М. А. ИВАНОВСКИЙ, И. А. ГЛАЗКОВА

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ СИСТЕМ

Тамбов
Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2025

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный технический университет»

М. А. ИВАНОВСКИЙ, И. А. ГЛАЗКОВА

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ СИСТЕМ

Утверждено Ученым советом университета
в качестве учебного пособия для студентов 1 курса направления подготовки
27.04.03 «Системный анализ и управление» очной формы обучения

Учебное электронное издание

Тамбов
Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2025

УДК 00.004.78
ББК 39.972.53
И22

Рецензенты:

Доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой
«Мехатроника и технологические измерения» ФГБОУ ВО «ТГТУ»
П. В. Балабанов

Кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры
математического моделирования и информационных технологий
ФГБОУ ВО «ТГУ имени Г. Р. Державина»
И. А. Зауголков

Ивановский, М. А.
И22 Специальные разделы общей теории систем [Электронный ресурс] : учебное пособие / М. А. Ивановский, И. А. Глазкова. – Тамбов : Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2025. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Системные требования : ПК не ниже класса Pentium IV ; RAM 512 Mb ; необходимое место на HDD 2 Mb ; Windows 7/8/10/11 ; дисковод CD-ROM ; мышь. – Загл. с экрана.
ISBN 978-5-8265-2954-6

Содержит основные понятия теории сложных систем, их классификацию, элементы теории подобия, методы моделирования систем. Рассмотрены алгебраическая система, система как отображение абстрактных множеств, свойства сложных систем, системные константы, понятие системного анализа и синтеза, теоретико-множественное описание систем.

Предназначено для студентов 1 курса направления подготовки 27.04.03 «Системный анализ и управление» очной формы обучения.

УДК 00.004.78
ББК 39.972.53

ISBN 978-5-8265-2954-6

ВВЕДЕНИЕ

В пособии изложен теоретический материал с примерами реализации, что позволит студентам получить навыки в области системотехники сложных информационных систем.

В первой главе рассмотрены основные понятия теории сложных систем, их классификация, сложная система, алгебраическая система, система как отображение абстрактных множеств, свойства сложных систем, системные константы, понятие системного анализа и синтеза.

Во второй главе рассмотрены элементы теории подобия.

В третьей главе – теоретико-множественное описание систем.

Четвертая глава содержит основные методы моделирования систем.

Особое место занимает раздел, касающийся определения категорий, основных свойств категорий, определения функторов. Представляет интерес математическая модель информационной системы небольшого офиса.

Интересны физические величины, которые могут быть константами для систем – могут иметь статус автономных законов сохранения. Классическая таблица ди Бартини показывает связь между физическими величинами.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В настоящее время нет единства в определении понятия «система». В первых определениях в той или иной форме говорилось о том, что система – элементы и связи (отношения) между ними. Например, основоположник теории систем *Людвиг фон Берталанфи* определял систему как комплекс взаимодействующих элементов или как совокупность элементов, находящихся в определенных отношениях друг с другом и со средой.*Холл А*. определяет систему как множество предметов вместе со связями между предметами и между их признаками. Ведутся дискуссии, какой термин – «отношение» или «связь» – лучше употреблять.

Позднее в определениях системы появляется понятие цели. Так, в «Философском словаре» система определяется как «совокупность элементов, находящихся в отношениях и связях между собой определенным образом и образующих некоторое целостное единство».

В последнее время в определение понятия системы наряду с элементами, связями и их свойствами и целями начинают включать наблюдателя, хотя впервые на необходимость учета взаимодействия между исследователем и изучаемой системой указал один из основоположников кибернетики *У. Р. Эшби*.

Масарович М. и Такахара Я. в книге «Общая теория систем» считают, что система – «формальная взаимосвязь между наблюдаемыми признаками и свойствами».

Таким образом, в зависимости от количества учитываемых факторов и степени абстрактности определение понятия «система» можно представить в следующей символьной форме. Каждое определение обозначим буквой D (от лат. definitions) и порядковым номером, совпадающим с количеством учитываемых в определении факторов.

D1. Система есть нечто целое:

$$S = A\,(1, 0).$$

Это определение выражает факт существования и целостность. Двоичное суждение A (1, 0) отображает наличие или отсутствие этих качеств.

D2. Система есть организованное множество:

$$S = (\text{орг}, M),$$

где орг – оператор организации; M – множество.

D3. Система есть множество вещей, свойств и отношений:

$$S = (\{m\}, \{n\}, \{r\}),$$

где m – вещи; n – свойства; r – отношения.

D4. Система есть множество элементов, образующих структуру и обеспечивающих определенное поведение в условиях окружающей среды:

$$S = (\varepsilon, ST, BE, E),$$

где ε – элементы; ST – структура; BE – поведение; E – среда.

D5. Система есть множество входов, множество выходов, множество состояний, характеризуемых оператором переходов и операторов выходов:

$$S = (X, Y, Z, H, G),$$

где X – входы; Y – выходы; Z – состояния; H – оператор переходов; G – оператор выходов.

D6. Это шестичленное определение, как и последующие, трудно сформулировать в словах. Оно соответствует уровню биосистем и учитывает генетическое (родовое) начало GN, условия существования KD, обменные явления MB, развитие EV, функционирование FC и репродукцию (воспроизведения) RP:

$$S = (GN, KD, MB, EV, FC, RP).$$

D7. Это определение оперирует понятиями модели F, связи SC, пересчета R, самообучения FL, самоорганизации FO, проводимости связей CO и возбуждения моделей JN:

$$S = (F, SC, R, FL, FO, CO, JN).$$

Данное определение удобно при нейрокибернетических исследованиях.

D8. Если определение D5 дополнить фактором времени и функциональными связями, то получим определение системы, которым обычно оперируют в теории автоматического управления:

$$S = (T, X, Y, Z, \Omega, V, \eta, \varphi),$$

где T – время; X – входы; Y – выходы; Z – состояния; Ω – класс операторов на выходе; V – значения операторов на выходе; η – функциональная связь в уравнении $y(t_2) = \eta\,[x(t_1), z(t_1), t_2]$; φ – функциональная связь в уравнении $z(t_2) = \varphi\,[x\,(t_1), z\,(t_1), t_2]$.

D9. Для организационных систем удобно в определении системы учитывать следующее:

$$S = (PL, RO, RJ, EX, PR, DT, SV, RD, EF),$$

где PL – цели и планы; RO – внешние ресурсы; RJ – внутренние ресурсы; EX – исполнители; PR – процесс; DT – помехи; SV – контроль; RD – управление; EF – эффект.

Последовательность определений можно продолжить до DN (N = 9, 10, 11, ...), в котором учитывалось бы такое количество элементов, связей и действий в реальной системе, которое необходимо для решаемой задачи, для достижения поставленной цели. В качестве «рабочего» определения понятия системы в литературе по теории систем часто рассматривается следующее: *система – множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которое образует определенную целостность, единство*.

Наиболее полное понятие системы ввел Ю. А. Урманцев. Им разработан алгоритм построения абстрактной системы, под которой он понимал такую систему, по отношению к которой все остальные системы являются ее интерпретациями или ее реализациями.

Построение абстрактной системы сводится к:

– отбору из универсума $\boldsymbol{M}$ по некоторому единому основанию $A_i^{(0)}$, определенной совокупности объектов – $M_i^{(0)}$;

– наложению на последние определенных отношений единства $R_i^{(1)}$ и к образованию благодаря этому по закону $Z_i^{(1)}$ множества композиций $M_i^{(1)}$;

– такому изменению композиций множества $M_i^{(1)}$ и к такому выводу согласно отношениям $R_i^{(2)}$, $R_i^{(3)}$, ..., $R_i^{(s+1)}$ и законам композиции $Z_i^{(2)}$, $Z_i^{(3)}$, …, $Z_i^{(s+1)}$ множеств композиций $M_i^{(2)}$, $M_i^{(3)}$, …, $M_i^{(s+1)}$ при которых композиции всех этих множеств оказываются построенными из элементов одного и того же множества $M_i^{(0)}$;

– выводу всех возможных для данных $A_i^{(j)}$, $R_i^{(j)}$, $Z_i^{(j)}$ множества объектов M_i , или системы $S_i = \{M_i^{(0)}, M_i^{(1)}, ..., M_i^{(s+1)}\}$.

Тогда, система ***S*** – это ***i***-е множество композиций ***Mᵢ***, построенное по отношению ***Rᵢ*** закону композиции ***Zᵢ*** из первичных элементов множества $M_i^{(0)}$ выделенных по основанию $A_i^{(0)}$ из множества ***M***.

Отсюда следует, что в общем случае на системе ***Sᵢ*** реализуется не одно, а множество оснований $A_i^{(j)}$, отношений $R_i^{(j)}$ и законов композиции $Z_i^{(j)}$.

Когда множество законов композиции пустое, т.е. $\{Z_i\} = \varnothing$, то придем к определению системы ***Sᵢ***, основанному только на ***Aᵢ*** и ***Rᵢ*** (типа Месаровича и Уемова). Когда и множество отношений пустое, т.е. и $\{Z_i\} = \varnothing$ и $\{R_i\} = \varnothing$, придем к определению системы ***Sᵢ***, основанному на одном лишь основании $A_i^{(0)}$ (например, типа Холла и Фейджина).

Таким образом, приведенное определение системы содержит в виде частных случаев все определения системы, данные до сих пор. Конечно, формально систему можно задавать не только 1, 2, 3, но и ***n*** признаками.

