля тяготения, создаваемого телом сферической формы.

9 ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИЛ ТЯГОТЕНИЯ И СИЛ ИНЕРЦИИ

Силы тяготения и силы инерции обладают одной общей особенностью: они сообщают телам *независимо от массы одинаковые ускорения.*

Представим, что два наблюдателя находятся внутри двух, космических кораблей, один из которых *покоится* на стартовой площадке, (площадка находится на Земле), а другой движется с ускорением, равным ускорению свободного падения на Земле (9,8 м/сек^2), в такой области межзвездного пространства, где *действием сил тяготения можно пренебречь.* Оба наблюдателя выпускают из рук по предмету. В неподвижном корабле предмет будет падать на пол кабины потому, что на него *действует сила тяготения* Земли. В движущемся корабле предмет упадёт на “пол” вследствие того, что на него действует *сила инерции* (“пол” кабины, двигаясь с ускорением “нагоняет” предмет). Если в каждом из кораблей одновременно падают *два* предмета, то оба они испытывают совершенно *одинаковые ускорения.*

Несмотря на то, что корабли находятся в принципиально разных физических условиях, механические явления в них протекают совершенно *одинаково.* В корабле, движущемся с ускорением, всё происходит так, как если бы он *покоился в гравитационном поле* с напряженностью - $\vec{g}$ ($\vec{g}$ - ускорение корабля). И невозможно указать эксперимент, который ответил бы на вопрос: находится ли корабль в состоянии ускоренного движения или же покоится в поле тяготения.

Сказанное означает, что *силы инерции* и *силы тяготения* в известном смысле *эквивалентны* друг другу. Аналогия между поведением тел в гравитационном поле и в неинерциальных системах отсчета, движущихся поступательно, носит название *принципа эквивалентности.*

Заметим, что этот принцип имеет местный, “локальный” характер: он справедлив только для областей пространства, в пределах которых-гравитационное поле *однородно (*если поле неоднородно, то напряжённость его в отдельных точках будет различной и силы инерции не будут эквивалентны силам тяготения).

Принцип эквивалентности нашёл свое отражение в общей теории относительности А. Эйнштейна.

10 ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНА ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ ФИЗИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ

1. *Вычисление массы Земли*

Ускорение “свободного” падения g_0 измеренное относительно Земли, весьма мало отличается от напряженности поля тяготения Земли G в том же месте: $g_0 \approx G$. Но $G = \gamma \frac{M_з}{R_з^2}$ (вблизи поверхности Земли), где $M_з$ - масса Земли; $R_з$ - радиус Земли;

Значит, $$g_0 = \gamma \frac{M_з}{R_з^2} \qquad (10.1)$$

Из (10.1) $$M_з = \frac{g_0 R_з^2}{\gamma} \qquad (10.2)$$

Подставляя сюда значения $g_0 = 9{,}81 \frac{м}{сек}, \gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$ и $R = 6{,}4 \cdot 10^6\, м$ получим $M_з \approx 5{,}96 \cdot 10^{24}\, кг$

2. *Определение массы Солнца*

Будем считать, что Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите. Роль центростремительной силы при этом движении играет сила тяготения: $$\frac{M_з \upsilon^2}{r} = \gamma \frac{M_з M_c}{r^2} \qquad (10.3)$$

где $M_з$ - масса Земли; r- радиус земной орбиты; M_c - масса Солнца; υ - линейная скорость Земли.

Из (10.3) $$M_c = \frac{r\upsilon^2}{\gamma} \qquad (10.4)$$

Из астрономических наблюдений $\upsilon = 29{,}76\dfrac{км}{сек}; r = 1{,}5 \cdot 10^{11}\,м$

Отсюда масса Солнца получается равной $M_с = 1{,}97 \cdot 10^{30}\,кг.$

3. *Вычисление первой космической скорости*

Первой космической скоростью называется скорость, которую необходимо сообщить телу в направлении, параллельном земной поверхности, чтобы оно превратилось в искусственный спутник Земли, обращающийся по круговой орбите в непосредственной близости от земной поверхности. Центростремительное ускорение спутнику сообщает сила тяготения:

$$\frac{m\upsilon^2}{R_з} = \gamma\frac{mM_з}{R_з^2} \qquad (10.5)$$

Откуда $\upsilon_I = \sqrt{\gamma\dfrac{M_з}{R_з}}$. Учитывая, что $g_0 = \gamma\dfrac{M_з}{R_з^2}$, получим $\upsilon_I = \sqrt{g_0 R_З}$

Подставив, $g_0 = 9{,}81 м/с, R_з = 6{,}4 \cdot 10^6\,м,$ найдём $\upsilon_I = 7{,}9\dfrac{км}{сек}$

Аналогично определяется первая космическая скорость для любой другой планеты или спутника планеты. Например, первая космическая скорость для Луны равна $1{,}7\dfrac{км}{сек}$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найти изменение ускорения силы тяжести тела на глубине h от поверхности Земли. На какой глубине ускорение силы тяжести составит $0{,}3$ от ускорения силы тяжести на поверхности Земли? Плотность материала Земли считать постоянной. Считать, что со стороны вышележащего слоя тело не испытывает никакого притяжения.

Решение. Обозначим массу тела через m, его расстояние от центра Земли через R_1, ускорение силы тяжести на глубине h через g_1. Тогда вес Q тела на глубине h будет равен $Q = mg_1$. С другой стороны, учитывая гравитационное воздействие,

$$Q = F_1 = \gamma\frac{mM_1}{R_1^2},$$

где M_1 – масса Земли в объёме шара радиусом R_1:

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \cdot \rho,$$

$\rho -$ средняя плотность Земли.

Получили $$mg_1 = \gamma m \frac{4}{3}\pi R_1 \rho.$$

На поверхности Земли вес тела $Q_1 = P = mg = \gamma \dfrac{mM}{R^2} = \gamma m \dfrac{4}{3}\pi R \rho.$

Если возьмём отношение веса тела на глубине к весу тела на поверхности Земли, то получим

$$\frac{g_1}{g} = \frac{R_1}{R} = \frac{R-h}{R} = 1 - \frac{h}{R}.$$

Из этого выражения найдём, что $h = \left(1 - \dfrac{g_1}{g}\right) R.$

По условию задачи $\dfrac{g_1}{g} = 0{,}3$, тогда $h = 0{,}7R$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сформулируйте закон всемирного тяготения»
2. Что такое гравитационная постоянная?
3. Являются ли силы тяготения консервативными силами? Докажите.
4. Что такое гравитационное поле?
5. Что называется напряжённостью гравитационного поля?
6. Докажите, что ускорение свободного падения не зависит от массы падающих тел.
7. Что такое потенциал гравитационного поля?
8. Что называется линией вектора напряжённости?
9. В чем состоит эквивалентность сил тяготения и сил инерции?
10. Что такое первая космическая скорость? Выведите формулу этой скорости.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

11 ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА, МОМЕНТА ИМПУЛЬСА, МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

1. В основе физики и всего естествознания в целом лежат фундаментальные *законы сохранения материи и движения*. Важно понять, что все эти законы (законы сохранения импульса, момента импульса, энергии, электрического заряда и др.) справедливы *не всегда,* не во всякой системе тел, а только при соблюдении вполне определённых *условий*. Чтобы понять, при каких условиях справедлив тот или иной закон сохранения, нам придется ввести некоторые предварительные понятия.

2. Совокупность тел (или частиц), рассматриваемых в данной задаче, образует *физическую систему.*

На каждое из тел системы могут действовать как *внутренние*, так и *внешние* силы (первые действуют со стороны других тел системы, вторые - со стороны внешних тел).

Система тел (или частиц) называется замкнутой или изолированной, если на неё не действуют внешние силы. Понятие замкнутой системы является абстракцией. Строго говоря, таких систем в природе не существует. Однако может случиться, что действие одних внешних сил уравновешивается или почти уравновешивается действием других внешних сил.

Если *результирующая* всех внешних сип, действующих на *каждое тело* системы, равна *нулю* или пренебрежимо мала, по сравнению с результирующей всех внутренних сил, то такую систему можно считать *замкнутой.*

Примеры почти изолированных систем:

1) солнечная система в целом (действие звезд мало);

2) биллиардные шары на горизонтальном столе (сила тяготения, действующая на каждый из шаров, почти уравновешивается реакцией стола, сила трения качения невелика).

Если *результирующая* внешних сил *не равна нулю*, то система является *незамкнутой.*

Какой бы ни была система, геометрическая *сумма всех внутренних сил системы* всегда равна *нулю* (так как в эту сумму входят *попарно* все *силы действия* и все *силы противодействия*).

$$\sum_{i,k=1}^{n}\overrightarrow{F_{i,k}}+\sum_{k,i=1}^{n}\overrightarrow{F_{k,i}}=0 \qquad (11.1)$$

3. Рассматривая вопрос о работе, мы установили, что силы могут быть *консервативными и неконсервативными* (работа первых *не зависит* от форм пути, последних - *зависит*).

Физическая система, в которой действуют только консервативные силы, называется *консервативной или потенциальной.*

Система, в которой, кроме консервативных, действуют ещё и неконсервативные силы, называется *неконсервативной или непотенциальной.*

Примеры консервативных систем: Земля - Солнце (действуют только силы тяготения); Земля - тело в отсутствие сопротивления воздуха (действуют силы тяготение); ядро атома – электрон (действуют электростатические силы и силы тяготения).

4. Установим условия, при которых импульс отдельного тела или системы тел сохраняется.

Назовём *импульсом системы геометрическую сумму импульсов всех тел,* входящих в эту систему.

Условия сохранения импульса отдельного тела непосредственно вытекает из второго закона Ньютона:

$$d(m\vec{\upsilon}) = \vec{F}dt \tag{11.2}$$

Если на тело не действуют силы или результирующая всех сил, действующих на тело, равна нулю, то импульс тела сохраняется неизменным:

$$d(m\vec{\upsilon}) = 0 \text{ и } m\vec{\upsilon} = const \tag{11.3}$$

Рассмотрим *систему тел* (рис.21). Пусть в системе три взаимодействующих движущихся тела. Обозначим импульсы этих тел в некоторый произвольный момент времени t соответственно:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 = \overrightarrow{K_1}; m_2\vec{\upsilon}_2 = \overrightarrow{K_2};\ m_3\vec{\upsilon}_3 = \vec{K}_3.$$

Изменение импульса каждого из тел обусловлено действием внешних и внутренних сил (рис .44):

$$d\overrightarrow{K_1} = (\overrightarrow{f_{12}} + \overrightarrow{f_{13}} + \vec{F}_1)dt \tag{11.4}$$

$$d\overrightarrow{K_2} = (\overrightarrow{f_{21}} + \overrightarrow{f_{23}} + \vec{F}_2)dt \tag{11.5}$$

$$d\overrightarrow{K_3} = (\overrightarrow{f_{31}} + \overrightarrow{f_{32}} + \vec{F}_3)dt \tag{11.6}$$

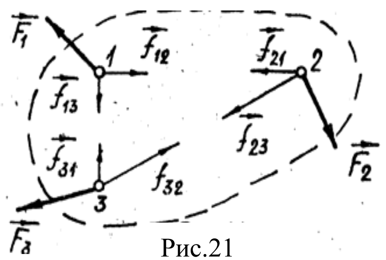


Рис.21

здесь малыми буквами f обозначены внутренние силы; большими F - внешние силы, например, $\overrightarrow{f_{12}}$ - это сила, которая действует на первое тело со стороны второго тела; $\overrightarrow{F_1}$ - результирующая всех внешних сил, действующих на 1-е тело.

Найдем *изменение импульса системы*, для чего геометрически сложим левые и правые части уравнений (11.4) - (11.6). При сложении учтем, что $\overrightarrow{f_{12}} + \overrightarrow{f_{21}} = 0$ и $\overrightarrow{f_{23}} + \overrightarrow{f_{32}} = 0$ и т.д. (по третьему закону Ньютона). Тогда получим:

$$d(\overrightarrow{K_1} + \overrightarrow{K_2} + \overrightarrow{K_3}) = (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3})dt$$

Или кратко:

$$d\vec{K} = \vec{F}dt \qquad (11.7)$$

где $\vec{K} = \overrightarrow{K_1} + \overrightarrow{K_2} + \overrightarrow{K_3}$ - импульс системы

$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$ - результирующая всех внешних сил.

Если система является изолированной, то $\vec{F} = 0$, и, следовательно, $d\vec{K} = 0$, откуда $\vec{K} = const$ (11.8)

Импульс (количество движения) *замкнутой системы тел есть величина постоянная.* Это и есть формулировка закона сохранения импульса (количества движения) системы.

Если система обменивается движением с внешней средой, т.е. не является изолированной, изменение её импульса за время *dt* равно импульсу результирующей силы, действующей на систему, т.е. имеет место соотношение (11.7). Полученный результат легко обобщить на систему, состоящую из любого числа тел.

Обратим внимание на то, что уравнения (11.4) - (11.6) составлены для одного и того же интервала времени dt, а $\overrightarrow{f_{12}}, \overrightarrow{f_{21}}, ..., \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}...$ - это силы, действующие на тела в *один и тот же момент времени t.* Соотношение (11.8) означает следующее: в замкнутой системе тел векторная сумма импульса всех тел *до и после взаимодействия равны*:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + ... + m_n\overrightarrow{\upsilon_n} = m_1\overrightarrow{U_1} + m_2\overrightarrow{U_2} + ... + m_n\overrightarrow{U_n} \qquad (11.9)$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{\upsilon_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{U_i}, \qquad (11.10)$$

где $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_n$ - скорости тел после их взаимодействия.

Закон сохранения импульса можно формулировать и применять не только для полного вектора импульса, но и для его компонент (составляющих*). Если в данном направлении внешние силы не действуют или компенсируются, то составляющая импульса вдоль этого направления не изменяется.*

5. Рассмотрим, при каких условиях сохраняется *момент импульса* отдельного тела и системы тел.

Геометрическую сумму моментов импульса всех тел системы назовём *моментом импульса системы.*

Условия сохранения момента импульса отдельного тела вытекают из основного уравнения динамики вращательного движения:

$$d(I\vec{\omega}) = \vec{M}dt \qquad (11.11)$$

Если результирующий момент всех внешних сил равен нулю, то момент импульса тела остается величиной постоянной.

Если $\vec{M} = 0$, то $d(I\vec{\omega}) = 0$ и $I\vec{\omega} = const$ (11.12)

Рассмотрим *систему* взаимодействующих между собой и с внешней средой вращающихся тел.

Пусть в системе три тела. В произвольный момент времени t моменты импульсов этих тел равны соответственно:

$$I_1\overrightarrow{\omega_1} = \overrightarrow{L_1}; I_2\overrightarrow{\omega_2} = \overrightarrow{L_2}; I_3\overrightarrow{\omega_3} = \overrightarrow{L_3}$$

Изменение момента импульса каждого из тел обусловлено действием как внутренних, так и внешних вращательных моментов.

Тогда согласно основному закону динамики вращательного движения (изменение момента импульса тела равно импульсу момента действующих сил):

$$d\overrightarrow{L_1} = (\overrightarrow{M_{12}} + \overrightarrow{M_{13}} + \overrightarrow{M_{1внеш}})dt \qquad (11.13)$$

$$d\overrightarrow{L_2} = (\overrightarrow{M_{21}} + \overrightarrow{M_{23}} + \overrightarrow{M_{2внеш}})dt \qquad (11.14)$$

$$d\overrightarrow{L_3} = (\overrightarrow{M_{31}} + \overrightarrow{M_{32}} + \overrightarrow{M_{3внеш}})dt \qquad (11.15)$$

здесь $\overrightarrow{M_{12}}$ - вращательный момент, действующий на первое тело со стороны второго. $\overrightarrow{M_{1внеш}}$ - полный вращательный момент, действующий на первое тело со стороны внешних тел (то же для второго и третьего тел).

Найдём изменения момента импульса системы за время dt, для чего почленно сложим уравнения (11.13)-(11.15). При сложении учтём, что $\overrightarrow{M_{12}} = -\overrightarrow{M_{21}}, \overrightarrow{M_{23}} = -\overrightarrow{M_{32}}$ и т.д. (по третьему закону Ньютона),

получим $d(\overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2} + \overrightarrow{L_3}) = (\overrightarrow{M}_1^{внеш} + \overrightarrow{M}_2^{внеш} + \overrightarrow{M}_3^{внеш})dt$,

где $\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 = \vec{L}-$ момент импульса системы;

$\overrightarrow{M}_1^{внеш} + \overrightarrow{M}_2^{внеш} + \overrightarrow{M}_3^{внеш} = \vec{M}^{внеш}$ – результирующий момент внешних сил.

Тогда имеем

$$d\vec{L} = \overrightarrow{M}^{внеш}dt \qquad (11.16)$$

Если на тела системы внешние вращательные моменты не действуют $\left(\overrightarrow{M}^{внеш} = 0\right)$, то $d\vec{L} = 0$ и $\vec{L} = const$ (11.17)

Таким образом, *момент импульса замкнутой системы тел есть величина постоянная.*

Если система не является замкнутой, то изменение момента импульса этой системы, равно импульсу внешнего вращательного момента действующего на систему, т.е. имеет место соотношение (11.16).

Полученный вывод можно обобщить на систему, состоящую из любого числа тел.

В замкнутой системе тел может происходить передача вращательного движения от одного тела к другому, но так, что геометрическая сумма моментов импульса всех тел все время остаётся постоянной:

$$I_1\overrightarrow{\omega_1} + I_2\overrightarrow{\omega_2} + ... + I_n\overrightarrow{\omega_n} = I_1\overrightarrow{\omega_1'} + I_2\overrightarrow{\omega_2'} + ... + I_n\overrightarrow{\omega_n'} \quad (11.18)$$

6. Сформулируем *закон сохранения механической энергии*. Если тело *перемещается*, то оно обладает кинетической энергией. Мы знаем, что изменение кинетической энергии может быть обусловлено работой как консервативных, так и неконсервативных сил:

$$dE_к = dA^{конс} + dA^{неконс} \quad (11.19)$$

в этом выражении $dA^{конс}$ - элементарная работа, совершаемая всеми консервативными силами; $dA^{неконс}$ - элементарная работа, совершаемая всеми неконсервативными силами.

Если $dA^{конс} = 0$ и $dA^{неконс} = 0$ $dE_к = 0$ и $E_к = const$

т.е. *кинетическая энергия тела не изменится, если работа, совершаемая всеми приложенными к нему силами, равна нулю.*

Как известно, работа, совершаемая консервативной силой, равна *убыли потенциальной энергии*: $dA^{конс} = -dE_п$.

Учитывая это, соотношение (11.19) можно переписать:

$dE_к = dA^{неконс} - dE_п$ или $dE_к + dE_п = dA^{неконс}$,

но $dE_к + dE_п = d(E_к + E_п) = dE$ где $E = E_к + E_п$ - полная механическая энергия, а dE - её изменение.

Следовательно, $dE = dA^{неконс}$ (11.20)

Таким образом, *изменение полной механической энергии тела обусловлено работой только неконсервативных сил.* Если на тело не действуют неконсервативные силы ($dA^{неконс} = 0$), то полная механическая энергия этого тела сохраняется неизменной[5].

$$dE = 0 \text{ и } E = const \qquad (11.21)$$

7. Этот вывод можно обобщить на систему, состоящую из любого числа взаимодействующих тел. Только в случае системы тел необходимо иметь в виду следующее: неконсервативные силы, действующие на тела системы, могут быть и внутренними и внешними.

Поэтому для того, чтобы сохранялась механическая энергия системы тел, необходимо, чтобы система была *замкнутой* (не действуют внешние неконсервативные силы) и *консервативной* (не действуют внутренние неконсервативные силы)[6].

Таким образом, *полная механическая энергия замкнутой консервативной системы есть величина постоянная.*

$$E_n + \sum_{i=1}^{n} E_{ki} = const$$

E_n - потенциальная энергия системы как целого;

E_{ki} - кинетическая энергия *i*-го тела;

$\sum_{i=1}^{n} E_{ki}$ - кинетическая энергия системы.

В замкнутой консервативной системе могут происходить лишь превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно, причём убыль кинетической энергии всегда равна приращению потенциальной энергии и наоборот.

8. Если внутри замкнутой системы действуют *неконсервативные* силы, то механическая энергия такой системы постепенно *уменьшается,* превращаясь в другие, немеханические формы энергии. Мерой этого превращения является *работа*, совершаемая неконсервативными силами.

Замкнутые неконсервативные системы, механическая энергия которых убывает, называются диссипативными[7]

---

[5] В сущности, правильнее было бы говорить о сохранении полной энергии системы двух тел: данного тела и того тела, с которым оно взаимодействует посредством консервативной силы, ибо потенциальная энергия может быть только взаимной.

[6] Консервативные силы, определяющие наличие потенциальной энергии системы, всегда следует считать внутренними силами.

[7] От лат. dissipatio - рассеяние.

Представим, к примеру, движение парашютиста после того, как он раскрыл парашют. Это движение является, в первом приближении, равномерным. Так как $\vec{\upsilon}$ =*const*, кинетическая энергия парашютиста во время движения не изменяется: $E_к = const$

Потенциальная энергия парашютиста уменьшается: парашютист приближается к Земле. Следовательно, полная механическая энергия замкнутой системы Земля – парашютист – атмосфера уменьшается. Эта энергия рассеивается в атмосфере, превращаясь в энергию хаотического движения молекул воздуха. Мерой этого превращения является работа сил сопротивления воздуха, действующих на парашютиста во время его движения.

В принципе, любая реальная механическая система диссипативна, ибо в любой системе всегда действуют какие-либо неконсервативные силы, например силы трения, сопротивления, силы пластической деформации и т.д.

Однако следует помнить, что в любой замкнутой системе убыль механической энергии в точности равна приращению энергии других, немеханических форм движения, т.е. полная энергия различных форм движения в такой системе сохраняется неизменной.

9. В заключение отметим, что диссипативные системы не следует отождествлять с просто неконсервативными системами, ибо механическая энергия первых может только *убывать*, а энергия последних может и *убывать и возрастать* за счёт притока энергии извне.

12 ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ ФИЗИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ

I. *Явление отдачи*

Закон сохранения импульса позволяет объяснить *явление отдачи.* Это явление имеет место и при взаимодействии макроскопических тел (выстрел из орудия, реактивное движение) и при взаимодействии микрообъектов (например, распад атомных ядер).

1. Рассмотрим, к примеру, α - распад. При α - распаде ядра радиоактивного элемента выбрасывают α - частицы - ядра атомов гелия. Если до распада основное ядро покоилось, то суммарный импульс продуктов распада должен остаться равным нулю:

$$M\overrightarrow{\upsilon_1} + m\overrightarrow{\upsilon_2} = 0 \ , \qquad (12.1)$$

здесь M и $\overrightarrow{\upsilon_1}$ - масса и скорость вновь образовавшегося ядра, m и $\overrightarrow{\upsilon_2}$ - масса и скорость α - частицы. При этом α - частица и ядро разлетаются в прямо противоположные стороны: $M\overrightarrow{\upsilon_1} = -m\overrightarrow{\upsilon_2}$. Скорости ядра и α - частицы обратно пропорциональны их массам:

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{m}{M} \tag{12.2}$$

Заметим, что на явлении отдачи ядер был осуществлён один из первых экспериментов по обнаружению *нейтрино* - самой „неуловимой" из элементарных частиц.

2. Явление “*непрерывной отдачи"* лежит в основе *реактивного движения.*

Реактивный двигатель (ракета) - единственный летательный аппарат, *не нуждающийся* при своем движении в *опоре*. Изменение скорости реактивного двигателя осуществляется без участия внешних сил (если не учитывать действие сил тяготения, от которых, как известно, нельзя избавиться).

Рассмотрим, от чего зависит скорость, приобретаемая ракетой во время разгона.

Вследствие непрерывного истечения продуктов сгорания - масса ракеты постепенно *уменьшается*, а её скорость *возрастает.*

Пусть в некоторый момент времени t масса ракеты и её скорость относительно Земли равны соответственно M и $\vec{\upsilon}$. Импульс ракеты в этот момент времени $M\vec{\upsilon}$. Если за время dt масса выброшенных продуктов сгорания равна dM, то масса ракеты в момент временя $t+dt$ станет равной $(M\text{-}dM)$, а ее импульс $(M\text{-}dM)\,(\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon})$, $d\vec{\upsilon}$ - приращение скорости ракеты за время dt. Импульс выброшенных газов в момент времени $t+dt$: $dM(\vec{U} + \vec{\upsilon})$

$\vec{U}$ - скорость истечения газов относительно ракеты;

$(\vec{U} + \vec{\upsilon})$ - скорость газов относительно Земли. В соответствии с законом сохранения импульса, импульсы системы до и после взаимодействия равны:

$$M\vec{\upsilon} = (M - dM)(\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon}) + dM(\vec{U} + \vec{\upsilon}) \tag{12.3}$$

Спроектируем все векторы этого соотношения на направление $\vec{\upsilon}$

$$M\upsilon = (M - dM)(\upsilon + d\upsilon) + dM(-U + \upsilon) \tag{12.4}$$

(скорость $\vec{U}$ *противоположна* направлению $\vec{\upsilon}$, поэтому её проекция на направление $\vec{\upsilon}$ отрицательна). Раскроем скобки:

$$M\upsilon = M\upsilon - dM\upsilon + Md\upsilon - dMd\upsilon - dMU + dM\upsilon$$

Пренебрегая бесконечно малой величиной второго порядка $dMd\upsilon$, получим $Md\upsilon - dMU = 0$

Разделим переменные: $d\upsilon = U\dfrac{dM}{M}$

Учтем, наконец, что dM - изменение массы ракеты *отрицательно*;

$$d\upsilon = -U\frac{dM}{M} \qquad (12.5)$$

(dM теперь - абсолютная величина изменения массы ракеты). Знак “минус” означает, что *уменьшению массы* ракеты соответствует *возрастание её скорости.*

Полагая, что скорость истечения продуктов сгорания относительно ракеты постоянна, нетрудно проинтегрировать написанное уравнение. Если масса ракеты на старте ($\upsilon=0$) была M_0, а в момент, когда скорость достигла значения υ, стала равной M, то интегрирование дает

$$\int_0^{\upsilon} d\upsilon = -U\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M}; \qquad \upsilon = U\ln\frac{M_0}{M} \qquad (12.6)$$

Полученное соотношение называется формулой Циолковского, а величина $\dfrac{M_0}{M}$ - числом Циолковского.

При скорости истечения газов $\upsilon >$ 2000 *м/сек* и $\dfrac{M_0}{M} = 10$, скорость ракеты получается порядка 4,8 км/сек. Дальнейший рост числа Циолковского приводит к довольно медленному увеличению скорости ракеты. Поэтому технически целесообразным оказывается создание ракетных “поездов” – многоступенчатых ракет.

II. *Неупругие столкновения*

1.*Столкновение (соударение*) - такое *сближение* двух или нескольких тел, при котором между телами имеет место *кратковременное,* но весьма *сильное взаимодействие, при этом скорости меняются на конечные величины за этот очень малый промежуток времени.*

При этом вовсе необязательно, чтобы тела непосредственно соприкасались (хотя в некоторых случаях это имеет место).

Примеры соударений: удар биллиардных шаров, столкновения молекул и атомов, попадание пули в мишень и т.д.

Так как время взаимодействия при столкновениях мало, а силы, возникающие при этом, весьма велики, то действием всех постоянных сил (сил тяготения, например) можно пренебречь и рассматривать со-ударяющиеся тела как *замкнутую систему*. Как известно, только в *замкнутой* системе выполняются законы *сохранения.*

2. Различают *упругие и неупругие* столкновения. Предельными, идеализированными случаями столкновений являются столкновения *абсолютно упругие и абсолютно неупругие.*

3. Если после столкновения внутреннее состояние тел *изменяется,* если тела *не восстанавливают* свою первоначальную форму, если столкновение сопровождается *превращением кинетической энергии* тел в другие виды, то столкновение называется *неупругими.*

Столкновение тел называется *абсолютно неупругим*, если по его завершении тела двигаются как единое целое. Примеры: столкновение шаров из мягкого воска, столкновение двух разноимённых ионов, сопровождающееся образованием молекулы, захват свободного электрона положительным ионом и т.д.

Рассмотрим абсолютно неупругое столкновение более подробно. Пусть абсолютно неупругое столкновение происходит между двумя телами массой m_1 и m_2, движущимися со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$. По закону сохранения импульса –

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{U} + m_2\vec{U} \tag{12.7}$$

откуда скорость тел после столкновения:

$$\vec{U} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2} \tag{12.8}$$

Как видно из этой формулы, движение тел после столкновения происходит *вдоль диагонали параллелограмма* построенного на векторах $m_1\vec{\upsilon}_1$ и $m_2\vec{\upsilon}_2$ как на сторонах (рис.22)

Если до столкновения линии скоростей $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$ лежали вдоль прямой, соединяющей центры масс тел, то столкновение называется *центральным*, в противном случае - нецентральным.

В случае центрального соударения при переходе от векторной формы записи соотношения (12.8) к скалярной векторы импульсов разумно проектировать на направление, совпадающее с направлением вектора скорости одного из тел, например, первого. Тогда

$$U = \frac{m_1\upsilon_1 \pm m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$$

где знак “+” относится к случаю, когда тела до

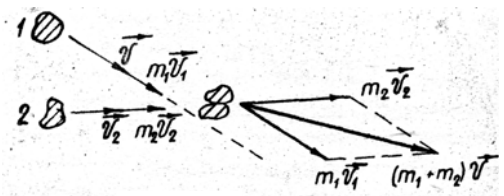


Рис.22

столкновения *двигались в одном* направлении, *“-“* - когда тела двигались *навстречу* друг другу.

1. Найдём, какая часть кинетической энергии превращается при центральном абсолютно неупругом столкновении в другие виды энергии. Суммарная кинетическая энергия тел до столкновения равна $E_{k_1} = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2}$ после столкновения $E_{k_2} = \frac{(m_1 + m_2)U^2}{2}$

В случае центрального столкновения $U = \frac{m_1 \upsilon_1 \pm m_2 \upsilon_2}{m_1 + m_2}$

Тогда $$E_{k_2} = \frac{m_1^2 \upsilon_1^2 \pm 2 m_1 m_2 \upsilon_1 \upsilon_2 + m_2^2 \upsilon_2^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Убыль кинетической энергии системы

$$E_{k_1} - E_{k_2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\upsilon_1 \mp \upsilon_2)^2 \qquad (12.9)$$

Таким образом, часть кинетической энергии, превращающаяся в другие виды при абсолютно неупругом центральном соударении, зависит от *соотношения масс тел и их относительной скорости* ($\upsilon_1 \mp \upsilon_2$).[8]

Рассмотрим один частный случай: $\upsilon_1 >> \upsilon_2$ но $m_1 << m_2$ (это имеет место с точки зрения *классической электронной теории* металлов при столкновении электронов проводимости в металле с узлами кристаллической решётки).

Разделим числитель и знаменатель в выражении (12.9) на m_2:

$$E_{k1} - E_{k2} = \frac{1}{2} \frac{m_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} (\upsilon_1 \pm \upsilon_2)^2$$

Так как $\upsilon_1 >> \upsilon_2$ и $m_1 << m_2$, то величиной υ_2 по сравнению с υ_1 и дробью $\frac{m_1}{m_2}$ по сравнению с единицей можно пренебречь. Тогда

$$E_{k_1} - E_{k_2} \approx \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} \qquad (12.10)$$

[8] Знак “- “ в окончательной формуле (12.9) относится к случаю, когда тела до столкновения двигались в одном направлении, “+” - когда тела двигались навстречу друг другу.

Таким образом, при абсолютно неупругом столкновении быстрой частицы малой массы с *медленной* (или покоящейся) частицей *большой массы*, практически *вся* кинетическая энергия быстрой частицы преобразуется в другие виды энергии.

III. *Упругие столкновения*

1. Столкновение называется *абсолютно упругим,* если по его завершении тела *полностью восстанавливают* свою первоначальную *форму* и в их внутреннем состоянии *не происходит* каких-либо *изменений,* если сохраняется суммарная механическая энергия тел.

2. Столкновения обычных, макроскопических тел в реальных условиях всегда бывают в той или иной степени неупругими, ибо они всегда сопровождаются нагреванием тел, образованием акустических волн и т.д., т.е. превращением части механической энергии тел в другие виды. Однако в некоторых случаях столкновения макроскопических тел можно с достаточной степенью точности считать абсолютно упругими (например, столкновение шаров из слоновой кости или закалённой стали).

Особо важную роль упругие столкновения играют в *физике атомных явлений*. Так, столкновения молекул газа друг с другом и со стенками сосуда, в который газ заключён, можно уподобить соударениям абсолютно упругих шаров. Упруго рассеиваются α - частицы при прохождении через тонкие плёнки вещества (опыты Резерфорда), рентгеновские кванты при взаимодействии с электронами и т.д.

3. Рассмотрим *абсолютно упругое центральное столкновение двух шаров*. Пусть массы шаров m_1 и m_2. Шары двигаются один вслед за другим (первый шар догоняет второй) и перед столкновением имеют скорости $\vec{\upsilon_1}$ и $\vec{\upsilon_2}$. Во время столкновения шары *деформируются,* силы упругой деформации изменяют скорости шаров. Обозначим скорости шаров после столкновения $\vec{U}_1$ и $\vec{U}_2$

Полагая, что шары образуют замкнутую систему, применим к ним закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{\upsilon_1} + m_2\vec{\upsilon_2} = m_1\vec{U_1} + m_2\vec{U_2} \qquad (12.11)$$

Пусть массы шаров таковы, что и после соударения они продолжают двигаться в том же направлении, в каком двигались до столкновения. Тогда соотношение (12.11) в проекциях запишется так:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1U_1 + m_2U_2 \qquad (12.12)$$

Детальный анализ деформации шаров в процессе упругого столкновения весьма сложен. Но этот анализ, в принципе, и не нужен.

Так как шары полностью восстанавливают свою первоначальную форму, и в их внутреннем состоянии не происходит изменений, то закон сохранения энергии сводится к сохранению *кинетической энергии*:

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}+\frac{m_2\upsilon_2^2}{2}=\frac{m_1U_1^2}{2}+\frac{m_2U_2^2}{2} \qquad (12.13)$$

Решая уравнения (12.12) и (12.13) совместно (это следует проделать самостоятельно), получим:

$$U_1=\frac{\upsilon_1(m_1-m_2)+2m_2\upsilon_2}{m_1+m_2} \qquad (12.14)$$

$$U_2=\frac{\upsilon_2(m_2-m_1)+2m_1\upsilon_1}{m_1+m_2} \qquad (12.15)$$

4. Рассмотрим некоторые частные случаи:

а) *Массы шаров равны*: $m_1 = m_2 = m$. Тогда $U_1=\upsilon_2$ и $U_2=\upsilon_1$. Шары просто обмениваются своими скоростями.

Если до столкновения второй шар покоился (υ_2=0), то после столкновения он начинает двигаться со скоростью первого шара $U_2=\upsilon_1$, а первый шар останавливается U_1=0

б) *Масса второго шара значительно больше массы первого* $m_2>>m_1$. Разделим числитель и знаменатель соотношений (12.14) и (12.15) на m_2:

$$U_1=\frac{\left(\frac{m_1}{m_2}-1\right)\upsilon_1+2\upsilon_2}{\frac{m_1}{m_2}+1} \text{ и } U_2=\frac{\left(1-\frac{m_1}{m_2}\right)\upsilon_2+2\frac{m_1}{m_2}\upsilon_1}{\frac{m_1}{m_2}+1}$$

Отношением $\frac{m_1}{m_2}$ можно пренебречь. Тогда $U_1\approx-\upsilon_1+2\upsilon_2$ и $U_2\approx\upsilon_2$

Вывод: при упругом центральном столкновении шара малой массы с шаром большой массы скорость шара большей массы практически *не изменяется*. Если υ_2=0 (массивный шар покоится), то $U_1\approx-\upsilon_1$, т.е. шар малой массы при упругом ударе отскакивает от массивного неподвижного шара со скоростью, почти равной по величине и противоположной по направлению той скорости, с которой он ударяется. При этом лёгкий шар практически *не передаёт* свою кинетическую энергию массивному шару.

Полученный вывод можно применить к упругому удару шара о неподвижную стенку, перпендикулярную направлению движения шара (с этим случаем мы сталкиваемся, например, при расчёте давления, оказываемого молекулами газа на стенки сосуда).

Найдём изменение импульса шара при таком упругом отражении:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = m_1 U_1 - m_1 \upsilon_1 = -m_1 \upsilon_1 - m_1 \upsilon_1 = -2 m_1 \upsilon_1$$

Такой же по величине, но противоположной по знаку импульс получит стенка.

в) Шары двигаются *в одном направлении*. $m_1 << m_2$, но $\upsilon_1 >> \upsilon_2$.

Тогда $U_1 = -\upsilon_1 + 2\upsilon_2 = -(\upsilon_1 - 2\upsilon_2)$.

Малый шар отскакивает от большего со скоростью, *меньшей* первоначальной на величину $2\upsilon_2$.

Нечто подобное происходит в цилиндре с газом при *расширении газа.* Молекулы, ударяющиеся об удаляющийся поршень, *теряют* свою скорость и, следовательно, кинетическую энергию. Эти "потери" проявляются в *охлаждении* газа.

г) Шары двигаются *навстречу* друг другу. $m_1 << m_2$, $\upsilon_1 >> \upsilon_2$. Тогда, $U_1 = -\upsilon_1 - 2\upsilon_2 = -(\upsilon_1 + 2\upsilon_2)$, проекция скорости υ_2 на положительно выбранное направление отрицательна.

Малый шар отскакивает от большого со скоростью, *превышающей* ту, с которой он ударяется о большой шар на величину $2\upsilon_2$.

Нечто подобное происходит в цилиндре с газом при *сжатии* газа. Молекулы, ударяющиеся о *надвигающийся* поршень, увеличивают свою скорость и кинетическую энергию, что проявляется в *нагревании газа.*

IV. *Расчёт второй космической скорости (для Земли)*

Вторая "земная" космическая скорость υ_{II} – это скорость, которую необходимо сообщить телу *относительно Земли,* чтобы оно преодолело поле земного тяготения, т.е. оказалось способным удалиться от Земли на бесконечно большое расстояние.

Пренебрегая действием на тело Солнца, Луны, планет, звёзд и т.д. и полагая, что в системе Земля - тело отсутствуют неконсервативные силы (а таковые в действительности имеются - это силы сопротивления атмосферы), мы можем считать эту систему замкнутой и консервативной. В такой системе полная механическая энергия есть величина постоянная.

Если нулевой уровень потенциальной энергии выбрать в бесконечности, то полная механическая энергия тела в любой точке траектории будет равна нулю (по мере удаления тела от Земли кинетическая энергия, сообщенная ему на старте, будет превращаться в потенциальную. В бесконечности, где потенциальная энергия тела равна нулю, обратится в нуль и кинетическая энергия $E_к=0$. Следовательно, полная энергия $E=E_п+E_к.= 0$.)

Приравняв полную энергию тела на старте (на поверхности Земли) и в бесконечности, мы можем вычислить вторую космическую скорость. На старте тело обладает положительной кинетической энергией $E_k = \frac{m\upsilon_{II}^2}{2}$ и *отрицательной* потенциальной энергией $E_n = -\gamma\frac{mM_з}{R_з}$, m - масса тела; $M_з$ - масса Земли; υ_{II} - скорость тела на старте (искомая космическая скорость);$R_з$ - радиус Земли (предполагаем, что необходимую космическую скорость тело приобретает в непосредственной близости от поверхности Земли).

Полная энергия тела $$\frac{m\upsilon_{II}^2}{2} + \left(-\gamma\frac{mM_з}{R_з}\right) = 0 \qquad (12.16)$$

откуда $$\upsilon_{II} = \sqrt{2\gamma\frac{M_з}{R_з}} \qquad (12.17)$$

Массу Земли можно выразить через ускорение свободного падения g_0 (вблизи поверхности Земли): $g_0 = \gamma\frac{M_з}{R_з^2}$.

Подставив это выражение в (12.17), получим окончательно

$$\upsilon_{II} = \sqrt{2g_0R_з} = \upsilon_I\sqrt{2} \qquad (12.18)$$

так как $\sqrt{g_0R_з}$ есть первая космическая скорость.

V. *Условия равновесия механической системы.*

1. Пусть на некоторое тело действуют только консервативная сила. Это значит, что данное тело вместе с телами, с которыми оно взаимодействует, образует *замкнутую консервативную систему*. Выясним, при каких условиях рассматриваемое тело будет находиться в состоянии равновесия (сформулируем эти условия с *энергетической точки зрения)*.
2. Условия равновесия с точки зрения *динамики* нам известны: тело находится в равновесии, если его скорость и геометрическая сумма всех действующих на него сил равны *нулю:*

$$\vec{\upsilon} = 0 \qquad (12.19)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F_i} = 0 \qquad (12.20)$$

Пусть консервативная сила, действующая на тело, такова, что потенциальная энергия тела зависит только от одной координаты, например, x. График этой зависимости приведён на рисунке 23. Из связи потенциальной энергии с силой следует, что в состоянии равновесия производная от потенциальной энергии по x равна нулю.

$$F_x = -\frac{dE_n}{dx} = 0 \qquad (12.21)$$

т.е. в состоянии равновесия тело обладает экстремальным запасом потенциальной энергии. Убедимся в том, что потенциальная энергия в состоянии устойчивого равновесия *минимальная*, а в состоянии неустойчивого равновесия – *максимальная*.

3. Устойчивое равновесие системы характеризуется тем, что при отклонении системы из этого состояния возникают силы, *возвращающие* систему в первоначальное состояние.

При отклонении из состояния неустойчивого равновесия возникают силы, стремящиеся отклонить систему ещё *дальше* от первоначального положения. Отклоним тело из положения *A влево* (см. рис.23). При этом появится сила $\vec{F}'$, проекция которой на ось x равна:

$$F'_x = -\frac{dE_n}{dx}. \qquad (12.22)$$

Производная $\frac{dE_n}{dx} = tg\alpha$ в точке x' отрицательна (угол α' - тупой). Из (12.22) следует, $\vec{F'_x}$ >0; направление силы $\vec{F}'$ *совпадает* с направлением оси x, т.е. сила направления *к положению равновесия A*. Тело самопроизвольно, без дополнительного воздействия вернётся в положение равновесия. Следовательно, состояние *A* – состояние *устойчивого* равновесия. Но в этом состоянии, как видно из графика, потенциальная энергия *минимальна.*

4. Отклоним тело из положения *B* также влево. Проекция силы $\vec{F}''$ на ось x:

$$F''_x = -\frac{dE_n}{dx}$$

получается *отрицательной* ($\frac{dE_n}{dx} = tg\alpha$ >0, так как угол α'' острый).