В таком случае различают соответственно числу признаков системы 1-й, 2-й, ..., ***n***-й «степеней», т.е. $S_i^{(1)}$, $S_i^{(2)}$, …, $S_i^{(n)}$. Здесь «степени» (1), (2), ..., (***n***) информируют, во-первых, о роде абстрактной системы, во-вторых, о той величине, с какой определена системность на данном множестве объектов, в-третьих, о действительной значимости работ и тех авторов, которые имели дело с системами родов $S_i^{(1)}$ и $S_i^{(2)}$.

1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ

Любая классификация является некой условной моделью представления наших знаний о существующем в природе едином многообразии систем, которая всегда строится на основе классификационного принципа: целое делится на части по признакам отличия; части объединяются в целое по признакам сходства.

Суть классификационного принципа отражена на рис. 1.1, на котором приведен пример классификации систем, проведенной:

– по общему типу признаков – предметные и категориальные;

– по физической сущности признаков – технические, социальные и др.;

– по методическому содержанию признаков – произвольные и процедурные.

Рассмотрим один из возможных вариантов процедурной классификации систем, которую осуществим на основе следующих предположений:

1. Системы делятся на типы в соответствии с характером основных компонент: элементов и их отношений (в основе лежит описательное определение системы);

2. Каждый компонент системы оценивается по каждому из предлагаемых классификационных признаков (оснований);

3. В пространстве классификационных признаков получается полное множество, в котором описывается исследуемая система.

Пусть для оценки элементов системы и их отношений выбран или задан следующий набор классификационных оснований (рис. 1.2):

1) по количеству;
2) по состоянию;
3) по структуре;
4) по управлению.

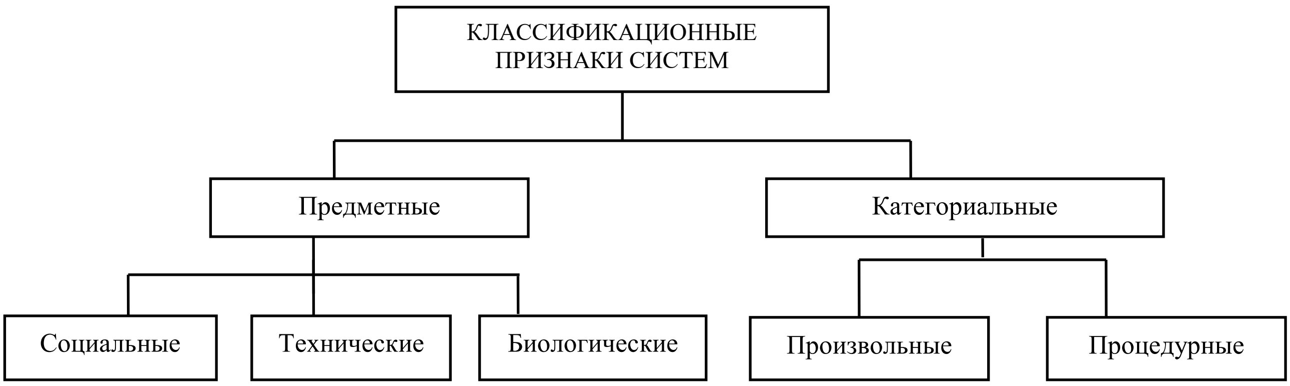

Рис. 1.1. Принципы классификации систем

Рис. 1.2

Категориально-процедурным признакам, которые в данном случае применялись для классификации систем, можно дать следующую характеристику:

– **по количеству** – если система состоит только из одного элемента и имеет одно отношение, то она является моносистемой, в противном случае – это полисистема;

– **по состоянию** – если система в течение определенного промежутка времени не изменяет своего состояния, то систему считают статической (или меняет его медленно – квазистатически), иначе – динамической;

– **по управлению** – если система управляется лишь извне (контур управления не входит в состав системы), то систему можно определить как разомкнутую по управлению; если же управление системой осуществляется за счет внутреннего контура управления или самоуправления, то систему считают замкнутой по управлению; если же система управляется как извне, так и с помощью внутренних управляющих контуров, то ее называют комбинированной по управлению;

– **по структуре** – если в системе хотя бы один элемент имеет взаимосвязи с внешней средой, то систему называют открытой, а в условиях отсутствии таковых – автономной (закрытой).

Очевидно, что вышеприведенное разделение систем выполнено только на одном классификационном уровне, которых может быть несколько. В частности, динамические системы, выделенные из соответствующего множества систем с учетом признака «по состоянию», далее могли бы быть проклассифицированы с использованием признака «по цели». Действительно, в зависимости от постоянства либо изменения цели, системы разделились бы на функционирующие и развивающиеся.

Кроме того, содержание выделенных классификационных признаков могло быть и другим. Например, если содержание признака «по структуре» было бы связано не с характеристикой особенностей внешнего взаимодействия систем, а с их сложностью, то системы разделились бы на простые и сложные. Кстати говоря, поскольку это касается классификации систем «по сложности», при определении ряда тех или иных классификационных признаков часто возникают неоднозначности в трактовке содержания используемых понятий.

В связи с этим, перечислим **виды характеристик сложности систем**, наиболее часто встречающихся в литературе – это:

1) многомерность, связанная с размерностью, потоками информации, числом связей и т.д.;

2) многосвязность, проявляющаяся в наличии вертикальных и горизонтальных или последовательных, параллельных, перекрестных и комбинированных связей;

3) многообразие, заключающееся в природе и составе элементов (люди, машины) и, как следствие, вытекающая из этого разнородность и важность циркулирующей информации;

4) многокритериальность, характеризующаяся в подавляющем числе случаев как наличием множества критериев, так и их противоречивостью;

5) многоцелевой характер назначения.

I. Классификация по управлению получается, если детализировать это классификационное основание используя ранее введенные признаки (рис. 1.3).

Первый уровень классификатора предназначается для разделения систем по принципу **организации управления**, т.е. поступающего извне системы или формируемого внутри, или осуществляемого частично извне и частично внутри.

Рис. 1.3

Второй уровень классификации рассматривает задачу продолжения классификации выделенных групп систем в зависимости от **уровня априорной (начальной)** неопределенности:

– во-первых, о траекториях, приводящих системы к заданным целям;

– во-вторых, о возможностях систем удерживать объекты на заданных траекториях и выполнять требуемые программы.

Классификацию систем по признаку уровня априорной неопределенности можно охарактеризовать следующим образом:

1. Наиболее простой случай имеет место, когда точно известны как траектория, так и возможности системы (нулевая неопределенность), в этой ситуации известно и «правильное управление». Примеры – обработка данных на ЭВМ; пользование телефоном-автоматом; управление станками с числовым программным управлением и т.д. Заметим, что в этом случае объекты управления являются полностью управляемыми и наблюдаемыми.

2. В тех же случаях, когда системный объект полностью управляем и наблюдаем, но подвержен действию возмущений (помех), приводящих к нарушению плановой траектории, очевидно, что «правильное управление»

не может быть задано априорно, поскольку возможности системы ограничены из-за отсутствия полной информации (или наличия априорной неопределенности) о действии помех.

При этом, как правило, управление в системе определяется в соответствии с рассогласованием между фактической и плановой траекториями на основе использования текущей (апостериорной) информации. Примеры – работа оператора по управлению технологическим процессом; функционирование автопилота летательного аппарата; действия диспетчера цеха по выполнению сменно-суточных заданий и т.д.

3. Более сложным по управлению является случай, когда уровень априорной неопределенности достаточно высок и связан как с влиянием неконтролируемых возмущений, так и с заранее неизвестным изменением параметров объекта, приводящим к существенному отклонению фактической траектории системы от заданной.

При этом управление обычно строится на основе применения методов адаптации или прогноза, с помощью которых обеспечивается достижение поставленных целей. Примеры – реформирование календарных планов работы производственных подразделений; самонастройка регуляторов автоматических систем управления; адаптация живых организмов к изменению условий жизни и т.д.

4. Наиболее сложный случай управления системой возникает тогда, когда уровень априорной неопределенности (в указанном выше смысле) высок настолько, что среди всех возможных значений параметров системы отсутствуют те, с помощью которых можно было бы обеспечить выполнение поставленной цели. Последнее означает, что ранее сформулированная цель для данной системы уже не достижима и речь идет о создании другой системы, за счет изменения структуры и функций предыдущей.

Примеры – проведение радикальной экономической и организационной реформы (перестройки) в народном хозяйстве; развитие гибких автоматизированных производств; процесс естественного отбора в природе и т.п.

В заключение, приведем еще несколько уровней классификации систем, выделяя на каждом из уровней, в качестве примера, отдельную группу систем.

Для определенности предмета классификации далее будем рассматривать только технические системы. В частности, если на втором уровне классификатора выбрать группу адаптивных систем управления, то, используя классификационный признак по способу организации управления, получим классификацию систем, показанную на рис. 1.4.

Самонастраивающиеся системы (СНС) характеризуются наличием специальных контуров самонастройки, с помощью которых оцениваются свойства системы и формируются такие управления, под действием которых система самопроизвольно приближается к определенному эталону (желаемой траектории, заданному плану и т.д.).

Обучающиеся системы управления (ОСУ) характеризуются наличием специальных процессов обучения, которые заключаются в постепенном накапливании, запоминании и анализе информации о поведении системы и изменении законов функционирования в зависимости от приобретаемого опыта.

Интеллектуальные адаптивные системы (ИАС) используют экспертные процедуры принятия решений для получения наилучшего в некотором смысле притяжения фактической траектории к заданной.

При этом основным признаком ИАС является разрыв традиционного контура самонастройки с помещением в точку разрыва интеллектуального блока (базы знаний).

В качестве примера можно отметить, что существует, по крайней мере, два пути рационального использования информации, накапливаемой в базе знаний ИАС в виде моделей идентификации (определения) текущих характеристик системы.

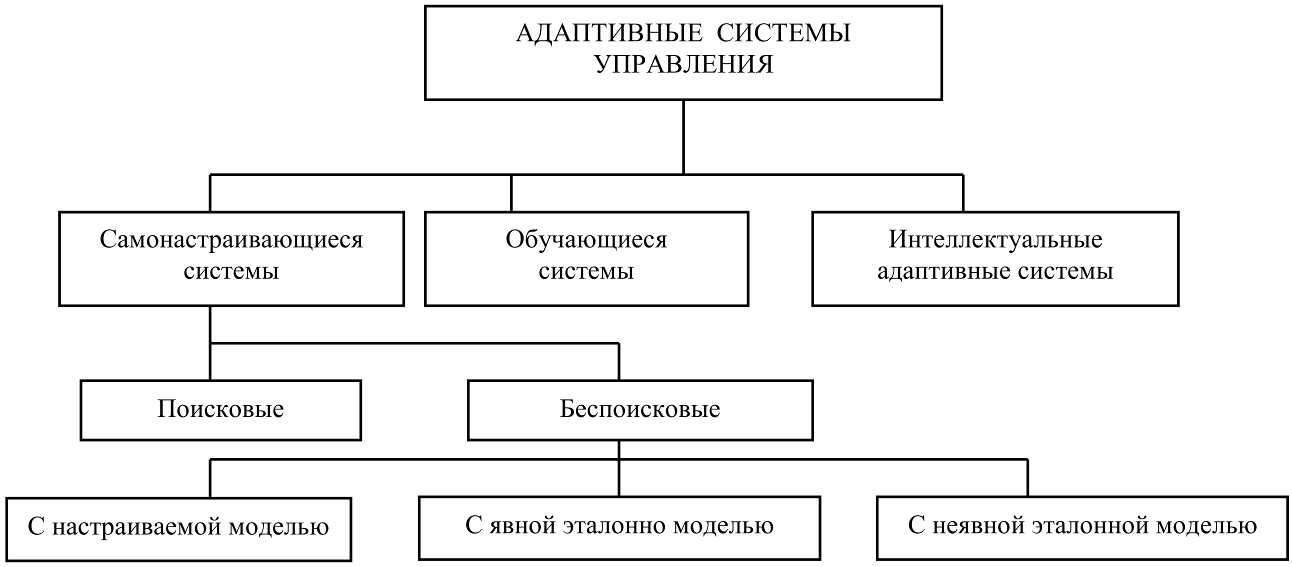

Рис. 1.4

С одной стороны, оперируя вектором притяжения, можно выбирать лучшую в некотором смысле модель базы знаний. С другой стороны, можно использовать традиционный контур идентификации только для пополнения моделей в базе знаний.

Если теперь рассмотреть классификацию, например, самонастраивающихся (СНС) систем, то их можно разделить на поисковые и беспоисковые. Такое разделение систем выполняется при использовании классификационного признака «по способу нахождения экстремума функционала качества», поскольку большинство контуров самонастройки создаются с целью обеспечения в системе заданного качества управления.

Действительно, в процессе работы системы значение функционала качества, отражающего некую содержательную характеристику рассогласования, изменяется и задача контура самонастройки, в этом случае, сводится к обеспечению экстремального (минимального или максимального) значения критерия.

В поисковых СНС поддержание экстремума критерия качества осуществляется с помощью пробных отклонений системы.

В беспоисковых системах (БСНС) используются аналитические способы определения экстремального значения критерия качества, имеющего вид функционала или функции от параметров и координат системы.

БСНС с настраиваемой моделью представляют собой системы управления с идентификатором (последовательным, параллельным, комбинированным), с помощью которого вначале определяются параметры системы и только затем формируется требуемое управление.

БСНС с явной эталонной моделью включают в себя специально организованный контур, который задает желаемое (эталонное) поведение системы в текущем времени (непрерывно или дискретно). При этом система вырабатывает необходимое для достижения цели управление без идентификации параметров, причем в любой из рассматриваемых моментов времени заданная, желаемая (эталонная) траектория движения системы известна.

БСНС с неявной моделью отличается от предыдущей БСНС тем, что реализация «эталона» осуществляется в виде некоторого уравнения, которое описывает желаемое поведение системы по окончанию процесса адаптации. Иначе говоря, система стремится к «эталону» как к некоторому ориентиру, который задан неявно, поскольку описывает желаемые свойства системы в установившемся режиме.

Классификация систем организационного управления представлена на рис. 1.5.

Централизованное управление означает сосредоточение всей власти в одном органе управления, децентрализация означает разделение полномочий между несколькими структурами, не находящимися между собой в прямом подчинении, при этом каждая из структур несет равную ответственность за результаты деятельности. Частичная децентрализация предполагает наделение ряда органов управления конкретными полномочиями, при этом в целом решение принимается на коллегиальном уровне.

Безконфликтное управление ориентировано на достижение **единства целей и интересов всех элементов системы,** в то время как **конфликтным** ситуациям свойственны некоторые **противоречия**.

Внутреннее управление предполагает наличие **единства объекта и системы управления**, в то время как **внешнее** реализуется через **управляющий орган**, находящийся вне системы. Комбинированное управление объединяет в себе рациональное сочетание обоих принципов.

Конфигурационными считаются решения, результатом которых является **модернизация либо изменение внутреннего устройства системы** (изменение структуры, перераспределение функций, отношений между элементами).

Маргинальными называются управляющие воздействия, направленные на **изменение отношений между системой и элементами внешней** среды.

Постсобытийное решение принимается в ситуациях, требующих корректировки деятельности при уже имеющихся отклонениях фактического и планового состояния системы, в то время как упреждающее управление ориентировано на недопущение этих ситуаций. Второй вид управления требует наличия соответствующих моделей прогнозирования и специальной подготовки персонала.

Рис. 1.5

Функциональное управление предполагает рациональное выполнение нормативных функций системы, определенных ее назначением, при этом **считаются постоянными и цели системы и ее структура управления**.

Программно-целевое управление характерно для развивающихся систем, когда под **определенные цели** формируется **множество функций по их достижению**, проектируется структура, определяется множество необходимых ресурсов и других условий.

1.3. СЛОЖНАЯ СИСТЕМА, АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, СИСТЕМА КАК ОТОБРАЖЕНИЕ АБСТРАКТНЫХ МНОЖЕСТВ

Общая теория систем – научное направление, связанное с разработкой совокупности методологических, конкретно-научных и прикладных проблем исследования сложных систем произвольной природы. Разработка соответствующего математического аппарата для формализации общей теории систем послужила развитию математической теории систем, называемой *абстрактной* теорией систем.

Общая теория систем, в основном, связана с изучением систем, которые в современной литературе называют сложными (или большими) системами.

Сложная система – составной объект, часть которого можно рассматривать как системы, связанные между собой заданными отношениями. Выделение из систем класса «сложные системы» является достаточно условным и появление понятия «сложная система» объясняется ростом сложности задач, возникающих перед исследователями.

Итак, будем называть системой объект любой природы (либо совокупность взаимодействующих объектов любой, в том числе различной природы), обладающий выраженным «системным» свойством (свойствами), т.е. свойством, которого не имеет ни одна из частей системы при любом способе членения и не выводимым из свойств частей. Части системы, имеющие аналогичные свойства, назовем *подсистемами*. Объединение нескольких систем, обладающих системным свойством, будем называть *подсистемой* или системой более высокого порядка (2-го, 3-го и т.д.).

Сложные системы обладают особыми свойствами. Назовем эти свойства.

Уникальность: каждая система этого класса не имеет полных аналогов поведения, во всяком случае аналоги настолько редки, что с их наличием в исследованиях и практике можно не считаться.

Слабопредсказуемость: никакое, сколь угодно подробное знание морфологии и функций элементов (подсистем) не позволяет определить функции объекта, никакое, сколь угодно подробное и точное знание поведения объекта на интервале $(-T, 0)$ не позволяет точно предсказать его поведение на интервале $(0, \tau)$.

Негентропийность или *целенаправленность*: система в состоянии (в определенных пределах) управлять своей энтропией (уменьшать ее, сохранять, тормозить увеличение) при случайном и неблагоприятном воздействии среды или(и) способна осуществлять поведение, преследующее достижение определенной цели.

Негентропия – (мера вероятности в данном состоянии) определяет «стремление» системы к основному процессу, способность устранять последствия внешних и внутренних случайных воздействий.

Целенаправленность – «стремление» к достижению цели – выражает именно эту тенденцию: сохранения и усиления основного процесса, ведущего к цели. Поэтому понятия «негентропийность» и «целенаправленность» – родственные.

В сложных системах основной процесс может быть скрыт от наблюдателя, поэтому выявить случайные отклонения непросто. Вычислить негентропию и использовать ее сложно, а иногда – невозможно. Здесь удобнее оперировать понятием целенаправленности.

Итак, сложные системы обладают свойствами уникальности, слабопредсказуемости и негентропийности (целенаправленности). Свойство уникальности является внешним по отношению к системе и влияет на отношение к ней исследователя (пользователя). Свойство негентропийности (целенаправленности) является внутренним, труднораспознаваемым и не всегда доступным пониманию исследователя, особенно относительно коротком (по сравнению с временем существования системы) интервале времени.

Математической базой исследования сложных систем является теория систем. В теории систем *большой системой* (*сложной*, *системой большого масштаба*, *Large Scale Systems*) *называют систему*, *если она состоит из большого числа взаимосвязанных и взаимодействующих между собой элементов и способна выполнять сложную функцию*.