Это значит, что направление силы $\vec{F}''$ *противоположно*

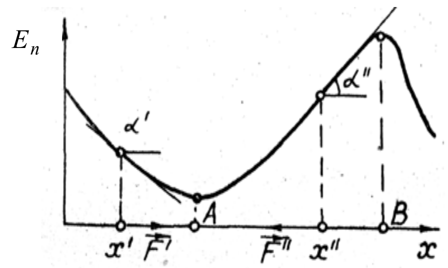


Рис.23

положительному направлению оси x, т.е. сила $\overrightarrow{F''}$ направлена *от положения равновесия.* Состояние B, в котором потенциальная энергия максимальна, *неустойчиво.*

Таким образом, в состоянии *устойчивого* равновесия потенциальная энергия системы *минимальна*, в состоянии *неустойчивого* равновесия – *максимальна.*

Если известно, что потенциальная энергия некоторой системы *минимальна,* то это ещё не значит, что система находится в равновесии. Необходимо ещё, чтобы в этом состоянии система не обладала кинетической энергией:

$$E_k = 0 \qquad (12.23)$$

Итак, система находится в состоянии устойчивого равновесия, если $E_к$=0, а $E_п$ минимальна. Если $E_к$=0, а $E_п$ максимальна, то система находится в неустойчивом равновесии.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Человек стоит в центре скамьи Жуковского и вместе с ней вращается по инерции. Частота обращения $\nu_1 = 0{,}5 об/с$. Момент инерции тела человека относительно оси вращения $J_0 = 1{,}6 кг.м^2$. В вытянутых в стороны руках человек держит две гири массой $m = 2кг$ каждая. Расстояние между гирями $l_1 = 1{,}6м$.

Сколько оборотов в секунду будет делать скамейка с человеком, если он опустит руки и расстояние l_2 между гирями станет равным $0{,}4м$? Моментом инерции скамейки пренебречь.

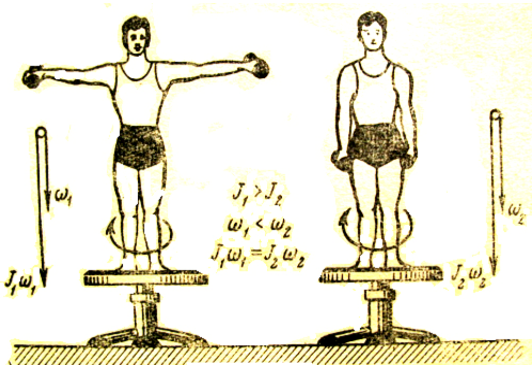


Рис.24

Решение. Человек, держащий гири (см. рис.24), составляет вместе со скамейкой изолированную механическую систему, поэтому момент импульса $J\omega$ этой системы должен иметь постоянное значение.

Следовательно, для нашего случая

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2,$$

где J_1 и ω_1 - момент инерции человека и угловая скорость скамейки и человека с вытянутыми руками. J_2 и ω_2 - момент инерции тела человека и угловая скорость скамейки и человека с опущенными руками. Отсюда $\omega_2 = \dfrac{J_1}{J_2}\omega_1$, заменив угловую скорость через частоту ν ($\omega = 2\pi\nu$), получим $\nu_2 = \dfrac{J_1}{J_2}\nu_{1.}$

Момент инерции системы, рассматриваемой в данной задаче, равен сумме момента инерции тела человека J_0 и момента инерции гирь в руках человека, который можно определить по формуле момента инерции материальной точки $J = mr^2$.

Следовательно, $J_1 = J_0 + 2m\left(\dfrac{l_1}{2}\right)^2$, $J_2 = J_0 + 2m\left(\dfrac{l_2}{2}\right)^2$,

где m – масса каждой из гирь, l_1 и l_2 – первоначальное и конечное расстояние между ними. С учетом сделанных замечаний имеем

$$\nu_2 = \frac{J_1}{J_2}\nu_1 = \frac{J_0 + 2m\left(\dfrac{l_1}{2}\right)^2}{J_0 + 2m\left(\dfrac{L_2}{2}\right)^2}\nu_1.$$

Подставляя численные значения величин, найдем

$$\nu_2 = \frac{1{,}6 + 2\cdot 2\left(\dfrac{1{,}6}{2}\right)^2}{1{,}6 + 2\cdot 2\left(\dfrac{0{,}4}{2}\right)^2}\cdot 0{,}5 = 1{,}189(об/с).$$

Пример 2. Стержень длиной $l = 1{,}5 м$ и массой $M = 10 кг$ может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня (см. рис.25). В середину стержня ударяет пуля массой $m = 10 г$, летящая в горизонтальном направлении со скоростью $\upsilon_0 = 500 м/с$, и застревает в стержне.

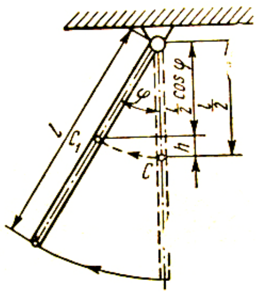


Рис.25

На какой угол φ отклонится стержень после удара?

Решение. Удар пули следует рассматривать как неупругий: после удара и пуля, и соответствующая точка стержня будут двигаться с одинаковыми скоростями.

Сначала пуля, ударившись о стержень, за ничтожно малый промежуток времени приводит его в движение с некоторой угловой скоростью ω и сообщает ему некоторую кинетческую энергию $T = \frac{J\omega^2}{2}$, где $J = \frac{Ml^2}{3}$ – момент инерции стержня относительно оси вращения. Затем стержень поворачивается на некоторый угол, причем его центр тяжести поднимается на некоторую высоту $h = \frac{l}{2}(1 - \cos\varphi)$.

В отклоненном положении стержень будет обладать потенциальной энергией $\Pi = Mg\frac{l}{2}(1 - \cos\varphi)$.

Потенциальная энергия получена за счет кинетической энергии и равна ей по закону сохранения энергии, т.е.

$$Mg\frac{l}{2}(1 - \cos\varphi) = \frac{J\omega^2}{2}, \text{ откуда } \qquad \cos\varphi = 1 - \frac{J\omega^2}{Mgl} = 1 - \frac{l\omega^2}{3g}.$$

Для определения угловой скорости ω воспользуемся законом сохранения момента импульса.

В начальный момент удара угловая скорость стержня $\omega_0 = 0$ и поэтому момент импульса стержня $L_{01} = J\omega_0 = 0$. Пуля коснулась стержня, имея линейную скорость υ_0, и начала углубляться в стержень, сообщая ему угловое ускорение и участвуя во вращении стержня около оси.

Начальный импульс пули $L_{02} = m\upsilon_0 r$, где $r = \frac{l}{2}$ – расстояние точки попадания пули от оси вращения.

В конечный момент удара стержень имел угловую скорость ω, а пуля – линейную скорость υ, равную линейной скорости точек стержня, находящихся на расстоянии r от оси вращения.
Так как $\upsilon = \omega r$, то конечный момент импульса пули

$$L_2 = m\upsilon r = mr^2\omega.$$

Применив закон сохранения момента импульса, можно записать

$$m\upsilon_0 r = J\omega + mr^2\omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{m\upsilon_0 r}{J + mr^2} = \frac{m\upsilon_0 r}{\frac{Ml^2}{3} + mr^2}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$\omega = \frac{0{,}01 \cdot 500 \cdot 0{,}75}{\frac{1}{3}10(1{,}5)^2 + 0{,}01(0{,}75)^2} = 0{,}5(c^{-1}).$$

После этого находим

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1{,}5(0{,}5)^2}{3 \cdot 9{,}8} = 0{,}87, \quad \varphi = 9^0 20'.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какая система тел называется замкнутой?
2. Какая система взаимодействующих тел называется консервативной?
3. При каких условиях сохраняется импульс отдельного тела?
4. Сформулируйте закон сохранения импульса для системы тел.
5. Сформулируйте закон сохранения момента импульса (для отдельного тела и системы тел).
6. Сформулируйте закон сохранения механической энергии.
7. Какие системы называются диссипативными?
8. Что называется столкновением тел?
9. Какое столкновение называется абсолютно неупругим и какое абсолютно упругим?
10. Какие законы выполняются при абсолютно неупругом и абсолютно упругом столкновениях тел, образующих замкнутую систему?
11. Что такое вторая космическая скорость? Выведите формулу для этой скорости.
12. Сформулируйте условия равновесия механической системы.

ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ

13 ДАВЛЕНИЕ В ЖИДКОСТИ. ЗАКОН АРХИМЕДА

Жидкостями называются вещества, имеющие *определённый объём* и принимающие *форму* того сосуда, в котором они находятся.

Раздел механики, в котором изучаются равновесие и движение жидкостей, их взаимодействие между собой и обтекаемыми ими твердыми телами, называется гидромеханикой.

Гидромеханика обычно имеет дело с несжимаемыми жидкостями – жидкостями, плотность которых всюду одинакова и не меняется со временем.

Если в покоящуюся жидкость поместить тонкую пластинку, то части жидкости, находящиеся по разные стороны от неё, будут действовать на каждый её элемент ΔS с силами ΔF, которые независимо от того, как пластинка ориентирована, будут равны по модулю и направлены перпендикулярно площадке ΔS, так как наличие касательных сил привело бы частицы жидкости в движение.

Физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади, называется *давлением p жидкости:*

$$p = \Delta F / \Delta S.$$

Единицей давления является паскаль (Па): 1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м^2 (1 Па =1 Н/м^2).

Давление при равновесии жидкостей подчиняется закону Паскаля: *давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям и передаётся ею одинаково по всему объёму*.

При равновесии жидкости давление по горизонтали всегда одинаково, иначе не было бы равновесия. Поэтому свободная поверхность жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда.

Если жидкость несжимаема, то её плотность не зависит от давления. Тогда при поперечном сечении S столба жидкости, его высоте h и плотности ρ вес столба $P = \rho g S h$, а давление на его основание

$$p = P / S = \rho g S h / S = \rho g h, \qquad (13.1)$$

т.е. давление изменяется линейно с высотой. Давление $\rho g h$ называется *гидростатическим давлением.*

Согласно (13.1), сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует сила, определяемая законом Архимеда: *на тело, погружен-*

ное в жидкость, действует со стороны этой жидкости направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости:

$$F_A = \rho g V\ , \qquad (13.2)$$

где ρ - плотность жидкости, V - объем погруженного в нее тела.

14 УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ЖИДКОСТИ

Движение жидкостей называется *течением,* а совокупность частиц движущейся жидкости – *потоком.* Графически движение жидкостей изображается с помощью линий тока, которые проводятся так, что касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства (рис.26). Линии тока проводятся так, чтобы густота их, характеризуемая отношением числа линий к площади перпендикулярной им площадки, через которую они проходят, была больше там, где больше скорость течения, и меньше там, где жидкость течет медленнее.

Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют *трубкой тока.* Течение жидкости называется *установившимся* (стационарным), если форма и расположение линий тока, а так же значения скоростей со временем не изменяются.

Выберем произвольно в какой-либо трубке тока два сечения S_1 и S_2, перпендикулярные направлению скорости (рис.27).

За время Δt через сечение S проходит объём жидкости $S\upsilon\Delta t$, следовательно, за 1 *с* через сечение S_1 пройдет объём жидкости $S_1\upsilon_1$, а через сечение S_2 объем жидкости $S_2\upsilon_2$. Предполагается, что скорости υ_1, υ_2 в сечениях не изменяются с течением времени. Учитывая, что жидкость несжимаема, через оба сечения за 1 *с* пройдет одинаковый объём жидкости, т.е.

$$S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2 = const. \qquad (14.1)$$

Рис.26

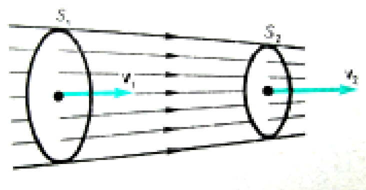


Рис.27

Выражение (14.1) называется *уравнением неразрывности* для несжимаемой жидкости.

15 УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕГО

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости трубку тока, ограниченную сечениями S_1 и S_2 (рис.28). Пусть в месте сечения S_1 скорость течения υ_1, давление p_1 и высота, на которой расположено это сечение h_1. Аналогично, в месте сечения S_2 скорость течения υ_2, давление p_2 и высота сечения h_2. За малый промежуток времени Δt жидкость перемещается от сечения S_1 к сечению S_1' и от S_2 к S_2'.

По закону сохранения энергии, изменение полной энергии $E_2 - E_1$ идеальной несжимаемой жидкости равно работе A внешних сил по перемещению массы m жидкости:

$$E_1 - E_2 = A, \qquad (15.1)$$

где E_1 и E_2 - полные энергии жидкости массой m в местах сечений S_1 и S_2 соответственно.

С другой стороны, A - это работа, совершаемая при перемещении всей жидкости, заключенной между сечениями S_1 и S_2, за рассматриваемый промежуток времени Δt. Для перенесения массы m от S_1 до S_1' жидкость должна переместиться на расстояние $l_1 = \upsilon_1 \Delta t$ и от S_2 к S_2' - на расстояние $l_2 = \upsilon_2 \Delta t$. При этом, l_1 и l_2 настолько малы, что значения скорости, давления и высоты в соответствующих сечениях не

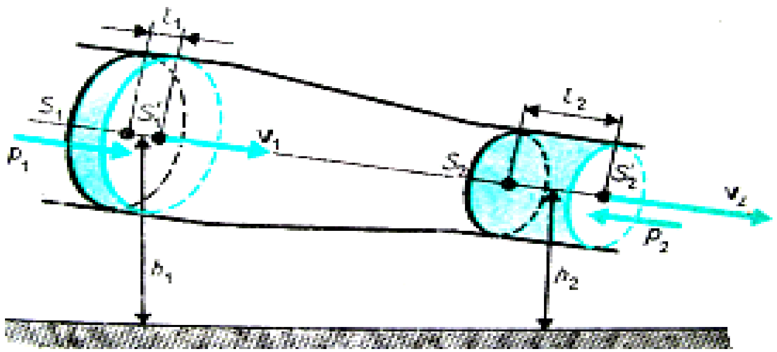


Рис.28

меняются.

Следовательно $$A = F_1 l_1 + F_2 l_2, \qquad (15.2)$$

где $F = p_1 S_1$ и $F_2 = -p_2 S_2$ (направлена противоположно течению жидкости, рис.28).

Полные энергии E_1 и E_2 будут складываться из кинетической и потенциальной энергий массы m жидкости:

$$E_1 = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + mgh_1, \qquad (15.3)$$

$$E_2 = \frac{m\upsilon_2^2}{2} + mgh_2, \qquad (15.4)$$

Подставив (15.3) и (15.4) в (15.1) и приравнивая (15.1) и (15.2), получим

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 S_1 \upsilon_1 \Delta t = \frac{m\upsilon_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 S_2 \upsilon_2 \Delta t \qquad (15.5)$$

Согласно уравнению неразрывности жидкости (14.1), объём жидкости, протекающий через сечения S_1 и S_2, остается постоянным, т.е.

$$\Delta V = S_1 \upsilon_1 \Delta t = S_2 \upsilon_2 \Delta t.$$

Разделив выражение (15.5) на ΔV, получим

$$\frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2,$$

где ρ - плотность жидкости. Но так как сечения выбирались произвольно, то можно записать

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho g h + p = const. \qquad (15.6)$$

Выражение (15.6) называется *уравнением Бернулли* в честь швейцарского физика Д.Бернулли. Это уравнение есть выражение закона сохранения энергии применительно к стационарному течению идеальной жидкости. Оно хорошо выполняется и для реальных жидкостей с малой вязкостью.

Величина p в формуле (15.6) называется статическим давлением, величина $\frac{\rho\upsilon^2}{2}$ - динамическим давлением, $\rho g h$ - гидростатическое давление, $p + \frac{\rho\upsilon^2}{2}$ называется полным давлением.

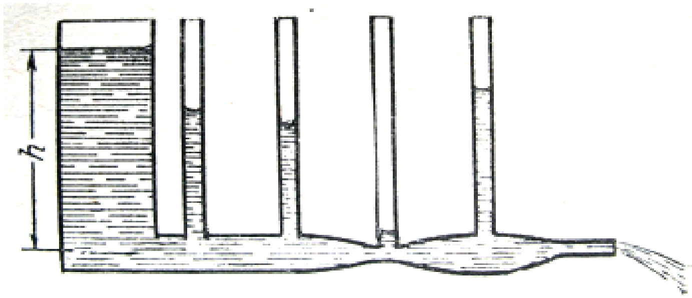


Рис.29

Из уравнения Бернулли (15.6) и уравнения неразрывности (14.1) для горизонтальной трубки тока следует, что при течении жидкости по трубке переменного сечения, статическое давление будет больше там, где скорость меньше, а сечение больше и, наоборот, статическое давление меньше в сечениях с большей скоростью. Это можно продемонстрировать, установив вдоль трубы переменного сечения ряд манометров (рис.29).

Так как динамическое давление связано со скоростью движения жидкости, то уравнение Бернулли позволяет измерять скорость потока жидкости. Для этого применяется трубка Пито – Прандтля (рис.30). С помощью одной из трубок измеряется полное давление (p_0), с помощью другой – статическое (p).

Манометром измеряют разность давлений:

$$p_0 - p = \rho_0 gh, \qquad (15.7)$$

где ρ_0 - плотность жидкости в манометре. С другой стороны, согласно уравнению Бернулли, разность полного и статического давлений равна динамическому давлению:

$$p_0 - p = \rho \upsilon^2 / 2. \qquad (15.8)$$

Из формул (15.7) и (15.8) получаем искомую скорость потока жидкости:

$$\upsilon = \sqrt{2\rho_0 gh / \rho}.$$

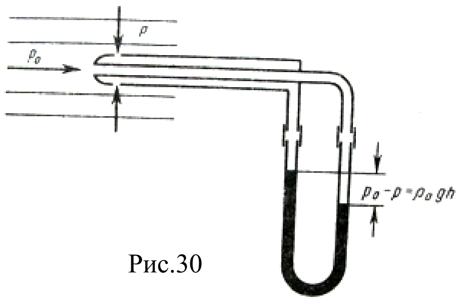


Рис.30

Уменьшение статического давления в сечениях, где скорость потока больше, положено в основу работы водоструйного насоса (рис.31).

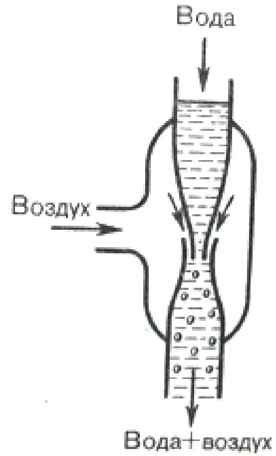


Рис.31

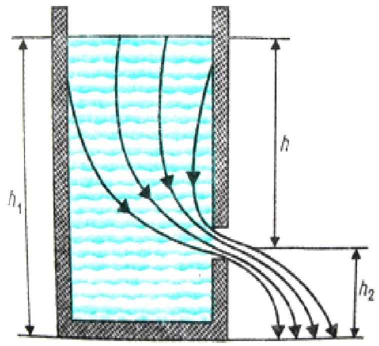


Рис.32

Уравнение Бернулли используется для нахождения скорости истечения жидкости через отверстие в стенке или дне сосуда. Рассмотрим сосуд (рис.32) с отверстием в боковой стенке. Запишем уравнение Бернулли для двух сечений (на уровне h_1 и уровне h_2):

$$\frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2,$$

а так как p_1 и p_2 равны атмосферному давлению, то уравнение примет вид $\frac{\upsilon_1^2}{2} + gh_1 = \frac{\upsilon_2^2}{2} + gh_2$. Из уравнения неразрывности (14.1) следует, что $\upsilon_2 / \upsilon_1 = S_1 / S_2$ и если $S_1 >> S_2$, то членом $\upsilon_1^2 / 2$ можно пренебречь и $\upsilon_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gh$, откуда

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gh}\ . \qquad (15.9)$$

Это выражение получило название *формулы Торричелли.*

16 ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА К ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

а) Реакция текущей жидкости на стенки изогнутой трубы.