Сложность системы. Пусть имеется совокупность из n элементов. Если они изолированы, не связаны между собой, то эти n элементов еще не являются системой. Для изучения этой совокупности достаточно провести не более чем n исследований. В общем случае в системе связь элемента А с элементом Б не эквивалентна связи элемента Б с элементом А, и поэтому необходимо рассматривать $n\ (n - 1)$ связей. Если характеризовать состояние каждой связи наличием или отсутствием в данный момент, то общее число состояний (для такого самого простого поведения) системы будет равно $2^{n\,(n-1)}$. Даже при небольших n для больших систем (БС) это фантастическое число. Например, пусть $n = 10$. Число связей $n\ (n - 1) = 90$. Число состояний $2^{90} \cong 1{,}3 \cdot 10^{27}$. Поэтому изучение БС путем непосредственного обследования ее состояний оказывается весьма громоздким. Следовательно, необходимо использовать ЭВМ и разрабатывать методы, позволяющие сократить число обследуемых состояний БС. Сокращение числа состояний БС – первый шаг в формальном описании систем.

Понятие системы как отображения абстрактных множеств. Алгебраическая система

Система определяется как отношение на языке теории множеств. Предполагаем, что задано семейство множеств

$$\overline{\overline{V}} = \{V_i : i \in I\},$$

где I – множество индексов, и определяем систему, заданную на $\overline{V}$, как некоторое собственное подмножество декартова произведения $\times\,\overline{V}$:

$$S \subset \times\,\{V_i : i \in I\}.$$

Все компоненты V_i, $i \in I$, декартова произведения $\times\, V_i$ называют объектами системы S. При этом, в основном, интересны системы с двумя объектами – входным объектом X и выходным объектом Y:

$$S \subset X \times Y. \tag{1.1}$$

Система определяется в терминах ее наблюдаемых свойств или, точнее говоря, в терминах взаимосвязей между этими свойствами, а не тем, что они на самом деле собою представляют (т.е. не с помощью физических, биологических, социальных или других явлений).

Определение системы как отношения вида (1.1) является предельно общим. Система определяется как некоторое множество (особого вида), например отношение. Она рассматривается как совокупность всех проявлений объекта исследования, а не как сам этот объект.

Чтобы построить теорию необходимо наделить систему как отношение некоторой дополнительной математической структурой. Это можно сделать двумя способами:

1) ввести дополнительную структуру для элементов объектов системы, например, рассматривать сам элемент $v_i \in V_i$ как некоторое множество с подходящей структурой;

2) ввести структуру непосредственно для самих объектов системы V_i, $i \in I$.

Первый путь приводит к понятию (абстрактных) временных систем, а второй – к понятию алгебраической системы.

Если элементы одного из объектов системы являются функциями, например, v: $T_v \to A_v$, то этот объект называют функциональным. В подобной ситуации особый интерес представляет случай, когда области и кообласти всех функций для данного объекта V одинаковы, т.е. каждая функция $v \in V$ является отображением T в A, v: T $\to$ A. В этом случае T называется *индексирующим множеством* для V, а A – *алфавитом объекта* V. При этом нет ограничений на мощность множества A. Если, кроме того, индексирующее множество линейно упорядочено, то его называют *множеством моментов времени*.

Функции, определенные на подобных множествах моментов времени, принято называть (*абстрактными*) *функциями времени*. Объект, элементами которого являются временные функции, называют временным объектом и, наконец, системы, определенные на временных объектах, – *временными системами*.

Особый интерес для исследования представляют системы, у которых элементы и входного, и выходного объектов определены на одном и том же множестве, $X \subseteq A^T$ и $Y \subseteq B^T$. В этом случае под системой мы понимаем отношение

$$S \subseteq A^T \times B^T.$$

Другой путь наделения объектов V системы математическими структурами состоит в определении на V одной или нескольких операций, относительно которых V становится алгеброй. В самом простом случае определяется бинарная операция R: $V \times V \to V$ и предполагается, что в V можно выделить такое подмножество W, зачастую конечное, что любой элемент $v \in V$ можно получить в результате применения операции R к элементам из W или к элементам, уже построенным из элементов множества W подобным образом. В этом случае W называют множеством производящих элементов или *алфавитом* объекта, его элементы – *символами,* а элементы объекта V – *словами*. И если R есть операция сочленения, то слова – это просто последовательности элементов алфавита W.

Алгебраический объект порождается целым семейством операций. Точнее говоря, объект V задается некоторым множеством элементов W, называемых примитивными, некоторым множеством операций $\overline{R} = \{R_1, \ldots, R_n\}$ и правилом, согласно которому V содержит, во-первых, все примитивные элементы, $W \subset V$, а кроме того, и все элементы, которые могут быть порождены из примитивных в результате многократного применения операций из $\overline{R}$.

1.4. СВОЙСТВА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ, СИСТЕМНЫЕ КОНСТАНТЫ. ПОНЯТИЕ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА И СИНТЕЗА

Рассмотрим принципы физичности, моделируемости, целенаправленности.

Физичность

- Постулат целостности

Система (как целое) обладает особым, системным свойством (свойствами), которого нет у подсистем (элементов) при любом способе декомпозиции.

Пусть система S имеет конечное множество системных свойств $Q = \{Q_i\}$, $i = \overline{1, n}$ (пусть все свойства Q_i имеют числовую меру). Пусть возможно μ вариантов (способов) декомпозиции (μ – конечно или бесконечно). При r-й ($r \in \mu$) декомпозиции в системе имеем подсистемы: $S = \{S_l\}$, $l = \overline{1, L_k}$. Каждая подсистема характеризуется конечным множеством свойств: $Q_l = \{Q_{lk}\}$, $k = \overline{1, K}$ (каждое свойство Q_{lk} имеет числовую меру). Множество свойств всех подсистем системы L_r при r-й декомпозиции $Q_r = \{Q_l\}$, $l = \overline{1, L_r}$.

Взаимодействуя, подсистемы порождают конечное множество системных процессов $F_r = \{F_{rj}\}$, $j = \overline{1, J}$; $F_{rj}(t) = \Phi_{rj}(Q_r, t)$. Системное свойство Q_i есть функционал ψ_i от протекающих в системе процессов: $Q_i = \psi_i (F_r(t), T)$.

Постулат: $(\forall r, S)$ $[\exists\, !\; Q(S) = \{Q_i(S)\};\; i = \overline{1, n};\; Q_i \cap Q_r = \varnothing]$.

Для всех $r \in \mu$ системы S существует единственное множество Q_i, зависящее только от S и не зависящее от r, такое, что в Q_i и в Q_r не существует ни одного общего элемента ($\forall$ – квантор общности; $\exists!$ – квантор существования и единственности).

Сущность постулата целостности – композиция и декомпозиция должны осуществляться в направлении генерирования информации более высокого качества, характеризующей систему.

Если при членении:

1) сумма частей равна целому, то система аддитивна относительно данного членения;
2) сумма частей больше целого – супераддитивна;
3) сумма частей меньше целого – субаддитивна.

- Постулат автономности

Сложные системы имеют автономную пространственно-временную метрику (группу преобразований) и внутрисистемные законы сохранения, определяемые физическим содержанием и устройством системы и не зависящие от внешней среды.

Обозначим:

расстояние и время в среде C – α, t, в системе S – α', t'.

Пары $\Delta = \{\alpha, t\}$ и $\Delta' = \{\alpha', t'\}$ – метрики среды и системы.

Скорости протекания аналогичных процессов соответственно:

$v_l \in V$ – в среде;

$v_l' \in V'$ – в системе, $l = \overline{1, m}$.

При $V' = V$ имеем $\Delta' = \Delta$.

Множество выводов взаимодействия в системе:

$$\nu = \{\nu_r\},\ r = \overline{1, R}.$$

Множество инвариантов системы:

$$\Gamma = \{\Gamma_j\},\ j = \overline{1, J}.$$

Множество величин, относительно которых действуют законы сохранения:

$$P = \{P_k\},\ k = \overline{1, K}.$$

Тогда:

$$(\forall S)\ (\exists\ (\Delta', \Gamma),$$

$$[\Delta' = \Delta'\ (S)] \vee [\Gamma_j\ (\Delta') = \Gamma_j\ (\Delta)] \vee [P(\nu) = \text{const}] \vee [\Gamma(\nu) = \text{const}].$$

Для всех сложных систем S существуют пространственно-временные метрики Δ' и множество инвариантов Γ такие, что пара $\{\Gamma, P\}$ определяется устройством системы и при любых возможных видах внутрисистемного взаимодействия она постоянна и не зависит от метрики.

Автономная метрика ограничивает возможные способы декомпозиции системы.

С точки зрения постулата целостности разнообразие декомпозиций помогает выявлению системных свойств.

С точки зрения постулата автономности – большинство декомпозиций отпадает. Единственная декомпозиция соответствует автономной метрике системы.

Инварианты определяются физическим содержанием, устройством и ресурсом системы, а не целевой функцией.

(Для производственного комплекса: количество продукции – не инвариант; энергоинформационный ресурс – инвариант).

Моделируемость

I. Постулат дополнительности

Сложная система во взаимодействии со средой может проявлять различные свойства в различных ситуациях, не совместимые ни в одной из них.

Обозначим:

$Q = \{Q_i\},\ i = \overline{1, n}$ – неупорядоченные множества свойств системы S.

C_k, $\{C_k\} = C$ – среда, с которой взаимодействует система S.