Рассмотрим изогнутую трубу постоянного сечения S (рис.33). При установившемся стационарном потоке в силу неразрывности струи скорость υ в каждом сечении будет одинакова. Рассмотрим объём участка трубы, ограниченного сечениями S_1 и S_2. За время Δt в этот объём будет втекать через сечение S_1 количество жидкости $S\upsilon\Delta t$, обладающее импульсом $\vec{K}_1 = \rho S\upsilon\Delta t\vec{\upsilon}_1$. Одновременно из этого объёма через сечение S_2 будет вытекать такое же количество жидкости, обладающее импульсом $\vec{K}_2 = \rho S\upsilon\Delta t\vec{\upsilon}_2$. Таким образом, стенки трубы сообщают жидкости приращение импульса $\Delta\vec{K} = \vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \rho S\upsilon\Delta t(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1)$. Это приращение импульса за единицу времени будет равно силе, с которой стенки трубы действуют на жидкость $\vec{F} = \Delta\vec{K} / \Delta t = \rho S\upsilon(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1)$

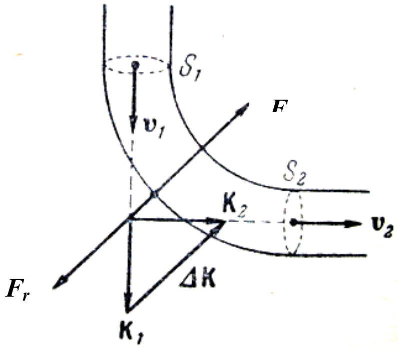


Рис.33

По третьему закону Ньютона с такой же силой жидкость будет действовать на стенки трубы

$$\vec{F}_r = -\vec{F} = \rho S\upsilon(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2) \qquad (16.1)$$

Силу $\vec{F}_r$ называют *реакцией* текущей жидкости на стенки трубы.

б) Реакция вытекающей струи.

Струя жидкости, вытекающая из отверстия в сосуде (рис.34), уносит с собой за время Δt импульс $\Delta\vec{K} = \rho S\upsilon\Delta t\vec{\upsilon}$ (S - площадь отверстия, $\vec{\upsilon}$ - скорость истечения струи). Этот импульс сообщается вытекающей жидкости сосудом, который от жидкости за то же время Δt получит импульс равный $-\Delta\vec{K}$, т.е. будет испытывать действие силы

$$\vec{F}_r = -\frac{\Delta\vec{K}}{\Delta t} = -\rho S\upsilon\vec{\upsilon} \qquad (16.2)$$

Эта сила называется *реакцией* вытекающей струи. Если сосуд поставить на тележку, то под действием силы $\vec{F}_r$ он придет в движение в направлении, противоположном направлению струи.

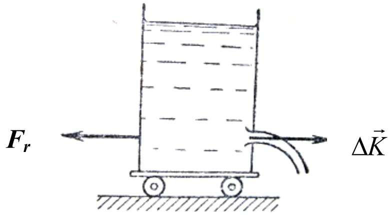


Рис.34

Воспользовавшись выражением (15.9), найдем величину силы $\vec{F}_r$ для скорости истечения жидкости из отверстия.

$$\vec{F}_r = \rho S\upsilon^2 = 2\rho ghS \qquad (16.3)$$

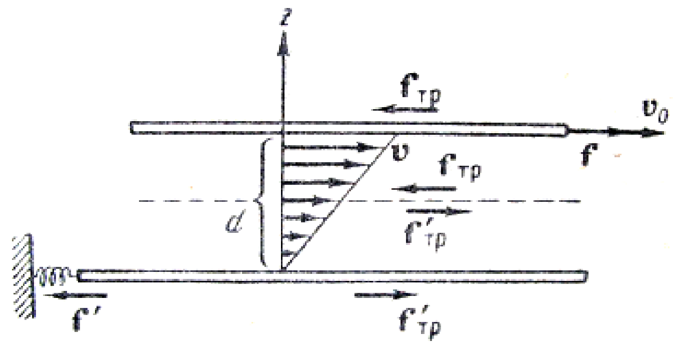
Сила реакции в два раза больше силы гидростатического давления ρghS. Это объясняется тем, что возникающее при вытекании струи движение жидкости в сосуде приводит к перераспределению давления, причем давление вблизи стенки, лежащей против отверстия, оказывается несколько большим, чем вблизи стенки, в которой сделано отверстие.

На реакции вытекающей струи основано действие реактивных двигателей, ракет, турбин и др.

17 СИЛЫ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ (ВЯЗКОСТЬ)

Вязкость (внутреннее трение) – свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой. При перемещении одних слоёв жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоёв. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. Со стороны же слоя, движущегося медленнее, на слой, движущийся быстрее, действует тормозящая сила.

Для выяснения закономерностей, которым подчиняются силы внутреннего трения, рассмотрим следующий опыт. В жидкость погружены две параллельные друг другу пластины (рис.35), линейные размеры которых значительно превосходят расстояние d между ними. Нижняя пластина удерживается на месте, верхняя приводится в движение с постоянной скоростью υ_0 силой $\vec{F}$, в отсутствии ускорения эта сила уравновешивается равной ей по величине противоположно направленной силой трения $\vec{F}_{тр}$ со стороны жидкости.



z
$\mathbf{f}_{тр}$
$\boldsymbol{v}_0$
$\boldsymbol{v}$
$\mathbf{f}$
$\mathbf{f}_{тр}$
d
$\mathbf{f}'_{тр}$
$\mathbf{f}'$
$\mathbf{f}'_{тр}$

Рис.35

Варьируя скорость пластины υ_0, площадь пластин S и расстояние между ними d, можно получить, что

$$F_{тр} = \eta \frac{\upsilon_0}{d} S, \tag{17.1}$$

где η - коэффициент, зависящий от природы и состояния жидкости и называемый *коэффициентом внутреннего трения* или *коэффициентом вязкости.*

Если исследовать скорость частиц жидкости в разных слоях, то оказывается, что она изменяется в направлении z, перпендикулярном к пластинам, по закону

$$\upsilon(z) = \frac{\upsilon_0}{d} z \tag{17.2}$$

Частицы жидкости, непосредственно соприкасающиеся с пластинами, как бы прилипают к ним и имеют такую же скорость, что и пластины.

Из (17.2) имеем

$$\frac{d\upsilon}{dz} = \frac{\upsilon_0}{d} \tag{17.3}$$

Учитывая (17.3), формуле (17.1) для силы внутреннего трения можно придать вид

$$F_{тр} = \eta \frac{d\upsilon}{dz} S \tag{17.4}$$

Выражая в (17.4) силу через импульс, получим формулу для коэффициента вязкости

$$\eta = \frac{\Delta K}{S \frac{d\upsilon}{dz} \Delta t}, \tag{17.5}$$

который показывает, *какой импульс передается из слоя в слой за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно вектору градиента скорости при единичном его значении.*

Единицей вязкости в системе СИ является *Пас = Нс/м*^{2}

Измеряется коэффициент вязкости многими методами, одним из которых является *метод Стокса,* основанный на измерении скорости медленно движущихся в жидкости небольших тел сферической формы.

Например, на шарик, падающий в жидкости вертикально вниз, действуют три силы: сила тяжести $P = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ (ρ - плотность материала шарика), сила Архимеда $F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_ж g$ ($\rho_ж$ - плотность жидкости) и сила сопротивления, эмпирически установленная Дж. Стоксом: $F = 6\pi\eta r\upsilon$, где r - радиус шарика, υ - его скорость. При равномерном движении шарика $P = F_A + F$ или $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_ж g + 6\pi\eta r\upsilon$, откуда

$$\eta = \frac{2(\rho - \rho_ж)gr^2}{9\upsilon} \qquad (17.6)$$

Измеряя скорость равномерного движения шарика, определяем коэффициент вязкости.

18 ЛАМИНАРНОЕ И ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Существует два режима течения жидкостей. Течение называется *ламинарным* (слоистым), если, вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними, и *турбулентным* (вихревым), если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости.

Ламинарное течение жидкости наблюдается при небольших скоростях её движения. Внешний слой жидкости, примыкающий к поверхности трубы, в которой она течет, из-за сил молекулярного сцепления прилипает к ней и остается неподвижным. Скорости последующих слоев тем больше, чем больше их расстояние от поверхности трубы, и наибольшей скоростью обладает слой, движущийся вдоль оси трубы.

При турбулентном течении частицы жидкости приобретают составляющие скоростей, перпендикулярные течению, поэтому они могут переходить из одного слоя в другой. Скорость частиц жидкости быстро возрастает по мере удаления от поверхности трубы, затем изменяется довольно незначительно. Так как частицы переходят из одного слоя в другой, то их скорости в различных слоях мало отличаются. Из-за большого градиента скоростей у поверхности трубы обычно происходит образование вихрей.

Характер течения зависит от безразмерной величины, называемой *числом Рейнольдса:*

$$R_e = \frac{\rho < \upsilon > d}{\eta} = \frac{< \upsilon > d}{\nu},$$

где $\nu = \eta / \rho$ - *кинематическая вязкость;* ρ - плотность жидкости; $< \upsilon >$ - средняя по сечению трубы скорость жидкости; d - характерный линейный размер, например диаметр трубы.

При малых значениях числа Рейнольдса ($R_e < 1000$) наблюдается ламинарное течение, переход от ламинарного течения к турбулентному происходит в области 1000 < R_e <2000, а при R_e =2300 (для гладких труб) течение – турбулентное. Если число Рейнольдса одинаково, то режим течения различных жидкостей в трубах разных сечений одинаков.

19 ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ЖИДКОСТЯХ

На тело, движущееся в жидкости, действуют две силы (их равнодействующая R), одна из которых Q направлена в сторону, противоположную движению тела (в сторону потока), - *лобовое сопротивление,* а вторая P перпендикулярна этому направлению – *подъёмная сила* (рис.36).

Если тело симметрично и его ось симметрии совпадает с направлением скорости, то на него действует только лобовое сопротивление, подъемная же сила в этом случае равна нулю. Можно доказать, что в идеальной жидкости равномерное движение происходит без лобового сопротивления. Если рассмотреть движение цилиндра в такой жидкости (рис.37), то картина линий тока симметрична как относительно прямой, проходящей через точки A и B, так и относительно прямой, проходящей через точки C и D , т.е. результирующая сила давления на поверхность цилиндра будет равна нулю.

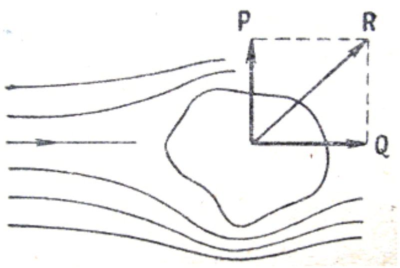


Рис.36

Иначе обстоит дело при движении тел в вязкой жидкости. Вследствие вязкости среды в области, прилегающей к поверхности тела, образуется пограничный слой частиц, движущихся с меньшими скоростями. В результате тормозящего действия этого слоя возникает вращение частиц и движение жидкости в пограничном слое становится вихревым. Если тело не имеет обтекаемой формы, то пограничный слой жидкости отрывается от поверхности тела. За телом возникает течение жидкости, направленное противоположно набегающему потоку. Оторвавшийся пограничный слой, следуя за этим течением, образует вихри, вращающиеся в противоположные стороны (рис.38).

Лобовое сопротивление зависит от формы тела и его положения относительно потока, что учитывается безразмерным коэффициентом сопротивления C_x, определяемым экспериментально:

$$Q = C_x \frac{\rho \upsilon^2}{2} S, \tag{19.1}$$

где ρ - плотность среды; υ - скорость движения тела; S - наибольшее поперечное сечение тела.

Составляющую Q можно значительно уменьшить, подобрав тело такой формы, которая не способствует образованию завихрения.

По формуле, аналогичной (19.1), определяется и подъемная сила P.

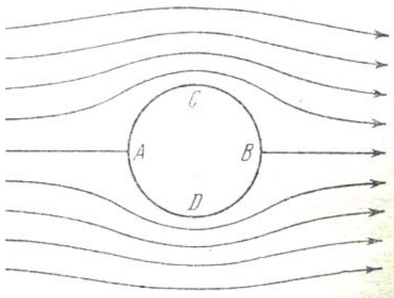


Рис.37

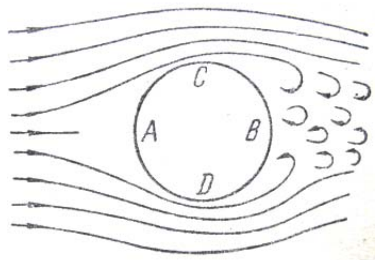


Рис.38

Пример 1. Вода подается в фонтан из большого цилиндрического бака (см. рис.39) и бьёт из отверстия фонтана сечением S_2 со скоростью $\upsilon_2 = 12 м/с$.

Найти: 1) скорость υ_1 понижения уровня воды в баке, если диаметр бака $D = 2м$, а диаметр отверстия фонтана $d = 2см$; 2) давление p_1, под которым вода подается в фонтан; 3) высоту h_1 уровня воды в баке и высоту h_2 струи, выходящей из фонтана.

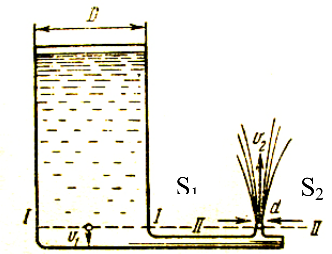


Рис.39

Решение. 1) Проведём сечение S_1 в баке на уровне сечения S_2 фонтана. Так как сечение S_1 много больше сечения S_2, то высоту h_1 уровня воды в баке можно считать для малого промежутка времени постоянной, а поток установившимся. Для установившегося потока справедливо условие неразрывности струи $\upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2$.

Из этого условия следует, что объём воды V_1, протекающий за 1 *сек* через сечение S_1 должен быть равен объёму воды V_2, протекающей через сечение S_2: $V_1 = V_2$ или $\frac{\pi D^2}{4} l_1 = \frac{\pi d^2}{4} l_2$, где l_1 и l_2 - длины цилиндрических столбов жидкости, протекающей за 1 *сек* через сечения S_1 и S_2.

Так как длины l_1 и l_2 численно равны скоростям течения υ_1 и υ_2 в сечениях S_1 и S_2, то можно записать $D^2 \upsilon_1 = d^2 \upsilon_2,$ откуда

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 \left(\frac{d}{D} \right)^2 .$$

Подставив в это равенство числовые значения заданных величин, найдём

$$\upsilon_1 = 12 \left(\frac{0,02}{2} \right)^2 = 0,0012 (м/с).$$

2) Давление p_1, под которым вода подается в фонтан, найдём по уравнению Бернулли, которое для горизонтальной трубки тока имеет вид

$$p_1 + \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho\upsilon_2^2}{2},$$

где p_1 и p_2 - статические давления в сечениях S_1 и S_2, $\frac{\rho\upsilon_1^2}{2}$ и $\frac{\rho\upsilon_2^2}{2}$ - динамические давления в этих сечениях, ρ – плотность жидкости. Учитывая, что p_2 равно нулю (p_2 - избыточное давление над атмосферным), из уравнения Бернулли получим

$$p_1 = \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} - \frac{\rho\upsilon_1^2}{2}.$$

Подставив числовые значения величин, получим

$$p_1 = \frac{10^3 \cdot 12^2}{2} - \frac{10^3 (0{,}0012)^2}{2} = 7{,}2 \cdot 10^4 \, (Н / м^2).$$

Вторым слагаемым, ввиду его малости, пренебрегли.

3) Зная давление p_1, можно найти высоту уровня воды в баке по формуле $p_1 = \rho g h_1$ (гидростатическое давление столба жидкости), откуда

$$h_1 = \frac{p_1}{\rho g}.$$

Подставив числовые значения, будем иметь

$$h_1 = \frac{7{,}2 \cdot 10^4}{10^3 \cdot 9{,}8} = 7{,}35 (м).$$

Зная скорость υ_2, с которой вода выбрасывается фонтаном, можно найти высоту h_2, на которую она будет выброшена:

$$h_2 = \frac{\upsilon_2^2}{2g}, \quad h_2 = \frac{12^2}{2 \cdot 9{,}8} = 7{,}35 (м).$$

Отметим, что высота уровня воды в баке равна высоте, на которую поднимается фонтан воды (по правилу сообщающихся сосудов), если пренебречь сопротивлением воздуха.

Пример 2. Определить время истечения несжимаемой жидкости из открытого цилиндрического сосуда высотой $H = 4{,}9\,м$, если диаметр небольшого отверстия в дне сосуда в 60 раз меньше диаметра сосуда.

Решение. Объём убыли воды за малый промежуток времени dt с одной стороны равен $dV = Sdh$, а с другой $dV = S_1 \upsilon dt$,

где S – сечение сосуда, S_1 – отверстия. Но так как $\upsilon^2 = 2gh$, то

$$Sdh = S_1 \sqrt{2gh} \cdot dt\ ,$$

откуда $$dt = \frac{Sdh}{S_1\sqrt{2gh}} \quad \text{или} \quad dt = \frac{S}{S_1\sqrt{2g}}\frac{dh}{\sqrt{h}}\ .$$

Проинтегрировав последнее выражение в пределах от 0 до H, получим

$$t = \frac{S \cdot 2\sqrt{H}}{S_1\sqrt{2g}} = \frac{D^2}{d^2}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Подставив числовые значения, получим $t = 60^2\sqrt{\dfrac{2 \cdot 4{,}9}{9{,}8}} = 3600(c) = 1ч.$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сформулируйте и поясните законы Паскаля и Архимеда.
2. Что называют линией тока? Трубкой тока?
3. Что характерно для установившегося течения жидкости?
4. Каков физический смысл уравнения неразрывности жидкости и как его вывести?
5. Выведите уравнение Бернулли.
6. Как в потоке жидкости измерить статистическое давление? Динамическое давление? Полное давление?
7. Каков физический смысл динамической вязкости?
8. Какое течение жидкости называется ламинарным? Турбулентным? Что характеризует число Рейнольдса?
9. Поясните (с выводом) практическое применение метода Стокса.
10. Каковы причины возникновения лобового сопротивления тела, движущегося в жидкости? Может ли оно быть равным нулю?

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

20 ПОНЯТИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

1. Среди разнообразных движений и процессов, совершающихся в природе и технике, весьма распространёнными являются *колебания.*

Колебания – это любое движение, любой физический процесс, характеризующийся той или иной *повторяемостью во времени*.

Волнение моря, качание маятника часов, вибрации корпуса корабля, биение человеческого сердца, звук, радиоволны, свет, переменные токи и т.д. – все это колебания.

2. В процессе колебаний значения физических величин, определяющих состояние системы, через равные или неравные промежутки времени повторяются.

Колебания называются периодическими, если значения изменяющихся физических величин повторяются через равные промежутки времени. Наименьший промежуток времени T, через который значение изменяющейся физической величины повторяется (по величине и направлению, если это величина векторная; по величине и знаку, если она скалярная), называется периодом колебаний этой величины.

Число полных колебаний ν, совершаемых колеблющейся величиной за единицу времени, называется частотой колебаний этой величины:

$$T\nu = 1 \quad \text{или} \quad \nu = \frac{1}{T} \qquad (20.1)$$

3. Любое колебание обусловлено тем или иным воздействием на колеблющуюся систему. В зависимости от характера воздействия, вызывающего колебания, различают следующие периодические колебания:

а) свободные или собственные;
б) вынужденные;
в) автоколебания;
г) параметрические.

Свободные или собственные колебания – это колебания, происходящие в системе, предоставленной самой себе после выведения её из состояния устойчивого равновесия. Пример: колебания груза на пружине.

Вынужденные колебания – это колебания, обусловленные внешними периодическими воздействиями. Пример: электромагнитные колебания в антенне телевизора.

Автоколебания – собственные колебания, поддерживаемые внешним источником энергии, включение которого в нужные моменты времени осуществляет сама колеблющаяся система. Пример: колебания маятника часов.

Включение источника энергии (сжатой пружины) производит устройство, связанное с маятником часов.

Параметрические колебания – это колебания, в процессе которых происходит периодическое изменение какого – либо параметра системы. Пример: раскачивание качелей. Приседая в крайних положениях и выпрямляясь в среднем положении, человек, находящийся на качелях, изменяет момент инерции.

4. Различные по своей природе колебания обнаруживают много общего: они подчиняются одним и тем же закономерностям, описываются одними и теми же уравнениями, исследуются одними и теми же методами. Это даёт возможность создать единую теорию колебаний.

5. Рассмотрение теории колебаний в полном объёме требует знаний специальных разделов математики. Поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь элементарных основ этой теории.

21 КИНЕМАТИКА МЕХАНИЧЕСКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

1. Простейшими из периодических колебаний являются *гармонические колебания* – колебания, при которых колеблющиеся физические величины изменяются с течением времени *по закону синуса или косинуса.* Это вид колебаний важно знать, во-первых, потому, что многие реальные колебания весьма близки к гармоническим; во-вторых, потому, что периодические негармонические колебания можно представить как результат наложения того или иного числа гармонических колебаний.

Изучение закономерностей гармонического движения естественно начать с механических колебаний материальной точки.

2. Механические гармонические колебания – это *такое прямолинейное*, *неравномерное, периодическое движение*, при котором по закону синуса или косинуса изменяются с течением времени параметры механического состояния (координаты и скорость) материальной точки. Если точка совершает гармонические колебания вдоль оси x (рис.40), то кинетический закон её движения будет отражаться формулой:

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right). \qquad (21.1)$$

В этой формуле: x - координата, или смещение, материальной точки в момент времени t (началу координат соответствует среднее

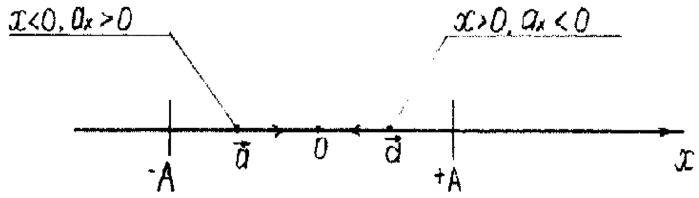


Рис.40

положение колеблющейся точки – так называемый центр колебаний); A - наибольшее отклонение точки от среднего положения *(амплитуда колебаний).*

Аргумент $$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0, \qquad (21.2)$$

стоящий под знаком косинуса в формуле (21.1) называется *фазой колебаний* в момент времени t. Как видно из (21.2), в процессе колебаний фаза монотонно возрастает. За одно полное колебание она получает приращение, равное 2π. Мгновенное значение фазы характеризует *состояние* колеблющейся точки, поскольку каждому значению фазы отвечает вполне определенная координата. Величина $\omega_0 t$ определяет приращение фазы за промежуток времени t, величина φ_0 - значение фазы в начальный момент времени (*начальная фаза*). Коэффициент ω_0 - характеристический параметр колебаний, называемый *циклической* (или круговой) частотой. Циклическая частота определяет быстроту изменения фазы с течением времени. Действительно, из (21.2) следует,

что $$\omega_0 = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}. \qquad (21.3)$$

Циклическая частота показывает, как часто повторяются одни и те же состояния колеблющейся системы.