$\hat{Q}=\{\hat{Q}_i\},\ i=\overline{1,n}$ – множество оценок свойств Q.

q_{*i} – некоторое пороговое значение оценки i-го свойства, $\{q_{*i}\} = q_*$.

Δ – внешнее воздействие при $t = 0$ на систему, оцененное каким-либо образом.

Δ^* – некоторое пороговое значение этой оценки.

Тогда:

$$(\forall S\ \exists\ C_k, C_l)\ [Q^{(1)}(S, C_k) \cap Q^{(2)}(S, C_l) = \varnothing];$$

$$Q^{(1)} \subset Q,\ Q^{(2)} \subset Q,\ C_k \subset C,\ C_l \subset C.$$

II. Постулат действия

Реакция системы на внешнее воздействие имеет пороговый характер.

Пусть $t = 0$ – момент действия.

Тогда:

$$(\forall \mathrm{S}\ \exists\ \Delta^*)\ [\Delta < \Delta^*, (\forall i)\ (Q_i\ (t < 0) = Q; (t > 0));$$

$$\Delta > \Delta^*, (\forall i)\ (Q_i\ (t < 0) \neq Q_i\ (t > 0))].$$

До определенного уровня действие среды компенсируется усилием одних и ослаблением других процессов, а начиная с некоторого уровня, требуется «переустройство» системы.

III. Постулат неопределенности

Максимальная точность определения (измерения) свойств системы зависит от присущей данной системе области, внутри которой повышение точности определения (измерения) одного свойства влечет за собой снижение точности определения другого (других).

При $t > 0$ любое измерение связано с затратой времени, в течение которого измеряемый динамический процесс и связанные с ним процессы изменяются. Чем точнее измерение $x_i(t)$, тем сильнее изменится $x_i(t)$ и тем больше ошибка в его измерении. Поэтому для любой пары процессов x_i и x_j имеем $\delta_{xi}(\tau)$, $\delta_{xj}(\tau) > \delta_*$, где δ_* – порог.

Тогда:

$$(\forall S\, \exists q_*)\ (\forall i) \left[\left| \hat{Q}_i - Q_i \right| = q_i < q_{*i},\ \left| \hat{Q}_j - Q_j \right| > q_j\ (q_i),\ \frac{d\,q_j}{d\,q_i} < 0 \right].$$

Целенаправленность. Постулат выбора – следствие принципа целенаправленности.

Сложные системы (S_0 – системы) обладают областью выбора и способностью выбирать поведение, т.е. реакцию на внешние воздействия в зависимости от внутренних критериев целенаправленности; никакое априорное знание не позволяет ни подсистеме, ни самой системе однозначно предсказать этот выбор.

Способность выбора можно интерпретировать как физическую вероятность.

Случайный или неслучайный выбор из возможных решений определяется наложенными на систему ограничениями, внешними и внутренними флуктуациями.

Множество состояний S_0 – системы $\sigma = \{\sigma_i\}$, множество ситуаций (воздействий) $\Sigma = \{\Sigma_j\}$, множество реакций R.

1) $(\forall S_0)$ $(\exists\ \varphi)$ $[\varphi\ (\sigma_i, \Sigma_j) \to r]$, где r – подмножество R ($r \in R$) с мощностью больше единицы, а φ – оператор отображения (отображение есть точка в подмножестве, неотделимая от других);

2) $(\forall S_0)$ $(\exists\ L\ (r))$ $(r_1 > r_2 > \ldots > r_i > \ldots)$, $r_i \in R$, где L – упорядочивающее правило;

3) Существует мера в упорядочении (мера, с помощью которой можно оценить степень предпочтительности) $\mu\ (r)$. При этом выполнены следующие условия:

а) $\mu\ (r) \geq 0$,

б) $\mu\ (r)$ – аддитивна, т.е. для любого конечного разложения $r = Ur_i$ выполнено равенство $\mu\ (r) = \Sigma\ \mu\ (r_i)$.

Постулат выбора позволяет сложной системе, в соответствие с ее целенаправленностью, использовать редкие благоприятные события, возникающие во взаимодействии со средой, блокируя остальные (неблагоприятные) события и процессы.

Принципы физичности, моделируемости, целенаправленности достаточно полно отражают методологию системного подхода.

Принцип физичности предписывает причинно-следственные связи объектам любой природы и системам, построенным из этих объектов.

Формализация связей и определяемых ими автономных законов позволяет выразить на одном языке многоязычное описание объектов (подсистем). Если автономных законов нет, совокупность объектов не образует системы, тогда это хаотический набор компонентов.

Принцип моделируемости обеспечивает возможность использования в системотехнике упрощенных моделей, отражающих только те грани сущности сложной системы, которые интересуют исследователя. Выявление новых свойств и сущностей не обязательно должно сопровождаться построением обобщающих моделей, а может ограничиваться наращиванием библиотеки упрощенных моделей. Отражение сложной системы в целом обеспечивается взаимодействием упрощенных моделей.

Системные константы

Размерность любой физически измеримой величины может быть выражена в виде:

$$[L^{\lambda}\, T^{\tau}],\ |\ \lambda + \tau\ | \leq 3 \text{ (трехмерный мир)},$$

где λ, τ – целые числа.

Классическая таблица ди Бартини показывает связь между физическими величинами (табл. 2.1).

Любые системы размерностей $[q]$, применяемые или мыслимые, могут быть сформированы из кинематической системы размерностей $[L^{\lambda}\, T^{\tau}]$ путем введения дополнительных единиц, обоснованных экспериментально.

В систему СИ дополнительно введены три величины:

$[I] = [L^{3/2}\, M^{1/2}\, T^{-2}]$ – A (ампер),

$[J] = [L^{2}\, M^{1}\, T^{-3}]$ – Кд (кандела)

$[\Theta] = K$ (кельвин)

$[q] = [L^{\alpha}\, M^{\beta}\, T^{\gamma}\, I^{\delta}\, J^{\xi}\, \Theta^{\varepsilon}]$.

Для сложных систем целесообразна система размерностей: $[a^{\alpha}\ \ b^{\beta}]$, где $a = [L^{2}\, T^{-1}]$, $b = [L^{7}\, T^{-5}]$.

Пусть измеряются только две величины: b, t. Введем базовую переменную $v = dl\ dt$ (скорость) и построим формальную структуру путем последовательного интегрирования основной величины по базовой переменной v. Результаты представлены в табл. 1.3.

Таблица 1.1

L^{λ} T^{τ}	L^{-2}	L^{-1}	L^{0}	L^{1}	L^{2}	L^{3}	L^{4}
T^{-3}			Измерение углового ускорения	Плотность тока	Напряженность электромагнитного поля. Градиент	Ток. Массовый расход	Скорость смещения заряда. Импульс
T^{-2}		Изменение объемной плотности	Массовая плотность. Угловое ускорение	Ускорение	Разность потенциалов	Масса. Количество магнетизма. Количество электричества	Магнитный момент
T^{-1}	$L^{-2}T^{-1}$	$L^{-1}T^{-1}$	Частота	Скорость	Скорость изменения поверхности	Объемный расход	Скорость смещения объема
T^{0}	$L^{-2}T^{0}$	Изменение проводимости	Безразмерные константы	Длина Емкость Самоиндукция	Поверхность	Пространственный объем	
T^{1}	Изменение магнитной проницаемости	Проводимость	Период	Длительность расстояния	$L^{2}T^{1}$		
T^{2}	Магнитная проницаемость	$L^{-1}T^{2}$	Поверхность времени	$L^{1}T^{2}$			
T^{3}	$L^{-2}T^{3}$	$L^{-1}T^{3}$	Объем времени				

В таблице 1.2 приведены физические величины, которые могут быть константами для систем. Эти величины могут получить статус автономных законов сохранения.

Таблица 1.2

Физическая величина	Обозначение, размерность	Пример системы, для которой величина является инвариантом
Длина	l, м	Транспортная сеть, сеть связи
Скорость	$v = \dot{l}$, м/с	Приращение транспортной сети и сети связи в единицу времени, скорость перевозок, выпуск линейной продукции
Ускорение	$w = \ddot{l}$, м/с^2	Повышение производительности строительства транспортных сетей, сетей связи и выпуска
Площадь	S, м^2	Землеустройство, производственная площадь
Скорость изменения площади	$\dot{S}$, м^2/с	Закон Кеплера, производство изоляционных материалов, строительство производственных площадей
Ускорение изменения площади	$\ddot{S}$, м^2/с^2	Повышение производительности отраслей, выпускающих продукцию, измеряемую площадью поверхности
Объем	V, м^3	Емкость жидких и сыпучих продуктов
Скорость изменения объема	$\dot{V}$, м^3/с	Производство емкостей, сублимация, рост живых существ
Масса	M, кг	Физический закон сохранения
Скорость изменения массы	$\dot{M}$, кг / с	Производство
Ускорение изменения массы	$\ddot{M}$, кг/с^2	Прирост производства
Импульс, количество движения	$p = M\,v$, кг·м/с	Физический закон сохранения
Сила	$f = M\,w$, H	Движитель (тяга)
Скорость изменения силы	$\dot{f}$, Н/с	Гравитационная система, диагностические системы
Ускорение изменения силы	$\ddot{f}$, Н/с^2	Транспортное средство, взрыв
Действие	D, Дж·с	Взаимодействие между элементарными частицами, энергетический ресурс (в том числе живых существ)
Энергия, работа	E, Дж	Физический закон сохранения
Мощность	P, Вт	Энергосистемы
Скорость изменения мощности (параметр Герца)	$\dot{P}$, Вт/с	Развитие энергосистем
Ускорение изменения мощности*	$\ddot{P}$, Вт/с^2	Темп развития эргатической системы
Произведение энергии на длину*	$K = E\,l$, Дж·м	Энергоресурс транспортной сети
Произведение мощности на длину*	$F = P\,l$, Вт·м	Транспортная сеть, линия энергопередачи
Скорость передачи мощности*	$\dot{F}$, Вт·м/с	Линия энергопередачи
Ускорение передачи мощности*	$\ddot{F}$, Вт·м/с^2	Развитие линии энергопередач

* – физическая сущность величин требует дополнительного исследования

Таблица 1.3

Наименование и определение физического инварианта	Размерность	Наименование и определение физического инварианта	Размерность	Наименование и определение физического инварианта	Размерность
$L = \int_0^T l\,dt$	$[L^1 T^1]$	Расстояние l	$[L^1 T^1]$	Скорость $v = \dot{l}$	$[L^1 T^{-1}]$
$K = \int_0^T k\,dt$	$[L^2 T^0]$	$k = \int_0^v l\,dv$	$[L^2 T^{-1}]$	$h = \dot{k}$	$[L^2 T^{-2}]$
$M = \int_0^T m\,dt$	$[L^3 T^{-1}]$	Масса $m = \int_0^v k\,dv$	$[L^3 T^{-2}]$	$n = \dot{m}$	$[L^3 T^{-3}]$
$N = \int_0^T p\,dt$	$[L^4 T^{-2}]$	Импульс $p = \int_0^v m\,dv$	$[L^4 T^{-3}]$	Сила $f = \dot{p}$	$[L^4 T^{-4}]$
Действие $D = \int_0^T E\,dt$	$[L^5 T^{-3}]$	Энергия $E = \int_0^v p\,dv$	$[L^5 T^{-4}]$	Мощность $P = \dot{E}$	$[L^5 T^{-5}]$
$H = \int_0^T F\,dt$	$[L^6 T^{-4}]$	Энергоинформативность $F = \int_0^v E\,dv$	$[L^6 T^{-5}]$	$U = \dot{F}$	$[L^6 T^{-6}]$
				Время t	$[L^0 T^1]$
				Пропускная способность $\eta = 1/t$	$[L^0 T^{-1}]$

Относя переменную не к механической скорости, а к скорости изменения процесса, расстояние – к метрике системы, а время – к локальному времени, получим иные формальные структуры.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

2.1. ВИДЫ ПОДОБИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ

Общая задача теории подобия и теории моделирования – это выработка методологии, направленной на упорядочение получения и обработки информации об объектах, существующих вне нашего сознания и взаимодействующих между собой и внешней средой.

Аналогией называют суждение о каком-либо частном сходстве двух объектов, позволяющее на основании сходства рассматриваемых объектов в каком-либо отношении сделать вывод об их сходстве в других отношениях.

В практике исследований следует рассматривать аналогию как разновидность подобия, а реализацию аналогии – в качестве метода моделирования.

Модель – это естественный или искусственный объект, находящийся в соответствии с изучаемым объектом (или точнее с какой-либо из его сторон).

Моделирование означает осуществление каким-либо способом отображения или воспроизведения действительности для изучения имеющихся в ней объективных закономерностей.

Виды моделирования

1. Моделирование – познавательный процесс, содержащий переработку информации, поступающей из внешнего мира, о происходящих явлениях. В результате появляется сумма образов в сознании. Математическая запись, составленная на основании суммы образов и содержащая описание динамики закономерностей, и есть модель.

2. Моделирование – создание системы – системы–модели, имеющей определенное сходство с системой–оригиналом.

В первом случае моделирование носит мысленный характер, во втором – материальный.

Теория подобия применяется:

а) при аналитическом отыскании зависимостей и решении конкретных задач;

б) при обработке результатов экспериментальных исследований, когда результаты представлены в обобщенных зависимостях;

в) при создании моделей, воспроизводящих явления в оригиналах, больших по величине, более сложных по структуре и более дорогих, чем модели.

Основным свойством и характерным признаком модели является то, что она способна замещать объект на определенных этапах и давать при исследовании информацию о нем.

Моделирование применяется для решения двух групп задач:

1. Обучение (применение моделей и моделирования для уяснения физических законов, рассмотрения действия новых разработок, тренировки персонала).

2. Исследование:

а) прямые задачи анализа. Исследуемая система задается параметрами своих элементов и параметрами исходного режима, структурой или уравнениями. Требуется определить реакцию системы на действующие силы;

б) обратные задачи анализа. По известной реакции системы требуется найти силы (возмущения), заставившие рассматриваемую систему прийти к данному состоянию и вызвавшие данную реакцию;

в) задачи синтеза, иногда называемые инверсными задачами. Требуют нахождения таких параметров, при которых процессы в системе будут иметь желательный по каким-либо соображениям характер;

г) индуктивные задачи. Решение нацелено на проверку гипотез, уточнение уравнений процессов, выяснение свойств элементов.

Абсолютное подобие может мыслиться только отвлеченно и не может быть реализовано, так как это означало бы тождество, т.е. замену одного объекта или явления другим, точно таким же. Практические цели требуют применения моделирования в случае тех явлений или входящих в эти явления процессов, которые существенны в данном исследовании, при данной постановке задачи. Таким образом, ***модель – это неполная копия объекта***.

Подобие и моделирование, которые представляют практический интерес, могут быть разделены на три (А, Б, В) способа (рис. 4.1).

А. Способ полного моделирования и полного подобия, при котором обеспечено подобие во времени и пространстве. Иначе говоря, процессы, характеризующие изучаемые явления, подобно изменяются во времени и в пространстве. Полное подобие и соответственно полное моделирование математически характеризуются следующим соотношением параметров модели (x) и оригинала (y):

$$x_j = m_j y_j,$$

где m_j – масштабный коэффициент, который обычно является постоянной величиной, но в частном случае может быть и переменной, зависящей от режима, времени или координат пространства; y_j – параметры системы или ее режима:

$$y_j = \varphi\ (y_1, y_2, \ldots, y_{k-j}, l_x, l_y, l_z, t),$$

причем l_x, l_y, l_z – геометрические размеры; t – время.

Б. Способ неполного (частичного, локального, функционального) моделирования и, соответственно, подобия, при которых протекание всех основных процессов, характеризующих изучаемое явление, подобно только частично (или только во времени, или только в пространстве). В первом случае

$$y_j = \varphi\ (y_1, y_2,\ldots, y_{k-j}, t),$$

а во втором случае

$$y_j = \varphi\ (y_1, y_2, \ldots, y_{k-j}, l_x, l_y, l_z).$$

При функциональном моделировании подобие устанавливается между некоторыми функциями или обобщенными характеристиками, которые в модели и оригинале имеют определенное соответствие.

В. Способ приближенного моделирования, связанный с приближенным подобием, при котором некоторые факторы, имеющие незначительное влияние на протекание изучаемого (в данной постановке задачи) процесса, моделируется приближенно или совсем не моделируется. Между некоторыми параметрами систем или некоторыми параметрами их режимов при этом может не существовать соотношений подобия и $x_j \neq m_j\ y_j$ или $x_j \approx m_j\ y_j$. Это заведомо вызывает погрешность, которая должна быть оценена тем или иным способом.