На рис.41 изображен график зависимости фазы некоторого колебания от времени. Из рисунка видно, что наклон графика определяется величиной ω_0. Чем круче идёт график, тем быстрее изменяется фаза, тем чаще повторяются одни и те же состояния.

3. Пользуясь формулой (21.3), легко установить связь между частотой ω_0 и периодом T. За один период T фаза увеличивается на 2π. Подставив $t = T$ и $\varphi - \varphi_0 = 2\pi$ в формулу (21.3) получим

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad (21.4) \qquad \text{или} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \qquad (21.5)$$

Так как $\frac{1}{T}$ - частота колебаний ν, то $\qquad \omega_0 = 2\pi\nu$. (21.6)

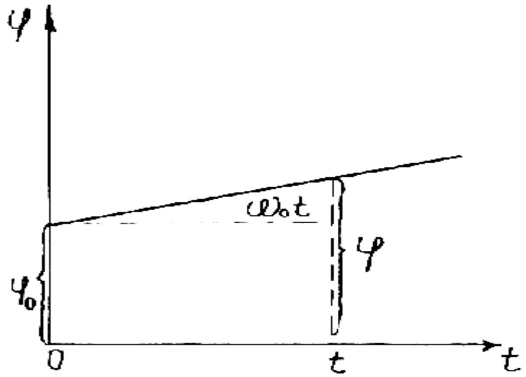


Рис.41

Как видно из этой формулы, циклическая частота показывает, сколько полных колебаний совершается за 2π сек.

4. Из формулы (21.1) видно, что гармоническое колебание является движением *финитным* (пространственно ограниченным): в процессе колебаний материальная точка не выходит за пределы некоторого ограниченного отрезка (рис.40). За одно полное колебание в каждой точке траектории, кроме самых крайних, колеблющаяся точка бывает дважды: один раз двигаясь в одном направлении, другой раз - в противоположном. Заметим, что при неколебательном движении каждую точку траектории тело проходит, двигаясь только в одном направлении.

5. Продифференцируем (21.1) по времени. Первая производная от x по t дает выражение для проекции на ось x скорости, вторая – для проекции ускорения.

$$\upsilon_x = \dot{x} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 A \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right); \qquad (21.7)$$

$$a_x = \dot{\upsilon}_x = \ddot{x} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) \qquad (21.8)$$

(производные по времени в теории колебаний принято обозначать точкой над дифференцируемой величиной: одна точка обозначает первую производную, две – вторую).

Как следует из (21.7) и (21.8), при гармонических колебаниях проекции скорости и ускорения на ось x изменяются с течением времени по гармоническому закону, с той же частотой ω_0, с какой происходят колебания координаты. Амплитуда колебаний скорости равна $\omega_0 A$, амплитуда колебаний ускорения $\omega_0{}^2 A$. Скорость опережает смещение по фазе на $\frac{\pi}{2}$ (или, что то же самое, отстаёт на $\frac{3}{2}\pi$, так как $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)$), ускорение опережает смещение на π (или отстаёт на π, так как $\cos(\alpha+\pi)=\cos(\alpha-\pi)$).

Если колебания двух каких – либо физических величин смещены по фазе на $(2k+1)\pi$, где k – любое целое число, то говорят, что они происходят *в противофазе*. Можно сказать, следовательно, что колебания координаты x и проекции ускорения a_x при гармоническом движении происходят в противофазе. Это означает, что когда смещение максимально, максимальна и абсолютная величина ускорения, когда $x=0$, то и $a_x=0$, знак координаты x и знак проекции ускорения на ось x в любой момент времени противоположны. При отклонении точки от центра колебаний вправо $x > 0$, но $a_x < 0$, при отклонении влево $x < 0$, но $a_x > 0$, т.е. ускорение всегда направлено к центру колебаний (рис.40).

Графики $x = x(t); \upsilon_x = \upsilon_x(t); a_x = a_x(t)$ приведены на рисунке 45, *а, б, в.*

Смещение в системе *СИ* измеряется в *метрах*, фаза в *радианах*, циклическая частота в *радианах в секунду*, период – в секундах, частота – в *герцах.*

Радиан в секунду – циклическая частота таких колебаний, при которых фаза за 1 секунду возрастает на 2π.

Герц – частота таких колебаний, при которых за 1 секунду совершается одно полное колебание (или, что то же самое, фаза возрастает на 2π).

22 ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ. УПРУГИЕ И КВАЗИУПРУГИЕ СИЛЫ

1. Выясним, какими силами обусловлены гармонические колебания. Пусть материальная точка совершает гармонические колебания вдоль оси x. По второму закону Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{22.1}$$

в проекциях на ось x:

$$F_x = ma_x. \tag{22.2}$$

По (21.8) $$a_x = \ddot{x} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (22.3)$$

подставив это выражение в (22.2), получим:

$$F_x = -m\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (22.4)$$

Как и следовало ожидать, сила, вызывающая гармонические колебания, должна изменяться с течением времени также по гармоническому закону. Выражение (22.4) позволяет найти значение проекции этой силы на ось x для любого момента времени. Как видно из формул (22.3) и (22.4), фазы проекций ускорения и силы в любой момент времени совпадают. График $F_x = F_x(t)$ изображен на рисунке 45*, г*.

2. Введем обозначение $m\omega_0^2 = k$ (22.5)

Кроме того, учтем, что $A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = x.$ Тогда формула (22.4) будет выглядеть так:

$$F_x = -kx \quad (22.6)$$

Из того, что проекция силы и координата x противоположны по знаку, следует, что эта сила всегда направлена к положению равновесия. Условию (22.6) удовлетворяют *упругие силы.* Закон Гука, выражающий зависимость между возникающей в теле упругой силы и величиной деформации, выражается точно такой же формулой, как и (22.6).

Гармонические колебания могут быть вызваны также силами, которые не являются упругими по своей природе. Силы, не являющиеся упругими по своей природе, но подобные упругим по характеру зависимости от координат, называются *квазиупругими.*

Доказано также, что какой бы ни была зависимость силы, действующей на тело, от координат, тело будет совершать колебания, весьма близкие к гармоническим, если его смещение от положения устойчивого равновесия мало. Любые малые колебания являются гармоническими. Груз на пружине или на нити, вагон на рельсах, корабль на воде, фундамент здания, ветви деревьев и т.д. – все эти системы будут совершать гармонические колебания, если амплитуды этих колебаний малы (строго говоря, бесконечно малы).

То, что колебания являются гармоническими, имеет простое объяснение. Пусть сила $\vec{F}$ зависит от x по произвольному закону и при $x = 0$ обращается в нуль. Тогда кривая $F_x = F_x(x)$ проходит через начало координат (рис.42).

Бесконечно малый отрезок этой кривой в окрестности $x = 0$ можно считать отрезком прямой линии (границы этого отрезка на рисунке 42 обозначены точками), следовательно, в небольшом интервале значений x силу $\vec{F}_x$ можно считать пропорциональной x. А такая сила вызывает гармонические колебания.

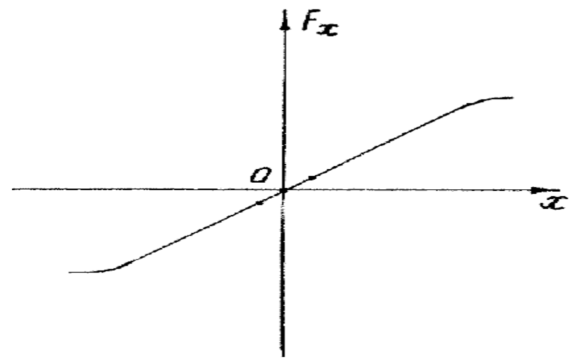


Рис.42

Так как силы, возникающие при отклонении механической системы от положения устойчивого равновесия, всегда стремятся вернуть эту систему в первоначальное состояние, их часто называют *возвращающими или восстанавливающими.*

3. Введём понятие *гармонического осциллятора.* Это понятие потребуется при изложении некоторых последующих разделов.

Гармоническим осциллятором называется любая физическая система, совершающая гармонические колебания. Так, каждый атом твёрдого тела можно рассматривать как трёхмерный (имеющий три степени свободы) гармонический осциллятор, поскольку атом удерживается в положении равновесия некоторой квазиупругой силой. Если колебания осциллятора происходят вдоль одной прямой, осциллятор называется *линейным* или одномерным (с одной степенью свободы). Пример: груз на пружине, совершающий вертикальные колебания.

4. Всё, что было сказано о гармонических колебаниях, справедливо лишь при условии, что колебания системы совершаются беспрепятственно, т.е. *в отсутствие* трения.

5. Рассмотрим некоторые примеры собственных колебаний, совершающихся в отсутствие трения под действием одних только упругих или квазиупругих сил.

1. *Собственные колебания груза на пружине*

Будем полагать, что вся масса m рассматриваемой системы (рис.43) сосредоточена в грузе; пружина обладает идеальной упругостью и, следовательно, закон Гука для неё в точности выполняется. Ось x направим вертикально вниз. Координату груза, когда он находится в состоянии равновесия, примем равной нулю. Как видно из рисунка 43,

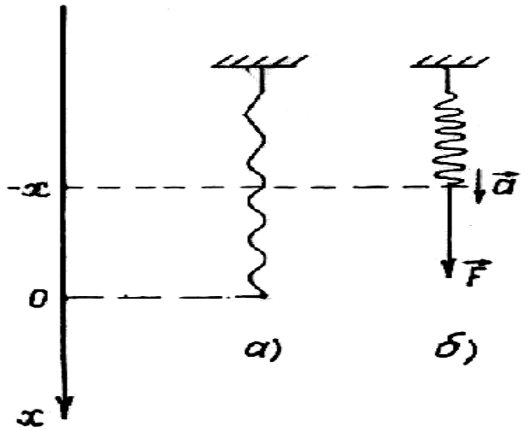


Рис.43

смещению груза вверх соответствуют отрицательные координаты, смещению вниз – положительные.

Составим дифференциальное уравнение колебаний груза. Дифференциальное уравнение механического движения вообще – это, в сущности, математическое выражение второго закона Ньютона, формула, связывающая массу тела, действующую на него силу и ускорение, приобретаемое телом под действием этой силы. Однократное интегрирование этого уравнения дает зависимость от времени скорости, двукратное – координат (последняя зависимость называется интегральным законом движения).

Колебания груза на пружине в отсутствие трения происходит под действием упругой силы. Для изображенного на рисунке 43, *б* положения имеем: $F_x = -kx$.

Величина k называется *жёсткостью пружины*. Жёсткость численно равна упругой силе, возникающей в пружине при единичном растяжении или сжатии её. Жёсткость пружины зависит от материала пружины и её геометрии – формы, диаметра витков, густоты витков, длины пружины и т.д.

Сила $\vec{F}_x$ сообщает грузу ускорение $\vec{a}_x$.

По второму закону Ньютона $ma_x = F_x$ или $m\ddot{x} = -kx$, или $m\ddot{x} + kx = 0$. Разделив обе части последнего уравнения на m и введя обозначение $\frac{k}{m} = \omega_0{}^2$ (в соответствие с (22.5)), получим искомое дифференциальное уравнение собственных гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{22.7}$$

Общее решение этого линейного однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{22.8}$$

где A и φ_0 - амплитуда колебаний и начальная фаза.

Найдём период колебаний груза. По (21.5) $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, но,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \text{ Следовательно, } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{22.9}$$

Частота колебаний
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{22.10}$$

Итак, чем больше масса груза и чем меньше жесткость пружины, тем медленнее происходят колебания. Существенно отметить, что период и частота колебаний не зависят от амплитуды.

Амплитуда A и *начальная фаза* φ_0 собственных незатухающих-гармонических колебаний *зависят от начальных условий* – параметров состояния в начальный момент времени: от x_0 и υ_0. Положив $t = 0$ в формулах (22.8) и (21.7) , получим выражения для A и φ_0:

$$x_0 = A\cos\varphi_0,$$

$$\upsilon_0 = -\omega_0 A\sin\varphi_0,$$

Откуда
$$A = \sqrt{x_0{}^2 + \frac{\upsilon_0{}^2}{\omega_0{}^2}} \tag{22.11}$$

и

$$tg\varphi_0 = -\frac{\upsilon_0}{x_0\omega_0}. \tag{22.12}$$

2. *Колебания математического маятника*

Математический маятник (рис.44) представляет собой материальную точку, подвешенную на невесомой и нерастяжимой нити.

Реальным приближением к математическому маятнику может служить небольшой шарик, подвешенный на тонкой длинной нити. Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризовать углом α (рис.44). Формула, выражающая зависимость этого угла от

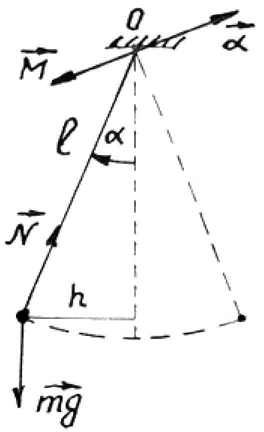


Рис.44

времени, и будет представлять собой закон движения маятника.

При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращательный момент $\bar{M}$, модуль которого равен $mgl\sin\alpha$, где m - масса маятника, l - его длина. Направление этого момента таково, что он стремится вернуть маятник в положение равновесия, т.е. по своему действию он аналогичен квазиупругой силе. Поэтому так же, как координате x и проекции силы F_x приписываются противоположные знаки, противоположные знаки следует приписать вращательному моменту M и угловому смещению α. Следовательно, выражение для вращательного момента будет иметь вид:

$$M = mgl\sin(-\alpha)\,. \qquad (22.13)$$

Вращательный момент, действующий на маятник, сообщит маятнику угловое ускорение ε. По основному уравнению динамики вращательного движения $J\varepsilon = M$, где J - момент инерции маятника, равный ml^2. Угловое ускорение равно второй производной от углового смещения по времени: $\varepsilon = \ddot{\alpha}$. Учитывая это, можно записать:

$$ml^2\ddot{\alpha} = M \qquad (22.14)$$

Ограничимся рассмотрением малых колебаний. При малых углах $\sin(-\alpha)$ можно заменить на $(-\alpha)$: $\sin(-\alpha) = -\alpha$.

Тогда вращательный момент будет равен:

$$M = -mgl\alpha .$$

Подставив это выражение в основное уравнение движения (22.14), получим:

$$ml^2\ddot{\alpha} = -mgl\alpha$$

$$\text{или} \quad \ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0 \tag{22.15}$$

Обозначив $\frac{g}{l} = \omega_0^2$, найдем искомое дифференциальное уравнение движения маятника

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0 \tag{22.16}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\alpha = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{22.17}$$

т.е. малые колебания математического маятника являются гармоническими. Период этих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} , \tag{22.18}$$

частота

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} . \tag{22.19}$$

23 ИМПУЛЬС И ЭНЕРГИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

1. Найдём выражение для импульса и энергии линейного гармонического осциллятора, совершающего колебания вдоль оси x.

Выражение для проекции импульса на ось x получим, умножив массу осциллятора m на проекцию скорости по (21.7):

$$P_x = m\upsilon_x = -m\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) . \tag{23.1}$$

Проекция импульса гармонического осциллятора изменяется по гармоническому закону. Её амплитудное значение $m\omega_0 A$. График $P_x = P_x(t)$ изображен на рисунке 45, *д*.

В процессе колебаний происходят периодические превращения кинетической энергии осциллятора в потенциальную энергию и обратно.

Кинетическая энергия осциллятора:

$$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m}{2}\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{kA^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (23.2)$$

где $k = m\omega_0^2$ - коэффициент упругой или квазиупругой силы.

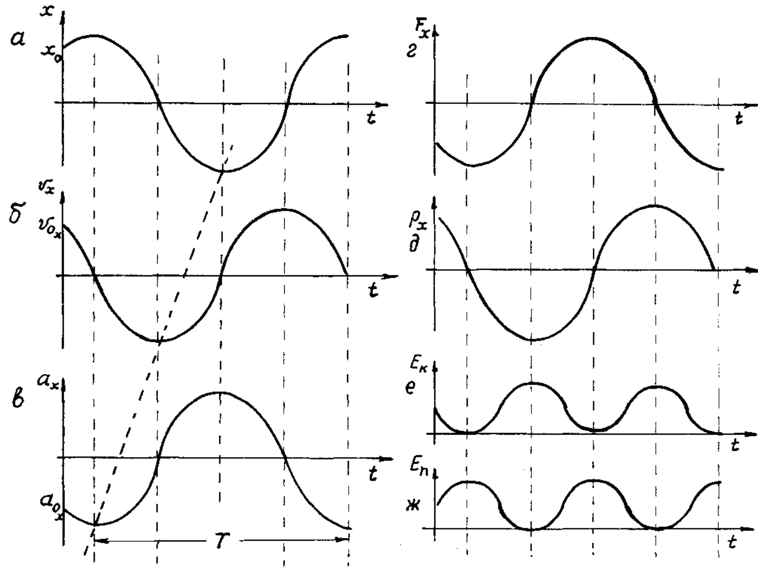


Рис.45

Потенциальная энергия осциллятора:

$$E_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)\,. \qquad (23.3)$$

Как видно из формул (23.2) и (23.3), и потенциальная, и кинетическая энергия гармонического осциллятора – величины положительные. Их изменения происходят с частотой, превышающей частоту самих колебаний в два раза. Графики $E_k = E_k(t)$ и $E_n = E_n(t)$ осциллятора изображены на рисунке 45,*е, ж*. *Полная энергия осциллятора*:

$$E = E_k + E_n = \frac{kA^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{kA^2}{2} \qquad (23.4)$$

оказывается пропорциональной квадрату амплитуды и *не зависит от времени.* Так оно и должно быть, ибо гармонический осциллятор – система консервативная.

24 ЗАТУХАЮЩИЕ СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

1. В реальных условиях механические колебания всегда происходят в какой-либо среде. Взаимодействие колеблющейся системы со средой приводит к рассеянию (диссипации) энергии колебаний в окружающем пространстве (механическая энергия колебаний превращается во внутреннюю энергию среды). В результате колебания постепенно затухают.

2. Действие среды может быть учтено введением в дифференциальное уравнение колебаний дополнительной *силы сопротивления.* В отсутствие сухого трения и при небольших скоростях (это отвечает малым колебаниям) сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости:

$$\vec{F}_{conp} = -r\vec{\upsilon}\ , \qquad (24.1)$$

где r - коэффициент сопротивления (численно равен силе сопротивления, действующей на тело при единичной скорости движения).
Знак минус означает, что направления силы сопротивления и скорости противоположны. Из (24.1) следует:

$$(F_{conp})_x = -r\upsilon_x = -r\,\dot{x}\,.$$

3. При наличии сопротивления ускорение материальной точки, совершающей колебания, обусловлено действием двух сил: возвращающей (упругой или квазиупругой) и силы сопротивления. По второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}_{ynp} + \vec{F}_{conp}\,.$$

В проекциях: $ma_x = (F_{ynp})_x + (F_{conp})_x$

или $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}\,.$

Разделив обе части этого уравнения на m, перенеся все слагаемые в левую часть и введя обозначения

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad \text{и} \quad \frac{r}{m} = 2\beta\,,$$

получим дифференциальное уравнения собственных затухающих колебаний:

$$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (24.2)$$

Решение этого уравнения при $\beta^2 < \omega_0^2$ имеет вид:

$$x = A_0 e^{-\beta \cdot t}\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (24.3)$$

В этом уравнении:

A_0 - амплитуда колебаний в начальный момент времени; φ_0 - начальная фаза (обе эти величины зависят от начальных условий); ω - циклическая частота затухающих колебаний; β - коэффициент затухания - величина, характеризующая быстроту затухания.