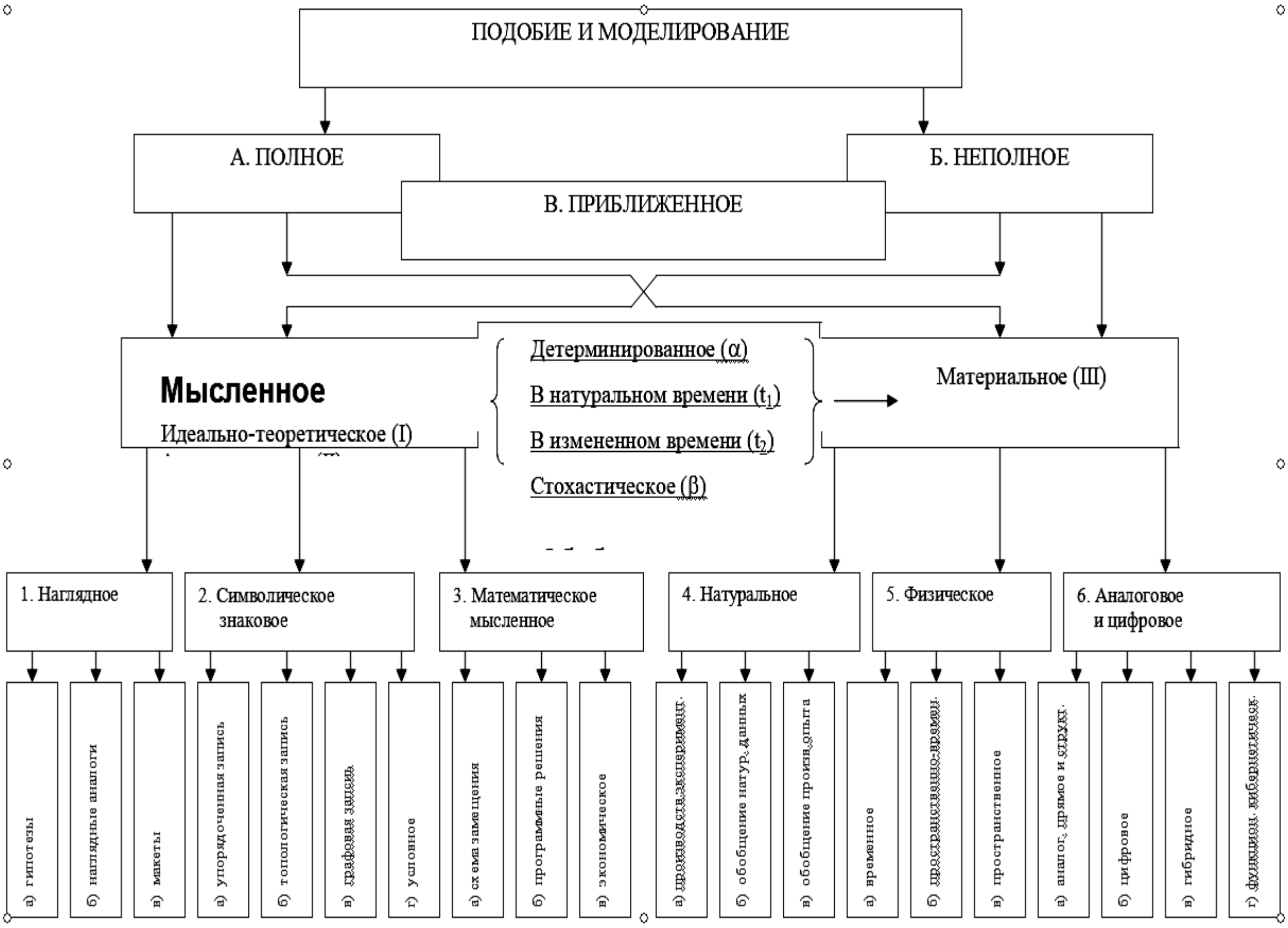

Рис. 2.1

Приближенное моделирование может быть как полным, так и неполным. Для приближенного моделирования характерно не то, что оно не дает абсолютного подобия оригиналу (его не дает ни один вид моделирования) а то, что при его реализации имеются сознательно допустимые и оцениваемые погрешности, связанные как с упрощением физических представлений, так и с отклонением значений параметров системы (рис. 2.1).

Каждый из рассмотренных трех способов подобия и моделирования может быть разделен на три вида: I – мысленное, идеально-теоретическое, моделирование; II – мысленное аналитическое моделирование, использующее ту или иную аппаратуру для подтверждения своих отвлеченных представлений. Это могут быть расчеты на ЦВМ, аналоги, иллюстрирующие мысленно созданные положения; III – материальное, реально-практическое, или вещественно-агрегатное, моделирование. Вид моделирования II является промежуточным между I и III видами.

2.2. РАЗМЕРНОСТИ ВЕЛИЧИН. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ. ТЕОРЕМЫ ПОДОБИЯ

Подобию во всех его видах свойственны некоторые общие закономерности, которые принято называть первой и второй теоремами подобия и дополнительными положениями к ним. Дополнительные положения необходимы при исследовании подобия явлений в сложных, нелинейных, в том или ином смысле неоднородных или стохастических системах. Обе теоремы устанавливают соотношения между параметрами подобных явлений, не указывая способов реализации подобия при построении моделей. Ответ на последний вопрос дает третья теорема, или обратная теорема. Она определяет условия, необходимые и достаточные для того, чтобы явления оказались подобными, требуя подобия условий однозначности и такого подбора параметров, при которых критерии подобия, содержащие начальные и граничные условия, становятся одинаковыми.

А. *Первая теорема*

Явления, подобные в том или ином смысле (физически, математически, кибернетически и т.д.), имеют некоторые одинаковые сочетания параметров, называемые критериями подобия. Рассмотрим различные варианты и условия применения первой теоремы. Допустим, что изучаются два процесса, описываемые уравнениями, члены которых являются однородными функциями параметров или их производных:

для первого процесса

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = \sum_1^n \varphi_j = 0, \tag{2.1}$$

где $$\varphi_j = f(P_1, P_2, \ldots, P_m); \tag{2.2}$$

для второго процесса

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_n = \sum_1^n \Phi_j = 0, \tag{2.3}$$

где $$\Phi_j = f(R_1, R_2, \ldots, R_m). \tag{2.4}$$

Уравнения (2.1) и (2.3) можно привести к безразмерному виду делением на n-й член:

$$1+\frac{\varphi_1}{\varphi_n}+\frac{\varphi_2}{\varphi_n}+\cdots+\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n}=\sum_1^{n-1}\frac{\varphi_j}{\varphi_n}=0; \qquad (2.1,\ a)$$

$$1+\frac{\Phi_1}{\Phi_n}+\frac{\Phi_2}{\Phi_n}+\cdots+\frac{\Phi_{n-1}}{\Phi_n}=\sum_1^{n-1}\frac{\Phi_j}{\Phi_n}=0. \qquad (2.3,\ a)$$

В уравнениях (2.2) и (2.4) P_1 и R_1, P_2 и R_2, …, P_m и R_m – сходные параметры, причем, поскольку процессы подобны, то

$$P_1 = m_1R_1;\ P_2 = \mathrm{v}m_2R_2,\ \ldots,\ P_m = m_m R_m. \qquad (2.5)$$

После подстановки этих соотношений в уравнение (2.2) можно вследствие однородности функции φ_j вывести масштабы m_1, m_2, …, m_m в соответствующих степенях за знак функции в виде общего множителя:

$$\varphi_j = f(P_1, \ldots, P_m) = f(m_1R_1, \ldots, m_m R_m) = N_j f(R_1, \ldots, R_m) = N_j\Phi_j, \qquad (2.6)$$

или $$\varphi_j = N_j\Phi_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2.7)$$

При подстановке (2.7) в уравнение (2.1, *а*) получим

$$1+\frac{N_1}{N_n}\frac{\Phi_1}{\Phi_n}+\frac{N_2}{N_n}\frac{\Phi_2}{\Phi_n}+\ldots+\frac{N_{n-1}}{N_n}\frac{\Phi_{n-1}}{\Phi_n}=0. \qquad (2.1б)$$

Напомним, что вследствие однородности уравнения (2.1) общие множители N_j для каждого члена φ_j равны, т.е.

$$N_1 = N_2 = \ldots = N_n; \quad N_1/N_n = N_2/N_n = \ldots = N_{n-1}/N_n = 1. \qquad (2.8)$$

Следовательно, уравнения (2.1, *б*) и (2.3, *а*) оказываются тождественными. Это означает, что между соответствующими членами уравнений (2.1, *а*) и (2.3, *а*) существуют соотношения:

$$\varphi_1/\varphi_n = \Phi_1/\Phi_n;\ \varphi_2/\varphi_n = \Phi_2/\Phi_n;\ \ldots;\ \varphi_{n-1}/\varphi_n = \Phi_{n-1}/\Phi_n. \qquad (2.9)$$

Обобщая полученные результаты на s подобных процессах, получаем

$$\varphi_j^{(1)}/\varphi_n^{(1)} = \varphi_j^{(2)}/\varphi_n^{(2)} = \ldots = \varphi_j^{(s)}/\varphi_n^{(s)} = \mathrm{idem},\ s = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2.10)$$

где idem означает: «соответственно одинаково для всех рассматриваемых процессов».

Критерии подобия. Выявленные выше отношения членов уравнения, представляющие собой безразмерные комбинации параметров, численно одинаковые для всех подобных процессов, называются *критериями подобия*.

Обозначая критерии подобия буквой π, можно дать краткую формулировку прямой, или первой, теоремы: у всех подобных явлений π = idem. Это достаточное условие, выявляющее существование подобия. Описанное выше выявление критериев подобия, содержащее операции (2.7) – (2.10), называют нахождением критериев подобия путем анализа уравнений процесса.

Преобразование критериев. Практически важное свойство критериев подобия заключается в следующем: *критерии подобия любого явления могут преобразовываться в критерии другой формы, получаемые за счет операций перемножения или деления критериев, возведения их в степень или умножения на любой постоянный коэффициент k*. В самом деле, если какие-либо значения π_k = idem, π_{k+j} = i_{dem} являются критериями, то в соответствии с определением подобия

$$\pi_k\,\pi_{k+j} = \text{idem};\ \pi_k/\pi_{k+j} = \text{idem};\quad 1/\pi_k = \text{idem};\ k\pi_\text{k} = \text{idem}.$$

Если уравнения (2.1), (2.3) характеризуют протекание процесса во времени и в пространстве с доступной и необходимой для данного исследования полнотой, то в этом случае система критериев (2.10) достаточна для полного подобия. Если уравнения (2.1), (2.3) характеризуют протекание процесса только во времени или только в пространстве, то уравнения (2.10) являются критериями неполного подобия. Если уравнения (2.1), (2.3), прежде чем находить из них критерии, упростить (отбросить какие-то заведомо влияющие факторы, допустить отклонение параметров системы и т.д.), то найденные из этих уравнений критерии (2.10) будут критериями приближенного подобия.

Подобие процессов, описываемых уравнениями, содержащими неоднородные функции (трансцендентныне, сложные и т.д.).

Для таких условий масштабный коэффициент нельзя вынести за знак функций и преобразование, аналогичное (2.6), оказывается невозможным. Если при этом подобие процессов существует, то аргументы неоднородных функций должны быть равны и являться также критериями подобия.

Например, для

$$\varphi_j = K\sin axy \text{ и } \Phi_j = K\sin AXY$$

подобие процессов требует равенства

$$axy = AXY = \text{idem}.$$

Если в аргумент неоднородной функции входит сумма, например, $a + x + y$ или $A + X + Y$, то все слагаемые должны быть соответственно одинаковы.

Подобие процессов, описываемых интегральными и дифференциальными уравнениями.