Как видно из (24.3), затухающие колебания не являются гармоническими: амплитуда этих колебаний убывает по экспоненциальному

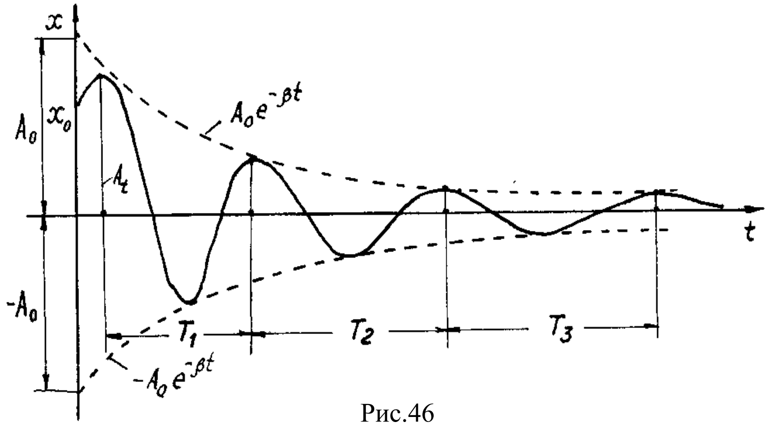


Рис.46

закону:

$$A = A_0 e^{-\beta \cdot t} \qquad (24.4)$$

На рисунке 46 приведён график затухающих колебаний. График не выходит за пределы огибающих $\pm A_0 e^{-\beta t}$

4. Зная, как уменьшается с течением времени амплитуда затухающих колебаний, можно найти закон уменьшения энергии этих колебаний. По (23.4) $\quad E = \dfrac{kA^2}{2}$

Подставим вместо A соответствующее выражение по (24.4):

$$E = \frac{k}{2}(A_0 e^{-\beta \cdot t})^2 = \frac{kA_0^2}{2} e^{-2\beta \cdot t} .$$

Но $\dfrac{kA_0^2}{2}$ - начальная энергия колебаний E_0. Учитывая это, получим:

$$E = E_0 e^{-2\beta \cdot t} \qquad (24.5)$$

Таким образом, энергия затухающих колебаний уменьшается также по экспоненциальному закону.

5. Циклическая частота ω затухающих колебаний системы связана с циклической частотой собственных незатухающих колебаний этой системы ω_0 соотношением:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \tag{24.6}$$

Величину
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \tag{24.7}$$

называют *условным периодом* затухающих колебаний (период затухающих колебаний называется условным потому, что такие колебания, строго говоря, не являются периодическими).

Условный период затухающих колебаний – наименьший промежуток времени T, за который система дважды проходит через положение равновесия, двигаясь в одном и том же направлении, или, что то же самое, промежуток времени, за который отклонения в одну и ту же сторону дважды достигают максимума.

Период затухающих колебаний больше периода колебаний такой же системы в отсутствие сопротивления. Это понятно: силы сопротивления тормозят движение, в результате чего система возвращается к равновесию медленнее.

6. Отношение двух последующих амплитуд, т.е. амплитуд в моменты времени t и $t+T$

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta \cdot t}}{A_0 e^{-\beta \cdot (t+T)}} = e^{\beta T} \qquad (24.8)$$

называется *декрементом затухания.* Натуральный логарифм этого отношения называется *логарифмическим декрементом* затухания:

$$\lambda = \ln \frac{A_0 e^{-\beta \cdot t}}{A_0 e^{-\beta (t+T)}} = \beta T \qquad (24.9)$$

Логарифмический декремент затухания характеризует затухание колебаний за период, коэффициент затухания – за единицу времени.

7. Важной характеристикой затухающих колебаний является также так называемое *время релаксации* τ - время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

Из условия $\dfrac{A_0 e^{-\beta \cdot t}}{A_0 e^{-\beta \cdot (t+\tau)}} = e$ получаем: $\tau = \dfrac{1}{\beta}$. (24.10)

Таким образом, коэффициент затухания – это величина, обратная времени релаксации.

За время τ система совершит $N = \dfrac{\tau}{T}$ колебаний. Подставив в это соотношение вместо τ и T соответствующие выражения по (24.10) и (24.9), получим:

$$N = \frac{1\beta}{\beta \cdot \lambda} = \frac{1}{\lambda} \qquad (24.11)$$

Из этой формулы видно, что логарифмический декремент затухания есть величина, обратная числу колебаний, совершаемых системой за время релаксации. Примеры логарифмических декрементов:

кварцевая пластина - $10^{-4} - 10^{-5}$;

камертон - 10^{-3};

математический маятник - $10^{-1} - 10^{-2}$.

8. При увеличении сопротивления период затухающих колебаний становится всё больше и больше. При $\beta = \omega_0$ он обращается в бесконечность. Это означает, что движение перестаёт быть периодическим. Система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний (такое движение называется *апериодическим*). Вообще движение перестаёт быть колебательным при любом β, удовлетворяющем условию: $\beta \geq \omega_0$.

25 ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И РЕЗОНАНС

Если на систему, кроме упругой или квазиупругой силы и силы сопротивления, действует также внешняя периодическая сила, система будет совершать вынужденные колебания. Пусть внешняя сила (будем называть эту силу вынуждающей) изменяется по гармоническому закону:

$$F = F_0 \cos \Omega t, \tag{25.1}$$

где F_0 - амплитуда силы; Ω - циклическая частота изменений этой силы.

При наличии вынуждающей силы дифференциальное уравнение колебаний имеет следующий вид:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \Omega t$$

или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t \tag{25.2}$$

где $\beta = \dfrac{r}{2m}$ - коэффициент затухания; $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ - циклическая частота собственных незатухающих колебаний; $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$ - вынуждающая сила, отнесенная к единице массы.

Общее решение этого неоднородного линейного дифференциального уравнения складывается из двух частей: общего решения соответствующего однородного уравнения, определяющего собственные затухающие колебания:

$$x_1 = A_0 e^{-\beta \cdot t} \cos(\omega t + \varphi_0), \tag{25.3}$$

и частного решения, характеризующего вынужденные колебания:

$$x_2 = A\cos(\Omega t + \alpha_0)\,. \qquad (25.4)$$

Результирующее решение системы в любой момент времени равно сумме $x_1 + x_2$:

$$x = x_1 + x_2 = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0) + A\cos(\Omega t + \alpha_0) \qquad (25.5)$$

Таким образом, при наличии вынуждающей силы в системе одновременно возникают и собственные, и вынужденные колебания.

Собственные колебания постепенно затухают и по истечении некоторого времени (называемого временем установления колебаний) становятся пренебрежимо малыми по сравнению с вынужденными колебаниями. В системе устанавливаются вынужденные колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы:

$$x = A\cos(\Omega t + \alpha_0)\,. \qquad (25.6)$$

Амплитуда вынужденных колебаний и величина α_0, определяющая сдвиг фаз между координатой и вынуждающей силой, в отличие от амплитуды и фазы собственных колебаний, не зависят от начальных условий. Соответствующий расчет показывает, что для данной колебательной системы, определяемой параметрами ω_0 и β, амплитуда вынужденных колебаний зависит от массы системы, от амплитуды и частоты вынуждающей силы, а фаза α_0 - от частоты вынуждающей силы:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}\,; \qquad (25.7)$$

$$tg\alpha_0 = -\frac{2\beta\cdot\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\,. \qquad (25.8)$$

Проанализируем уравнение (25.7).

Рассмотрим случай, когда затухание мало. Для этого случая при $\Omega \ll \omega_0$ в подкоренном выражении всеми слагаемыми, кроме ω_0, можно пренебречь.

Тогда: $$A_{стат} \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}\,. \qquad (25.9)$$

При малых частотах вынуждающей силы амплитуда вынужденных колебаний практически равна величине *статического* смещения, которое вызвала бы сила F_0.

Если $\Omega \gg \omega_0$, то $$A \approx \frac{F_0}{m\Omega^2}\,, \qquad (25.10)$$

При $\Omega \to \infty \quad A_\infty \to 0$.

При некотором значении Ω подкоренное выражение минимально,

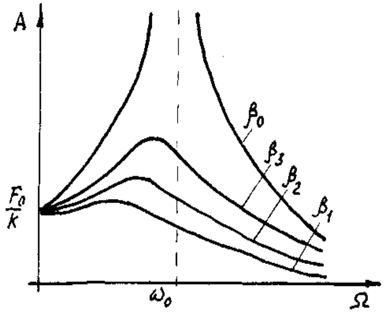


Рис.47

следовательно, амплитуда максимальна. Найдём частоту Ω (она называется резонансной), соответствующую максимуму амплитуды. Для этого продифференцируем подкоренное выражение по Ω и приравняем производную нулю:

$$2(\omega_0^2 - \Omega_{рез}^2)\cdot(-2\Omega_{рез}) + 8\beta^2\Omega_{рез} = 0,$$

откуда

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \qquad (25.11)$$

(отрицательное значение корня следует отбросить – частота не может быть отрицательной).

Подставив $\Omega_{рез}$ в подкоренное выражение (25.7), получим:

$$A_{\max} = \frac{F_0}{2\beta m\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \qquad (25.12)$$

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к некоторой характерной для данной системы частоте называется *резонансом.*

Кривая зависимости $A = A(\Omega)$ называется резонансной кривой. На рисунке 47 изображены резонансные кривые соответствующие различным β $(\beta_3 < \beta_2 < \beta_1, \beta_0 = 0)$.

Как видно из формулы (25.12), высота максимума резонансной кривой тем больше, чем меньше затухания β. Кроме того, чем меньше β, тем «острее» максимум резонансной кривой. В идеальном случае – в отсутствие сопротивления – амплитуда вынужденных колебаний обращается в бесконечность.

В области резонанса создаются наиболее благоприятные условия для поступления в систему энергии от внешнего источника.

26 СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Часто бывает так, что материальная точка одновременно участвует в нескольких колебательных движениях. Сложить два или несколько колебаний – значит найти закон, которому подчиняется результирующее движение, найти траекторию этого движения.

Сложение колебаний в общем случае производится аналитически, но в ряде случаев может быть осуществлено геометрически, при помо-

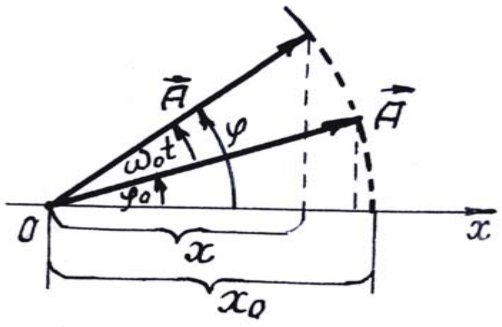


Рис.48

щи так называемого *вектора амплитуды*.

Вектор амплитуды $\vec{A}$ - это вектор, модуль которого равен амплитуде рассматриваемого колебания.

Если вектор амплитуды привести во вращение вокруг точки *0*, взятой на оси x, с угловой скоростью ω_0 (рис.48), то проекция конца этого вектора на ось x будет совершать гармонические колебания с циклической частотой ω_0:

$$x = A\cos\varphi = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\ ,$$

где φ_0 - угол, образованный вектором амплитуды и осью x в начальный момент времени.

Таким образом, при помощи вектора амплитуды можно построить геометрическую модель гармонических колебаний, в которой особые характеристики гармонического движения A, φ и ω_0 получают простой геометрический смысл.

1. *Сложение двух гармонических колебаний одинаковой циклической частоты, происходящих вдоль одной прямой.*

Пусть $\omega_1 = \omega_2 = \omega$; $A_1 \neq A_2$; $\varphi_{01} \neq \varphi_{02}$.

Складываемые колебания описываются уравнениями:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01})\ ; \qquad (26.1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02})\ . \qquad (26.2)$$

Так как колебания происходят вдоль одной прямой (вдоль оси x), то результирующее смещение в любой момент времени равно алгебраической сумме смещений x_1 и x_2:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}) \qquad (26.3)$$

Выполним это сложение геометрически, с помощью векторов амплитуды $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$. На рисунке 49 изображены положения векторов амплитуды в начальный момент времени. Вектор результирующей амплитуды $\vec{A}$ равен геометрической сумме векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$.

Проекции конца вектора $\vec{A}$ определяет результирующее смещение в начальный момент времени. Так как оба вектора, $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$, вращаются в процессе колебаний с одной и той же угловой скоростью ω_0, с такой же скоростью будет вращаться и вектор результирующей амплитуды. Следовательно, результирующее колебание представляет собой гармоническое колебание той же частоты и происходит вдоль той же прямой. Из рисунка 49 видно, что

$$x = x_1 + x_2 = A \cos\varphi_0 ,$$

для произвольного момента времени:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (26.4)$$

где A и φ_0 - амплитуда и начальная фаза результирующего колебания. Из $\Delta 0 A_2 A$ по теореме косинусов получаем:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos\gamma$$

или

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) \qquad (26.5)$$

так как $\cos\gamma = -\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})$

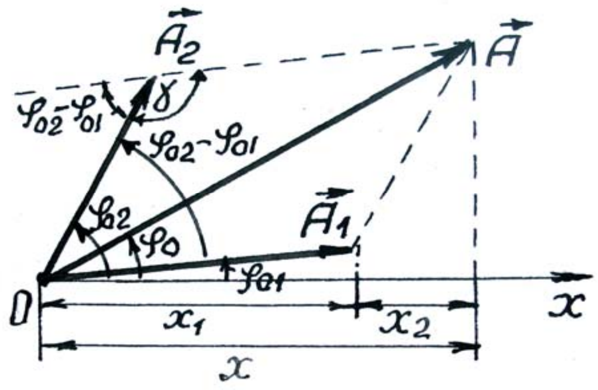


Рис.49

$$tg\varphi_0 = \frac{A_1 \sin\varphi_{01} + A_2 \sin\varphi_{02}}{A_1 \cos\varphi_{01} + A_2 \cos\varphi_{02}} \qquad (26.6)$$

Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз ($\varphi_{02} - \varphi_{01}$) слагаемых колебаний. Если ($\varphi_{02} - \varphi_{01} = 2k\pi$), где $k = 0,1,2,...$, то $\cos 2k\pi = 1$ и $A = A_1 + A_2$, т.е. если разность фаз равна четному числу π, колебания усиливают друг друга. Если $\varphi_{02} - \varphi_{01} = (2k+1)\pi$, то $\cos(2k+1)\pi = -1$ и $A = \left|A_2 - A_1\right|$, т.е. если разность фаз равна нечетному числу π, колебания максимально ослабляют друг друга. В зависимости от разности фаз амплитуда колебания может принимать любые значения, лежащие в интервале:

$$A_1 + A_2 \geq A \geq \left|A_2 - A_1\right|.$$

2. *Сложение двух гармонических колебаний со слегка отличающимися частотами, происходящих вдоль одной прямой*

Пусть $\omega_1 \neq \omega_2$, причем $\left|\omega_1 - \omega_2\right| \ll \omega_1$ (или ω_2),

$A_1 = A_2 = A$ и $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$.

Уравнения слагаемых колебаний:

$$x_1 = A\cos\omega_1 t$$

$$x_2 = A\cos\omega_2 t.$$

Как и в предыдущем случае,

$$x = x_1 + x_2 = A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t). \qquad (26.7)$$

Так как $\omega_1 \neq \omega_2$, векторы амплитуды складываемых колебаний будут вращаться с неодинаковыми угловыми скоростями. Это приведёт к тому, что вектор результирующей амплитуды будет пульсировать по величине. Последнее видно из формулы (26.5), если в неё вместо $\varphi_{02} - \varphi_{01}$ подставить $\omega_2 t - \omega_1 t = (\omega_2 - \omega_1)t$: так как эта величина монотонно возрастает, вектор амплитуды результирующего колебания будет периодически изменяться.

Применив формулы для суммы косинусов, преобразуем (26.7):

$$x = \left|2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right|\cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t \qquad (26.8)$$

Множитель, выделенный вертикальными чертами, изменяется с течением времени гораздо медленнее, чем второй множитель. За время, в течение которого второй множитель совершит полное колебание, первый почти не изменится (так как по условию $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$). Это позволяет рассматривать колебание (26.8) как гармоническое колебание с частотой $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, амплитуда которого изменяется по периодическому закону:

$$\left| 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t \right| \tag{26.9}$$

(взят модуль этого выражения, так как амплитуда – величина положительная). Гармонические колебания с периодически изменяющейся амплитудой называются *биениями.*

Найдём частоту пульсаций амплитуды или частоту биений, Так как период абсолютного значения косинуса равен π, то частота пульсаций определится из соотношения: $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}(\frac{1}{\nu}) = \pi$, откуда

$$\nu = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \frac{2\pi\nu_1 - 2\pi\nu_2}{2\pi} = \nu_1 - \nu_2, \tag{26.10}$$

где ν_1 и ν_2 - частоты слагаемых колебаний. Мы видим, что чем меньше отличаются частоты слагаемых колебаний, тем меньше частота биений. На рисунке 50 изображён график биений.

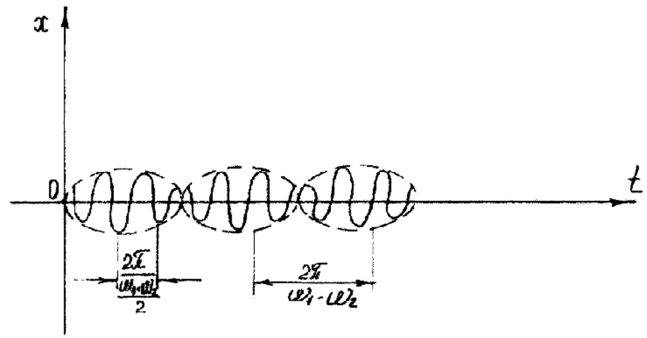


Рис.50

3. *Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний*

Пусть материальная точка одновременно участвует в двух колебаниях, происходящих вдоль координатных осей x и y, причём

$\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $A_1 \neq A_2$, $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$:

$$x = A_1 \cos\omega t$$
$$y = A_2 \cos\omega t. \qquad (26.11)$$

Для нахождения траектории результирующего движения из этих уравнений нужно исключить время. Разделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{y}{x} = \frac{A_2}{A_1} \qquad \text{или} \qquad y = \frac{A_2}{A_1}x \qquad (26.12)$$

Траектория – прямая, проходящая через начало координат и наклоненная к оси x под углом, тангенс которого равен $\frac{A_2}{A_1}$ (рис.51,а).

Точка будет совершать гармоническое колебание вдоль этой прямой:

$$S = A\cos\omega t,$$

где $A = \left|\sqrt{A_1^2 + A_2^2}\right|$ - амплитуда колебания.

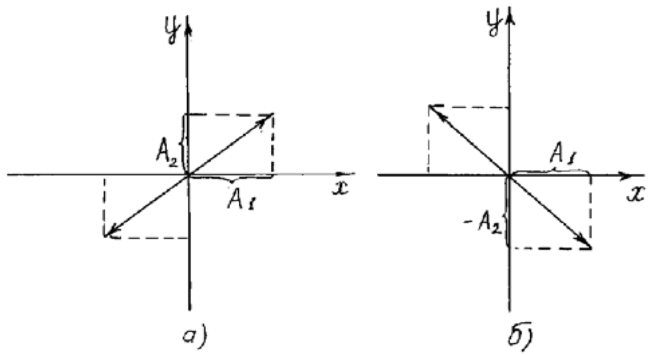


Рис.51

2. Пусть теперь $\omega_1 = \omega_2 = \omega$; $A_1 \neq A_2$;

$\varphi_{01} = 0$, $\varphi_{02} = \pi$ $\quad (\varphi_{02} - \varphi_{01} = \pi)$:

$x = A_1 \cos\omega t$,

$y = A_2 \cos(\omega t + \pi) = -A_2 \cos\omega t.$

Разделив одно уравнение на другое, получим уравнение прямой с отрицательным тангенсом угла наклона (рис.51,*б*):

$$y = -\frac{A_2}{A_1}x. \qquad (26.13)$$

Пусть, наконец, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$; $A_1 \neq A_2$; $\varphi_{01} = 0$; $\varphi_{02} = \dfrac{\pi}{2}$

$$\left(\varphi_{02} - \varphi_{01} = \frac{\pi}{2}\right):$$

$$x = A_1 \cos\omega t,$$

$$y = A_2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -A_2 \sin\omega t.$$

Перепишем эти уравнения в виде $\dfrac{x}{A_1} = \cos\omega t,$

$$\frac{y}{A_2} = -\sin\omega t,$$

возведём в квадрат и почленно сложим:

$$\frac{x^2}{A_1^{\,2}} + \frac{y^2}{A_2^{\,2}} = 1. \qquad (26.14)$$

Полученное уравнение есть уравнение эллипса, приведенное к координатным осям. Полуоси этого эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний A_1 и A_2 (рис.52). При $A_1 = A_2$ эллипс вырождается в окружность. Если разность фаз слагаемых колебаний равна $\dfrac{\pi}{2}$ $\left(\varphi_{02} - \varphi_{01} = \dfrac{\pi}{2}\right)$, то движение точки по эллипсу (или по окружности) будет происходить по часовой стрелке.

Действительно, в момент времени $t = 0$ точка имеет координаты:

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos 0 = A_1 \\ y &= A_2 \sin 0 = 0 \end{aligned} \qquad \text{(рис.52)}$$

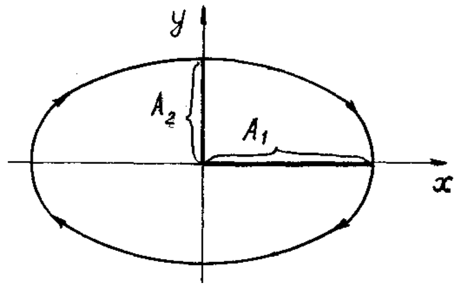


Рис.52

В последующем x уменьшается, а y становится отрицательным. Это соответствует движению по часовой стрелке. Нетрудно убедиться в том, что если $\varphi_{02}-\varphi_{01}=-\frac{\pi}{2}$ (или $\frac{3}{2}\pi$, что то же самое), движение происходит против часовой стрелки.

При всех других разностях фаз (но при $\omega_1=\omega_2$) получаются эллипсы, не приведённые к осям x и y.

При сложении взаимно перпендикулярных гармонических колебаний с неодинаковыми циклическими частотами результирующее движение будет происходить по сложным траекториям, называемым фигурами Лиссажу. Форма фигур Лиссажу зависит от соотношения частот складываемых колебаний и разности их начальных фаз.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Материальная точка массой m = 5 *г* совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 0{,}5 c^{-1}$. Амплитуда колебаний A = 3 *см.* Определить: 1) скорость υ в момент времени, когда смещение x = 1,5 *см;* 2) максимальную силу $F_{макс}$, действующую на точку, 3) полную энергию колеблющейся точки.

Решение. 1) Уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$x = A\cos(\omega t+\varphi),$$

где x – смещение колеблющейся точки от положения равновесия, A – амплитуда колебания, $\omega t+\varphi$ - фаза колебания, φ - начальная фаза, ω – круговая (циклическая) частота, t – время.

Формулу скорости получим, взяв первую производную по времени от смещения,

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t+\varphi).$$

Чтобы выразить скорость через смещение, надо исключить из этих выражений время. Для этого возведём оба уравнения в квадрат, разделим первое на A^2, второе на $A^2\omega^2$ и сложим:

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{\upsilon^2}{A^2\omega^2}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{A^2}+\frac{\upsilon^2}{4\pi^2\nu^2A^2}=1$$

Решив последнее уравнение относительно υ, найдём

$$\upsilon = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}.$$

Подставив в это выражение числовые значения величин, получим

$$\upsilon = \pm 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5\sqrt{9.10^{-4} - 2{,}25.10^{-4}} = \pm 8{,}2.10^{-2}\,(м/с).$$

Знак “плюс” соответствует случаю, когда направление скорости совпадает с положительным направлением оси x-ов. Знак “минус” соответствует случаю, когда направление скорости совпадает с отрицательным направлением оси x-ов.

2) Силу, действующую на точку, найдем по второму закону Ньютона: $F = ma$, где a – ускорение точки, которое получим, если возьмём производную по времени от скорости:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{или} \quad a = -4\pi^2\nu^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

Получаем $\qquad F = -4\pi^2\nu^2 mA\cos(\omega t + \varphi)$.

Максимальное значение силы $F_{макс} = 4\pi^2\nu^2 mA.$

Подставив числовые значения величин, найдем

$$F_{макс} = 4 \cdot 9{,}87 \cdot 0{,}25 \cdot 5.10^{-3} \cdot 0{,}03 = 1{,}49.10^{-3}\,(H).$$

3) Полная энергия колеблющейся точки есть сумма кинетической и потенциальной энергий, вычисленных для любого момента времени. В том числе она равна максимальной кинетической энергии, когда потенциальная равна нулю, т.е.

$$E = T_{макс} = \frac{m\upsilon_{макс}^2}{2},$$

где $\upsilon_{макс} = -A\omega = -2\pi\nu A$, $\quad$ тогда $\qquad E = 2\pi^2 m\nu^2 A^2$.

После подстановки числовых значений получим

$$E = 2 \cdot 9{,}87 \cdot 5.10^{-3} \cdot 0{,}25 \cdot 9.10^{-4} = 2{,}21.10^{-5}\,(Дж)$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое колебания? Какие колебания называются свободными, гармоническими?
2. Дайте определение амплитуды колебаний, фазы, периода, частоты, циклической частоты колебаний.
3. В чём заключается идея метода вращающегося вектора амплитуды?

4. Выведите формулы для скорости и ускорения гармонически колеблющейся точки как функции времени.

5. От чего зависит амплитуда и начальная фаза гармонических механических колебаний?

6. Выведите и прокомментируйте формулы для кинетической, потенциальной и полной энергии при гармонических колебаниях.

7. Чему равно отношение полной энергии гармонического колебания к максимальному значению возвращающей силы, вызывающей это колебание?

8. Что называется гармоническим осциллятором, пружинным маятником, физическим маятником, математическим маятником?

9. Выведите формулу для периодов колебаний пружинного, физического и математического маятников.

10. Что такое приведённая длина физического маятника?

11. Сформулируйте и поясните теорему Штейнера.

12. Какова траектория точки, участвующей одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях с одинаковыми периодами? Когда получается окружность, прямая?

13. Что такое биения? Чему равна частота биений, период?

14. Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Проанализируйте их.

15. Как изменяется частота собственных колебаний с увеличением массы колеблющегося тела?

16. По какому закону изменяется амплитуда затухающих колебаний? Являются ли затухающие колебания периодическими?

17. Почему частота затухающих колебаний должна быть меньше частоты собственных колебаний системы?

18. Что такое коэффициент затухания, декремент затухания, логарифмический декремент затухания?

19. При каких условиях наблюдается апериодическое движение?

20. Что такое вынужденные колебания? Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение.

21. От чего зависит амплитуда вынужденных колебаний? Запишите выражение для амплитуды и фазы при резонансе.

22. Нарисуйте, проанализируйте резонансные кривые для амплитуды смещения и скорости. В чём их отличие?

23. Чему равен сдвиг фазы между смещением и вынуждающей силой при резонансе?

24. Что называется резонансом? Какова его роль?

МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

27 ПОНЯТИЕ О МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЛНАХ

1. Если какую-либо частицу или совокупность частиц упругой среды привести в колебание, то эти колебания не останутся локализованными в том месте, где они возбуждены, а благодаря взаимодействию между частицами будут распространяться с некоторой конечной скоростью по всем направлениям.

Процесс распространения механических колебаний в упругой среде называется *механической волной*.

Существенно подчеркнуть, что волна переносит колебательное движение, энергию этого движения, но не сами частицы среды. Частицы среды лишь совершают колебания около положений равновесия, причём соседние частицы, даже самые ближайшие, колеблются с некоторым сдвигом по фазе. Наличие сдвига фаз объясняется *инерцией* частиц. Чтобы вывести из положения равновесия любую из частиц, требуется некоторое время. Поэтому частицы, находящиеся на разных расстояниях от источника волны, приходят в колебания неодновременно.

2. Различают поперечные и продольные волны.

Волна называется *поперечной*, если колебания частиц среды происходят вдоль направлений, перпендикулярных к направлению распространения волны. Пример: колебания струны. Поперечные волны могут распространятся в тех средах, в которых возникают упругие силы при деформации сдвига. Такими свойствами обладают только твёрдые тела. Волна называется *продольной*, если колебания частиц среды происходят вдоль направлений, параллельных направлению распространения волны. Пример: звуковые волны. Продольные волны могут распространяться в таких средах, в которых возникают упругие силы при деформации сжатия или растяжения. Такими средами являются любые тела – твёрдые, жидкие, газообразные.

На рисунке 53 показано расположение частиц среды в поперечной (*а*) и продольной (*б*) волнах (выделены частицы, которые в невозмущенной среде располагались воль одной прямой, на одинаковых расстояниях друг от друга).

3. Основными параметрами волны являются: 1) фазовая скорость υ; 2) частота колебаний ν; 3) период колебаний T; 4) циклическая частота; 5) длина волны λ.

Фазовая скорость и скорость распространения волны – это скорость, с которой перемещается в пространстве та или иная фаза колебания. Фазовая скорость зависит от плотности среды и её упругих свойств.

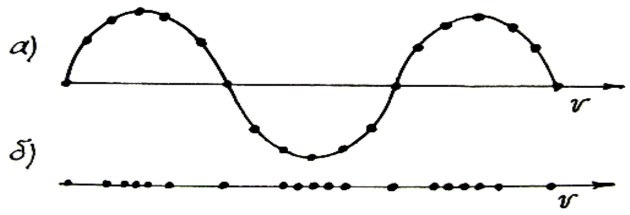


Рис.53

Частота колебаний – число полных колебаний, совершаемых любой из частиц среды, в которой распространяется волна, за единицу времени.

Период колебаний – промежуток времени, в течение которого любая из частиц совершает одно полное колебание.

Циклическая частота – число полных колебаний совершаемых за 2π секунд.

Длина волны – расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковых фазах (точнее, со сдвигом фаз, равным 2π; но добавление к фазе 2π не оказывает на неё влияния).

Нетрудно показать, что длина волны равна тому расстоянию, на которое волна распространяется за время, равное периоду:

$$\lambda = \upsilon \cdot T \tag{27.1}$$

4. Во всякой волне можно выделить бесчисленное множество так называемых волновых поверхностей. *Волновая поверхность* – это геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе. Волновые поверхности принято проводить через равновесные положения частиц, колеблющихся в одинаковых фазах. Отсюда следует, что волновые поверхности неподвижны. В зависимости от формы волновой поверхности различают плоские, сферические, цилиндрические, эллиптические и т.д. волны.

Поверхность, отделяющая колеблющиеся частицы от частиц, ещё не пришедших в колебания, называется *фронтом волны*. Фронт волны в отличие от волновых поверхностей перемещается со скоростью равной скорости распространения волны.

Нормаль, восставленная к фронту волны в данной точке, указывает, в каком *направлении распространяется* волна в этой точке.

5. Связь между основными параметрами волны устанавливается формулами:

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu = \lambda\frac{\omega}{2\pi} \quad ; \tag{27.2}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (27.3)$$

Величину $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ называют *волновым числом*. Выразив λ через ω и υ по (27.2), можно записать: $k = \frac{\omega}{\upsilon}$ (27.4)

28 УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

1. Уравнение волны – это формула, позволяющая найти смещение любой частицы среды, в которой распространяется волна, для любого заданного момента времени: $S = S(x, y, z, t)$, (28.1)

где S – смещение произвольной частицы от положения равновесия;
x, y, z - декартовы координаты равновесного положения этой частицы;
t - время.

Формула (28.1) должна быть периодической функцией, как координат, так и времени. Это следует из того, что *все* частицы, охваченные волновым движением, совершают периодические колебания, и все частицы, отстоящие друг от друга на расстоянии λ, колеблются одинаковым образом.

2. Будем полагать, что частицы среды колеблются по гармоническому закону, волна плоская и распространяется в направлении оси x. В этом случае волновые поверхности будут перпендикулярны к оси x и так как все частицы, принадлежащие одной и той же волновой поверхности, колеблются одинаково, смещение любой из частиц будет зависеть только от x и t:

$$S = S(x, t). \qquad (28.2)$$

Выделим две волновые поверхности так, чтобы одна проходила через начало координат (поверхность «0»), другая – через произвольную точку с координатой x (поверхность «x») – рис.54. Пусть колебания частиц, принадлежащих волновой поверхности «0», происходят по закону

$$S_0 = A\cos\omega t \qquad (28.3)$$

Колебания частиц, принадлежащих поверхности «x», начнутся позже, так как требуется некоторое время для того, чтобы волна прошла расстояние x, отделяющее поверхности «*0*» и «x». Это время, очевидно, равно $\tau = \frac{x}{\upsilon}$, где υ - скорость распространения волны.

Следовательно, колебания частиц поверхности «x» будут отставать от колебаний частиц поверхности «*0*» на τ:

$$S = A\cos\omega(t-\tau)$$

или

$$S = A\cos\omega(t-\frac{x}{\upsilon}\cdot) \quad (28.4)$$

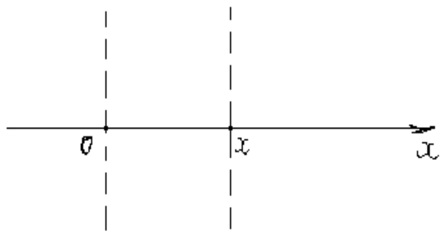


Рис.54

Это уравнение и есть уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся в направлении оси x. Величина S определяет смещение от положения равновесия любой из частиц с координатой x в момент времени t. Предполагается, что амплитуда колебаний всех частиц одинакова. Для плоской волны это справедливо, если энергия волны не поглощается средой.

Уравнения плоской волны можно записать также в виде:

$$S = A\cos(\omega t - \frac{\omega}{\upsilon}x)$$

или, учитывая (27.4):

$$S = A\cos(\omega t - kx)\,. \qquad (28.5)$$

3. Уравнение волны, распространяющейся в направлении, противоположном оси x, имеет вид:

$$S = A\cos(\omega t + kx)\,. \qquad (28.6)$$

4. График зависимости смещения от t при некотором фиксированном x приведен на рисунке 55, *а*; график зависимости смещения от x при некотором фиксированном t - на рисунке 55, *б*.

5. Уравнение плоской волны есть решение соответствующего дифференциального уравнения, называемого *волновым*.

Волновое уравнение связывает вторые частные производные от смещения по координатам со вторыми частными производными от смещения по времени. Продифференцируем уравнения волны (28.5) дважды по времени:

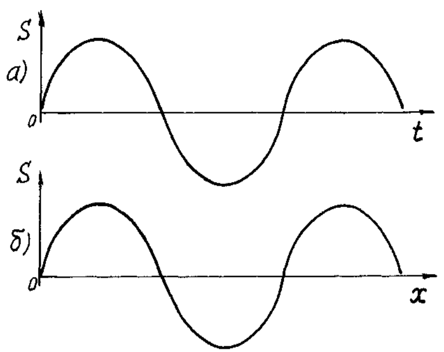


Рис.55

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx)\,, \tag{28.7}$$

затем дважды по координате:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -Ak^2 \cos(\omega t - kx)\,. \tag{28.8}$$

Сопоставим уравнения (28.7) и (28.8), найдём, что

$$\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\,.$$

Учитывая, наконец, $\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{\upsilon^2}$, найдём искомое волновое уравнение плоской гармонической волны:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\,. \tag{28.9}$$

В случае если волна распространяется в произвольном направлении, в левой части волнового уравнения появляются слагаемые содержащие вторые частные производные по y и z:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\,. \tag{28.10}$$

Решением этого уравнения в зависимости от дополнительных условий может быть уравнение плоской, сферической и т.д. волн.

29 СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Распространение волн в упругой среде, это распространение деформаций в ней.

Пусть упругому стержню сечением S, за время Δt сообщили импульс равный

$$F\Delta t\,. \tag{29.1}$$

К концу этого промежутка времени сжатие охватит участок длиной l (рис.56).

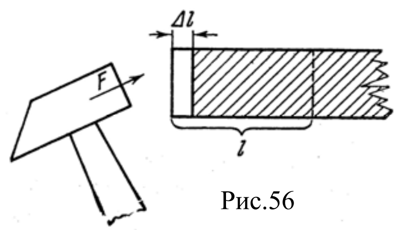


Рис.56

Тогда величина $\frac{l}{\Delta t} = \upsilon$ будет определять скорость распространения сжатия вдоль стержня, т.е. скорость волны. Скорость распространения самих частиц в стержне равна $U = \frac{\Delta l}{\Delta t}$. Изменение импульса за это время $\Delta K = K_2 - K_1 = mU - 0 = mU$, где масса стержня, охваченная деформацией $m = \rho Sl$ и выражение (29.1) примет вид

$$F\Delta t = \rho SlU \qquad (29.2)$$

Учитывая, что по закону Гука $$F = ES\frac{\Delta l}{l}, \qquad (29.3)$$

где E - модуль упругости, приравняем силы, выраженные из (29.2) и (29.3), получим

$\frac{\rho SlU}{\Delta t} = ES\frac{\Delta l}{l}$, откуда $\frac{E}{\rho} = (\frac{l}{\Delta t})^2 = \upsilon^2$ и скорость распространения продольных волн в упругой среде будет равна

$$\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad (29.4)$$

Аналогично можно получить выражение скорости для поперечных волн

$$\upsilon_{попер} = \sqrt{\frac{N}{\rho}}, \qquad (29.5)$$

где N - модуль сдвига.

30 ЭНЕРГИЯ ВОЛНЫ

Пусть волна распространяется вдоль оси x со скоростью υ. Тогда смещение S колеблющихся точек относительно положения равновесия

$$S = A\sin\omega(t - \frac{x}{\upsilon}). \qquad (30.1)$$

Энергия участка среды (с объемом ΔV и массой m), в которой распространяется эта волна, будет складываться из кинетической и потенциальной энергий, т.е. $W = W_к + W_п$.

При этом $W_к = \frac{1}{2}m\upsilon^2$, где $\upsilon = A\omega\cos\omega(t - \frac{x}{\upsilon})$,

т.е. $$W_к = \frac{1}{2}\rho\Delta VA^2\omega^2\cos^2\omega(t - \frac{x}{\upsilon}). \qquad (30.2)$$

В свою очередь потенциальная энергия этого участка равна работе по его деформации $W_n = A = \frac{1}{2}Fdl = \frac{1}{2}ES\frac{dl^2}{l}$. Умножив и разделив правую часть этого выражения на l, получим $W_n = \frac{1}{2}E(\frac{dl}{l})^2 lS$, где $\frac{dl}{l}$ можно заменить на относительную деформацию $\frac{dS}{dx}$. Тогда потенциальная энергия примет вид:

$$W_n = \frac{1}{2}E(\frac{dS}{dx})^2\Delta V = \frac{1}{2}E\left[\frac{A\omega}{\upsilon}\cos\omega(t-\frac{x}{\upsilon})\right]^2\Delta V = \frac{1}{2}E\frac{A^2\omega^2}{\upsilon^2}\cos^2\omega(t-\frac{x}{\upsilon})\Delta V \qquad (30.3)$$

Сравнивая (30.2) и (30.3) , замечаем, что обе энергии изменяются в одинаковых фазах, одновременно принимают максимальное и минимальное значения. При колебаниях в среде энергия из одного участка может переходить в другой, но полная энергия элемента объёма ΔV не остаётся постоянной

$$W = W_к + W_n = \frac{1}{2}A^2\omega^2\Delta V\cos^2\omega(t-\frac{x}{\upsilon})\left[\frac{E}{\upsilon^2}+\rho\right]. \qquad (30.4)$$

Учитывая, что для продольной волны в упругой среде $\upsilon = \sqrt{E/\rho}$ и $\frac{E}{\upsilon^2} = \rho$, получаем, что полная энергия

$$W = \rho A^2\omega^2\Delta V\cos^2\omega(t-\frac{x}{\upsilon}) \qquad (30.5)$$

пропорциональна квадратам амплитуды и частоты, а также плотности среды, в которой распространяется волна.

Введем понятие *плотности энергии* - ε. Для элементарного объёма ΔV эта величина равна $\varepsilon = \frac{W}{\Delta V} = \rho A^2\omega^2\cos^2\omega(t-\frac{x}{\upsilon})$. (30.6)

Среднее значение плотности энергии $\bar{\varepsilon}$ для времени одного периода будет равно $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$, так как среднее значение $\cos^2\varphi$ за это время равно 1/2.

Учитывая, что энергия не остается в данном элементе среды, а переносится волной от одного элемента к другому, можно ввести понятие *потока энергии,* численно равного энергии, переносимой через единицу поверхности за единицу времени. Так как энергия $W = \bar{\varepsilon}\upsilon t S$, то среднее значение потока энергии

$$\overline{\Pi} = \frac{W}{t} = \bar{\varepsilon}\upsilon S\,. \tag{30.7}$$

Плотность потока сквозь поперечное сечение определяется как $\overline{U} = \dfrac{\overline{\Pi}}{S} = \bar{\varepsilon}\upsilon$, а так как скорость есть величина векторная, то и плотность потока - то же вектор

$$\vec{U} = \bar{\varepsilon}\vec{\upsilon}\,, \tag{30.8}$$

получивший название - “вектор Умова”.

31 ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Волна, проходящая через границу раздела двух сред, частично проходит через неё, частично отражается. Этот процесс зависит от соотношения плотностей сред.

Рассмотрим два предельных случая:

а) Вторая среда менее плотная (т.е. упругое тело имеет свободную границу);

б) Вторая среда более плотная (в пределе отвечает неподвижно закреплённому концу упругого тела);

а) Пусть левый конец стержня связан с источником колебаний, правый – свободен (рис.57, *а*). Когда деформация достигнет правого конца, он, в результате возникшего слева сжатия получит ускорение вправо.При этом, в силу отсутствия среды справа, это движение не вызовет никакого дальнейшего сжатия. Деформация слева будет умень-

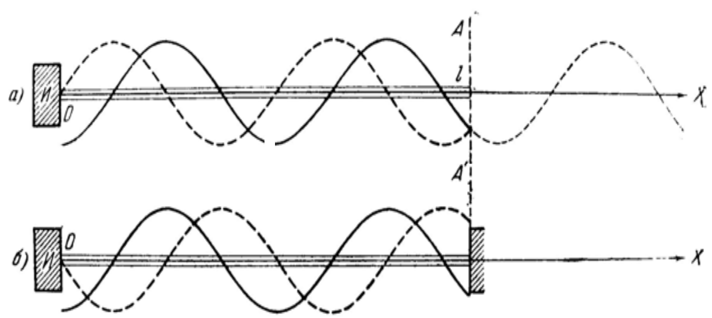


Рис.57

шаться, а скорость движения – расти. При $x = 0$, $\upsilon = \max$. В силу инерции конца стержня движение в момент исчезновения деформации не прекратится. Оно будет продолжаться с замедлением, вызывая деформацию растяжения, которая будет распространяться справа налево.

То есть, в точке отражения *за приходящим сжатием* следует *уходящее растяжение,* как и в свободно распространяющейся волне. Это значит, что при отражении волны от менее плотной среды, ни какого изменения фазы её колебаний в точке отражения не происходит.

б) Во втором случае, когда правый конец упругого стержня *закреплён неподвижно,* дошедшая до него *деформация* сжатия *не может* привести этот конец *в движение* (рис.57, *б*). Возникшее сжатие начнёт распространяться влево. При гармонических колебаниях источника за деформацией сжатия будет следовать деформация растяжения. А при отражении от закреплённого конца за сжатием в приходящей волне будет следовать опять – таки деформация сжатия в отраженной волне.

То есть процесс происходит так, как будто в точке отражения теряется полволны, другими словами, фаза колебаний меняется на противоположную (на π). Во всех промежуточных случаях картина отличается только тем, что амплитуда отражённой волны будет меньше, ибо часть энергии уходит во вторую среду.

При непрерывной работе источника волн, волны, идущие от него, будут складываться с отраженными. Пусть их амплитуды одинаковы, а начальные фазы равны нулю. При распространении волн вдоль оси x, их уравнения

$$\begin{aligned} S_{пр} &= A\cos\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right) = A\cos(\omega t - kx) \\ S_{об} &= A\cos\omega\left(t+\frac{x}{\upsilon}\right) = A\cos(\omega t + kx) \end{aligned} \qquad (31.1)$$

В результате сложения колебания будут происходить по закону

$$S = S_{пр} + S_{об} = 2A\cos kx\cos\omega t = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos 2\pi\frac{t}{T}$$

В этом уравнении два первых сомножителя представляют собой амплитуду результирующего колебания $B(x)$, зависящую от положения точек на оси x $\qquad B(x) = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} = 2A\cos kx$.

Получили уравнение, называемое уравнением стоячей волны

$$S = B(x)\cos 2\pi\frac{t}{T} = B(x)\cos\omega t \qquad (31.2)$$

Точки, для которых амплитуда колебаний максимальна

($B(x)=2A$), называются пучностями волны; точки, для которых амплитуда минимальна ($B(x)=0$), называются узлами волны.

Определим *координаты пучностей.* При этом $\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}=1$, т.е. должно выполняться условие $2\pi\frac{x}{\lambda}=\pm k\pi$ при $k=0,1,2,3,...$

Откуда координаты пучностей $x=\pm k\frac{\lambda}{2}=\pm 2k\frac{\lambda}{4}$. Расстояние между соседними пучностями - k и $k+1$ будет равно

$x_{k+1}-x_k=(k+1)\frac{\lambda}{2}-k\frac{\lambda}{2}=\frac{\lambda}{2}$, т.е. половине длины волны.

Определим *координаты узлов.* При этом $\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}=0$, т.е. должно выполняться условие $2\pi\frac{x}{\lambda}=\pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$ при $k=0,1,2,3,...$

Откуда координаты узлов $x=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{4}$, расстояние между соседними узлами равно половине длины волны, а между узлом и пучностью $(2k+1)\frac{\lambda}{4}-k\frac{\lambda}{2}=\frac{\lambda}{4}$ - четверти волны. Так как $\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}$ при переходе через нуль, т.е. узел, меняет значение с $+1$ на -1, то смещение точек или их амплитуды по разные стороны от узла имеют одинаковое значения, но разные направления. Так как $\cos 2\pi\frac{t}{T}$ имеет одинаковое значение в данный момент времени для всех точек волны, то все точки, находящиеся между двумя узлами, колеблются в одинаковых фазах, а по обе стороны узла в противоположных фазах.

Эти признаки являются отличительными признаками стоячей волны от бегущей, у которой все точки имеют одинаковые амплитуды, но колеблются в разных фазах.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью $\upsilon=15м/с$. Период колебания точек шнура $T=1{,}2с$, амплитуда $A=2см$.

Определить: 1) длину волны λ, 2) фазу φ колебаний, смещение y, скорость υ и ускорение a точки, отстоящей на расстоянии $x = 45м$ от источника волн в момент времени $t = 4c$, 3) разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих от источника волн на расстояниях $x_1 = 20м$ и $x_2 = 30м$.

Решение. 1) Длиной волны называется наименьшее расстояние между точками волны, колебания которых отличаются по фазе на 2π. Длина волны равна расстоянию, которое волна проходит за один период, и находится как $\lambda = \upsilon T$.

Подставив числовые значения, получим $\lambda = 15 \cdot 1{,}2 = 18(м)$.

2) Фаза колебаний, смещение, скорость и ускорение точки могут быть найдены с помощью уравнения волны

$$y = A\cos\omega(t - \frac{x}{\upsilon}),$$

y – смещение колеблющейся точки, x – расстояние точки от источника волн, υ - скорость распространения волн.

Фаза колебаний равна $\varphi = \omega(t - \frac{x}{\upsilon})$ или $\varphi = \frac{2\pi}{T}(t - \frac{x}{\upsilon})$.

Подставив числовые значения, получим

$$\varphi = \frac{2\pi}{1{,}2}\left(4 - \frac{45}{15}\right) = \frac{\pi}{0{,}6} = 1{,}67\pi.$$

Смещение точки определим, подставив в уравнение волны числовые значения амплитуды и фазы

$$y = 2\cos 1{,}67\pi = 2\cos 300^0 = 2\cdot\cos(-60^0) = 2\cdot 0{,}5 = 1(см)$$

Скорость υ точки является первой производной от смещения по времени, поэтому

$$\upsilon = \frac{dy}{dt} = -A\omega\sin\omega(t - \frac{x}{\upsilon}) \quad \text{или} \quad \upsilon = -\frac{2\pi A}{T}\sin\omega(t - \frac{x}{\upsilon}).$$

Подставив числовые значения, получим

$$\upsilon = -\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 2}{1{,}2}\sin 300^0 = -10{,}4\sin(-60^0) = -10{,}4\cdot(-0{,}86) = 9(см/с).$$

Ускорение есть первая производная от скорости по времени, поэтому

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2\cos\omega(t - \frac{x}{\upsilon})$$

После подстановки числовых значений найдём

$$a = -0{,}02\left(\frac{2\cdot 3{,}14}{1{,}2}\right)^2 \cos 300^0 = -0{,}548\cos(-60^0) = -0{,}548\cdot 0{,}5 = -0{,}274(м/с^2).$$

3) Разность фаз колебаний $\Delta\varphi$ двух точек волны связана с расстоянием Δx между этими точками (разностью хода волны) соотношением

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1).$$

Подставив числовые значения, получим

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{18}(30-20) = 1{,}1\pi$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Как объяснить распространение колебаний в упругой среде? Что такое волна?
2. Что называется поперечной волной, продольной волной? Когда они возникают?
3. Что такое волновой фронт, волновая поверхность?
4. Что называется длиной волны? Какова связь между длиной волны, скоростью и периодом?
5. Что такое волновое число, фазовая и групповая скорости?
6. В чём заключается физический смысл вектора Умова?
7. Какая волна является бегущей, гармонической, плоской, сферической?
8. Каковы уравнения этих волн?
9. Когда на струне образуется стоячая волна, колебания прямой и отраженной волн в узлах взаимно гасятся. Означает ли это, что исчезает энергия?
10. Две волны, распространяющиеся навстречу друг другу, отличаются только амплитудами. Образуют ли они стоячую волну?
11. Чем стоячая волна отличается от бегущей?
12. Чему равно расстояние между двумя соседними узлами стоячей волны, двумя соседними пучностями, соседними пучностью и узлом?

АКУСТИКА. ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ

32 ПРИРОДА ЗВУКА И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

Колебания упругой среды с частотой в диапазоне 16 … 20 000 Гц, воспринимаемые органами слуха, называются *звуком*.

Колебания с частотой больше 20 000 Гц называются ультразвуковыми или *ультразвук*. Колебания с частотой меньше 16 Гц – *инфразвук*.

Любые тела, совершающие механические колебания с такой частотой, являются источниками звука.

Физическим характеристикам звуковых колебаний соответствуют определенные физиологические понятия.

Так *частоте* колебаний ν соответствует *высота* звука.

Силе звука I, физической характеристике интенсивности звуковых колебаний, соответствует *громкость* звука.

Интенсивность звука может быть охарактеризована различными величинами: скоростью колебаний, силой давления, напряжениями, амплитудой колебаний и др. Однако *целесообразнее* интенсивность звука *характеризовать* по энергии, переносимой звуковыми волнами. Такая характеристика была предложена в 1877 г Н.А.Умовым.

Ранее было показано, что полная энергия колебаний остается постоянной, равной $W = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}$. Выделим из фронта бегущей волны элементарную площадку dS. За время dt волна распространится на расстояние υdt, перпендикулярное к этому фронту, и образует объем $\upsilon dt dS$. Если плотность энергии среды равна ε, то энергия всех частиц, входящих в элементарный объем будет - $\varepsilon\upsilon dt dS$. Тогда в единицу времени, через единичную площадку фронта волны будет переноситься *поток энергии* $\vec{I} = \varepsilon\vec{\upsilon}$

Вектор $\vec{I}$ направлен в сторону распространения волны и носит название “вектор Умова“. Величина вектора $\vec{I}$ называется *силой* звука.

Нормальное человеческое ухо способно воспринимать звуки, сила которых превышает некоторое минимальное значение, различное для различных частот $I_{\min} = f(\nu)$ (рис.58).

Величина $I_{\min}$ называется *порогом слышимости* звука. Так, для частоты $\nu = 10^3$ Гц порог слышимости $I_{\min} = 10^{-12}\, Вт/м^2$ (или $10^{-9}\,\frac{эрг}{см^2 сек}$). При силе звука $I = (1-10)\, Вт/м^2$ возникает болевое

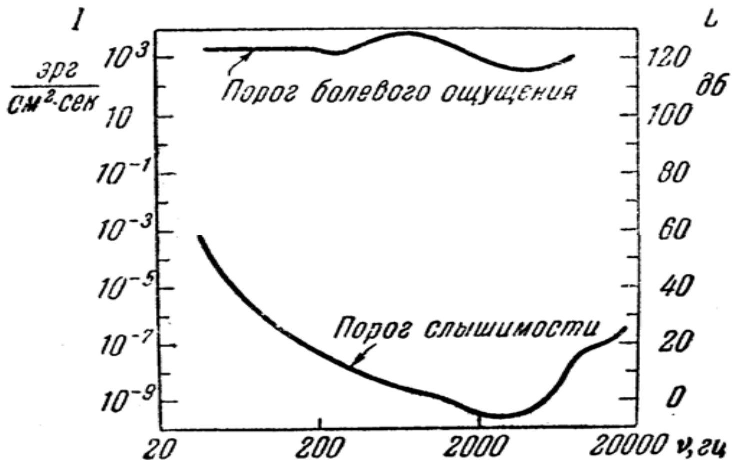


Рис.58

ощущение. В столь широком диапазоне чувствительности ухо не может различать малые приросты громкости звука. Поэтому часто используют не силу звука I, а *уровень силы звука* L. $L = \lg\frac{I}{I_0}$, измеряется в белах, или в единицах, в десять раз меньше – децибелах ($L = 10\lg\frac{I}{I_0}$).

Всякий реальный звук представляет собой не простое гармоническое колебание, а является наложением гармонических колебаний с определенным набором частот. Этот набор называется *акустическим спектром,* который может быть сплошным или линейчатым.

Сплошным акустическим спектром обладают *шумы.* Колебания с линейчатым спектром обладают определенной *тональностью.* Высота тонального звука определяется основной (наименьшей) частотой. Относительная интенсивность обертонов определяет окраску, или тембр, звука.

33 ЭФФЕКТ ДОППЛЕРА ДЛЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН

Рассмотрим вопрос о том, изменяются ли частоты колебаний, принимаемые каким – либо приёмником, в зависимости от того, перемещаются или нет источник и приёмник колебаний. Обозначим скорость движения источника колебаний через U, скорость приёмника колебаний через υ, а скорость распространения самих колебаний в среде - $V_в$.

а) Пусть приёмник колебаний и их источник покоятся относительно среды, т.е. $\upsilon = 0$, $U = 0$.

При прохождении колебаний мимо приемника, он регистрирует столько колебаний, которые определяются их частотой

$\nu' = \dfrac{V_в}{\lambda} = \dfrac{V_в}{V_в T} = \nu$, т.е. число колебаний, регистрируемых приёмником, равно числу колебаний, излучаемых источником.

б) Приёмник колебаний движется относительно среды со скоростью υ, источник – неподвижен: $U = 0$.

В этом случае приёмник зарегистрирует большее число волн, так как он движется им навстречу, а это эквивалентно тому, как если бы волны шли со скоростью $V_в + \upsilon$ и их число стало

$$\nu' = \frac{V_в + \upsilon}{\lambda} = \frac{V_в + \upsilon}{V_в T} = \left(1 + \frac{\upsilon}{V_в}\right)\nu .$$

Если регистрирующий прибор будет удаляться, то $\upsilon < 0$ и тогда $\nu' < \nu$, а при $|\upsilon| = |V_в|$ $\nu' = 0$. Это означает, что прибор движется вместе с волной и число воспринимаемых (проходящих мимо) волн равно нулю.

в) Источник колебаний движется относительно среды со скоростью U, регистрирующий прибор неподвижен - $\upsilon = 0$. Пусть $U > 0$, источник колебаний приближается к прибору. Учитывая, что скорость распространения волн зависит от свойств среды, и за время T волна распространится на расстояние λ, а источник переместится на расстояние UT, длина волны окажется равной не λ, а $\lambda' = \lambda - UT = V_в T - UT = (V_в - U)T$ и число регистрируемых волн будет: $\nu' = \dfrac{V_в}{\lambda'} = \dfrac{V_в}{(V_в - U)T} = \dfrac{V_в}{V_в - U}\nu$, т.е. число регистрируемых колебаний увеличилось. При удалении источника $U < 0$, число регистрируемых колебаний уменьшится.

г) При одновременном перемещении источника колебаний и регистрирующего прибора $(U \neq 0, \upsilon \neq 0)$ будет регистрироваться количество колебаний равное: $\nu' = \dfrac{V_в \pm \upsilon}{V_в \mp U}\nu$, где верхние знаки применяются при взаимном сближении, а нижние - при удалении источника и приемника колебаний.

Это изменение частоты колебаний получило название эффекта Доплера.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Источник звука частотой $\nu = 18000 \, Гц$ приближается к неподвижно установленному резонатору, настроенному на акустическую волну $\lambda_{рез} = 1{,}75 \, см$.

Какой скоростью должен обладать источник звука, чтобы возбуждаемые им звуковые волны вызывали колебания резонатора? Температура воздуха 17^0 С.

Решение. Согласно эффекту Доплера, частота звука, воспринимаемая наблюдателем, зависит от скорости движения источника звука и скорости движения наблюдателя. Эта зависимость выражается формулой

$$\nu' = \frac{V_в + \upsilon}{V_в - U}\nu,$$

где ν - частота звуковых волн, излучаемых источником, $V_в$ - скорость звука в данной среде, U - скорость движение источника звука, υ - скорость движения наблюдателя, ν' - частота волн, воспринимаемых наблюдателем.

Учитывая, что наблюдатель остается неподвижным, т.е. что $\upsilon = 0$, получим

$$\nu' = \frac{V_в}{V_в - U}\nu, \quad \text{откуда} \quad U = V_в\left(1 - \frac{\nu}{\nu'}\right).$$

В этом выражении неизвестны числовые значения скорости звука $V_в$ и частоты ν'.

Скорость звука в газах зависит от природы газа и от температуры и определяется по формуле

$$V_в = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}},$$

где $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$ – отношение удельных теплоёмкостей газа; R - универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура газа; M – молярная масса.

Чтобы волны, приходящие к резонатору, вызвали его колебания, частота воспринимаемых резонатором волн ν' должна совпадать с собственной частотой резонатора $\nu_{рез}$, т.е.

$$\nu' = \nu_{рез} = \frac{V_в}{\lambda_{рез}},$$

где $\lambda_{рез}$ - длина волны собственных колебаний резонатора.

С учетом сделанных замечаний будем иметь

$$U = V_в\left(1 - \frac{\nu\lambda_{рез}}{V_в}\right) = V_в - \nu\lambda_{рез},$$

или

$$U = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} - \nu\lambda_{рез},$$

что после подстановки числовых значений даст

$$U = \sqrt{\frac{1{,}4 \cdot 8{,}32 \cdot 290}{29.10^{-3}}} - 1{,}8.10^4 \cdot 1{,}75.10^{-2} = 36(м/с).$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое звуковые волны? Звуковые волны в воздухе продольные или поперечные? Почему?
2. Может ли звук распространяться в вакууме?
3. От чего зависит громкость, высота, тембр звука?
4. Что такое эффект Доплера? Чему будет равна частота колебаний, воспринимаемых покоящимся приёмником, если источник колебаний от него удаляется, приближается?
5. Какое влияние оказывает скорость ветра на эффект Доплера?
6. Как определить частоту звука, воспринимаемую приемником, если источник звука и приёмник движутся?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Савельев И. В. Курс общей физики: в 3 т.; учебное пособие для вузов. т.1: Механика. Молекулярная физика. /И.В. Савельев.-4-е изд. стер.-СПб.: Лань, 2005.

Зисман Г. А. Курс общей физики. Т.1 /Г.А. Зисман, О.М.Тодес.– М.:Наука,1972.

Детлаф А. А. Курс физики: учебное пособие для втузов. /А.А. Детлаф, Б.М. Яворский.-4-е изд., испр.- М.: Высш.шк.,2002.- 718 с.

Трофимова Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов. /Т.И.Трофимова.- 7-е изд., стер.- М.: Высш. шк., 2001.- 541 с.

Чертов А.Г. Задачник по физике: учебное пособие для втузов./А.Г.Чертов, А.А.Воробьев.- 8-е изд., перераб. и доп.- М.: Физматлит, 2006.- 640 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МЕХАНИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА
1. Поступательное и вращательное движение твердого тела 3
2. Кинематические характеристики вращательного движения………………………………………………………… 4
3. Центр инерции твердого тела…………………………….. 7
4. Момент силы. Момент инерции. Основной закон динамики вращательного движения твердого тела…………………….. 8
5.Кинетическая энергия твердого тела………………………. 12
Примеры решения задач……………………………………. 15
Вопросы для самопроверки………………………………… 20

ВСЕМИРНОЕ ТЯГОТЕНИЕ
6. Закон всемирного тяготения……………………………… 21
7. Потенциальная энергия тяготения………………………. 23
8. Гравитационное поле. Напряженность и потенциал гравитационного поля…………………………………….. … 25
9. Эквивалентность сил тяготения и сил инерции……..….... 30
10. Применение закона всемирного тяготения к некоторым физическим задачам…………………………………… .. …. 31
Примеры решения задач…………………………………. 32
Вопросы для самопроверки……………………………… 33

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ
11. Законы сохранения импульса, момента импульса и механической энергии……………………………………… 34
12. Применение законов сохранения к некоторым физическим задачам………………………………………… 40
Примеры решения задач…………………………….. 50
Вопросы для самопроверки………………………….. 53

ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ
13 Давление в жидкости. Закон Архимеда………………… 54
14 Уравнение неразрывности жидкости…………………… 55
15 Уравнение Бернулли и следствия из него……………… 56
16 Применение закона сохранения импульса к движущейся жидкости………………………………………………….… 60
17 Силы внутреннего трения (вязкость)………………..… 61
18 Ламинарное и турбулентное течение жидкости………. 63
19 Движение тел в жидкостях……………………………… 64

Примеры решения задач………………………………… 66
Вопросы для самопроверки…………………………… 68

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ
20 Понятия колебательного движения……………………... 69
21 Кинематика механических гармонических колебаний…. 70
22 Динамика механических и гармонических колебаний.
Упругие и квазиупругие силы……………………………... 73
23 Импульс и энергия гармонического осциллятора……….. 79
24 Затухающие собственные колебания…………………….. 80
25 Вынужденные колебания и резонанс……………………... 84
26 Сложение гармонических колебаний……………………... 86
Примеры решения задач………………………………..… 93
Вопросы для самопроверки………………………………… 94

МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ
27 Понятие о механических волнах………………………….. 96
28 Уравнение плоской гармонической волны. Волновое
уравнение …………………………………………………… 98
29 Скорость распространения волн в упругой среде………. 100
30 Энергия волны…………………………………………….. 101
31 Отражение волн. Стоячие волны……………………..…. 103
Примеры решения задач………………………………….. 105
Вопросы для самопроверки………………………………. 107

АКУСТИКА. ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ
32 Природа звука и его характеристики…………………….. 108
33 Эффект Доплера для звуковых волн…………………….. 109
Примеры решения задач………………………………… . 111
Вопросы для самопроверки………………………………. 112

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ……………... 113

Учебное пособие

БАРСУКОВ Владимир Иванович

ФИЗИКА

МЕХАНИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ЖИДКОСТИ И КОЛЕБАНИЙ

Конспект лекций

Издано в авторской редакции

Подписано к печати 01.10.2008
Формат 60x84/16 Бумага офсетная. Печать офсетная
Гарнитура Times New Roman Объем 7,5 усл.печ.л.
Тираж 100 экз. Заказ 756

Отпечатано с готового оригинал-макета
ЗАО «НПО ПК «Спектр»

ФИЗИКА

МЕХАНИКА
АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО
ТЕЛА, ЖИДКОСТИ
И КОЛЕБАНИЙ

• ТАМБОВ •