Соотношения пропорциональности, используемые при установлении подобия, справедливы на любых (малых и больших) участках изменения исследуемых функций. Поэтому, если в членах исходных уравнений (2.1) и (2.3) содержатся символы дифференцирования и интегрирования, то (поскольку они не имеют размерности) при нахождении условий подобия их можно опустить:

$$\frac{d^n(m_x x)}{d(m_t t)^n} = \frac{m_x d^n x}{m_t^n dt}; \quad \int m_x x dx = m_x \int x dx$$

или

$$\int m_x x d(m_y y) = m_x m_y \int x dy.$$

Отсюда появляется правило интегральных аналогов, согласно которому при установлении условий подобия в уравнениях, используемых для выявления подобия, можно заменить d^n/dx^n на $1/x^n$, $\int x dx$ на xy, т.е. отбросить все символы дифференцирования и интегрирования.

В соответствии с этим при нахождении критериев подобия символ $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, где x, y, z – пространственные координаты, при условии соблюдения геометрического подобия может быть заменен на l/l^2, где l – характерный размер. Символ grad соответственно заменяется на l/l, div grad на l/l^2 и т.д.

Б. *Вторая теорема*

Эта теорема, известная также под названием π-теоремы, гласит: *всякое полное уравнение физического процесса, записанное в определенной системе единиц, может быть представлено зависимостью между критериями подобия,* т.е. уравнением, связывающим безразмерные величины, полученные из участвующих в процессе параметров.

Проводимый далее анализ и рассмотренные примеры показывают возможности π-теоремы. Она позволяет произвести своего рода замену переменных, сократив их число с m размерных величин до $m - k$ безразмерных величин, и тем самым перейти к записи уравнений процессов в критериальной форме. При этом весьма упрощается обработка аналитических и экспериментальных исследований, так как связи между безразмерными π-критериями подобия, как правило, выявляются проще, чем связи между обычными именованными величинами.

Но не только этим определяется значение π-теоремы: весьма существенно, что согласно ее выводам переход к безразмерным соотношениям (связывающим критерии) позволяет распространять результаты аналитического или экспериментального исследования, проведенного применительно к конкретному явлению, на целый ряд подобных явлений. При этом можно находить критериальные соотношения, не имея математического описания процесса в виде уравнения, а зная только все участвующие в процессе величины и их размерности.

Пусть существующие связи между параметрами процесса и параметрами элементов системы, в которой этот процесс протекает, можно представить так:

$$f\,(P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_k, \ldots, P_s, \ldots, P_m) = 0. \tag{2.11}$$

Для удобства последующих выкладок будем считать, что

$$1 \le i \le k, \quad k + 1 \le s \le m.$$

Зависимость (2.11), до тех пор пока она учитывает все связи между входящими в нее величинами, т.е. является полной зависимостью, не может изменяться при любом изменении единиц измерения физических величин. Это очевидное правило нарушается, если уравнение отражает не все зависимости между переменными, а только некоторые частные зависимости, справедливые при определенных условиях. Так, если часть величин в уравнении (2.11) считать постоянными, то, определив их величину применительно к какому-либо частному случаю, можно записать уравнение в виде

$$f\,(P_1, P_2, P_3, K) = 0, \text{ где } K = \text{const}.$$

Это уравнение будет неполным, зависящим от системы единиц, но переходящим в полное, если раскрыть функциональную связь:

$$K = f_1\,(P_4, \ldots, P_m).$$

В качестве простейшего примера можно привести известное уравнение Гей-Люссака, связывающее объем газа V и температуру θ:

$$V = K\theta.$$

Это уравнение будет неполным, зависящим от системы единиц, если под K понимать некоторую постоянную численную величину. Однако оно перейдет в полное уравнение, если, раскрыв зависимость K от давления p и универсальной газовой постоянной R, записать

$$V = (R/p)\,\theta.$$

Не вдаваясь в подробности многочисленных дискуссий по этому вопросу, укажем, что любое неполное уравнение становится полным, если рассматривать коэффициент пропорциональности как величину, имеющую размерность и изменяющуюся при изменении единиц измерения. Все полные уравнения удовлетворяют принципу однородности, требующему, чтобы все члены φ_j физического уравнения имели одинаковую размерность.

π-теорема касается только процессов, отражаемых полными уравнениями и записанных в определенной системе единиц.

Уравнение (2.11) полное, а следовательно, и однородное, поэтому все входящие в него параметры можно выразить в относительных единицах, т.е. в долях от некоторых выбранных величин P_{01}, P_{02}, …, P_{0m}, имеющих соответственно те же размерности, что и P_1, P_2, …, P_m. Тогда (2.11) можно записать следующим образом:

$$f\,(P_1/P_{01}, P_2/P_{02}, \ldots, P_i/P_{0i}, \ldots, P_k/P_{0k}, P_{k+1}/P_{0k+1}, \ldots, P_s/P_{0s}, \ldots, P_m/P_{0m}) = 0. \quad (2.12)$$

Однако не все величины P_{01}, P_{02}, …, P_{0m} можно выбирать произвольно. Например, выбрав величины, измеряющие ток и напряжение, уже нельзя произвольно выбрать величину, измеряющую сопротивление или мощность. Можно установить, какое количество величин P_{01}, …, P_{0k} выбирается из общего множества величин P_{01}, …, P_{0m}, и найти способ выбора остальных, рассмотрев формулы размерностей всех величин, входящих в соотношение (2.12).

Каждую величину, входящую в уравнение (2.12), можно представить в виде произведения ее числового значения $\{P\}$ на единицу измерения $[p]$ данной величины.

$$P = \{P\}[p].$$

Пусть в выбранной системе единиц имеется $k = q$ основных единиц измерения. Обозначая их через a, b, c, …, q запишем выражения единиц измерения всех участвующих величин, т.е. их формулы размерностей:

$$\left.\begin{aligned}
&[p_1] = [a^{\alpha 1} b^{\beta 1} \dots q^{\xi 1}] = [p_{01}];\\
&[p_2] = [a^{\alpha 2} b^{\beta 2} \dots q^{\xi 2}] = [p_{02}];\\
&[p_i] = [a^{\alpha i} b^{\beta i} \dots q^{\xi i}] = [p_{0i}];\\
&[p_k] = [a^{\alpha k} b^{\beta k} \dots q^{\xi k}] = [p_{0k}];\\
&[p_s] = [a^{\alpha s} b^{\beta s} \dots q^{\xi s}] = [p_{0s}];\\
&[p_m] = [a^{\alpha m} b^{\beta m} \dots q^{\xi m}] = [p_{0m}];
\end{aligned}\right\} \qquad (2.13)$$

где α, β, ..., ξ – некие числа.

Сделанное выше предположение, что единицы измерения $[p_{01}]$, …, $[p_{0m}]$ независимы, означает, что формула размерностей любой из этих единиц не может быть представлена как комбинация (полученная посредством умножения или деления) из формул размерностей остальных независимых единиц. При этом для независимости требуется неравенство нулю хотя бы одного определителя D, составленного из показателей, степени основных (1, …, k) единиц, входящих в (2.13). При составлении определителя показателя степени рассматриваются как коэффициенты при неизвестных.

Порядок определителя D не превышает числа основных единиц (в нашем случае q). Число независимых единиц k, с помощью которых измеряются величины $[p_{0i}]$, не может быть больше q. Однако возможны случаи, когда $k \le q$. При этом число независимых единиц можно найти, последовательно рассмотрев определители порядка (q-1-го, (q-2)-го и т.д. Число независимых единиц равно порядку того определителя, который первым окажется не равным нулю.

Дальнейшие рассуждения будем вести применительно к случаю, когда $k = q$.

Поскольку k единиц измерения величин P_0 являются независимыми, то остальные $m–k$ единиц и соответственно величин $[P_0]$ будут являться их функциями, т.е.

$$\left.\begin{aligned}
&[p_{0k+1}] = \psi_{k+1}([p_{01}], [p_{02}], \dots, [p_{0i}], \dots, [p_{0k}]);\\
&[p_{0s}] = \psi_s([p_{01}], [p_{02}], \dots, [p_{0i}], \dots, [p_{0k}]);\\
&[p_{0m}] = \psi_m([p_{01}], [p_{02}], \dots, [p_{0i}], \dots, [p_{0k}]).
\end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

Покажем, что это действительно так. Для этого прологарифмируем первые k уравнений (2.13), в результате чего получим систему k линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned}
\ln[p_{01}] &= \alpha_1\ln[a] + \beta_1\ln[b] + \ldots + \xi_1\ln[q];\\
\ln[p_{02}] &= \alpha_2\ln[a] + \beta_2\ln[b] + \ldots + \xi_2\ln[q];\\
\ln[p_{oi}] &= \alpha_i\ln[a] + \beta_i\ln[b] + \ldots + \xi_i\ln[q];\\
\ln[p_{0k}] &= \alpha_k\ln[a] + \beta_k\ln[b] + \ldots + \xi_k\ln[q].
\end{aligned}\right\} \qquad (2.15)$$

Решая эту систему относительно $\ln[a]$, $\ln[b]$, …, $\ln[q]$ и потенцируя полученные выражения, находим:

$$\left.\begin{aligned}
[a] &= [p_{01}]^{A11/D}[p_{02}]^{A21/D}\ldots[p_{0i}]^{Ai1/D}\ldots[p_{0k}]^{Ak1/D};\\
[b] &= [p_{01}]^{A12/D}[p_{02}]^{A22/D}\ldots[p_{0i}]^{Ai2/D}\ldots[p_{0k}]^{Ak2/D};\\
[q] &= [p_{01}]^{A1k/D}[p_{02}]^{A2k/D}\ldots[p_{0i}]^{Aik/D}\ldots[p_{0k}]^{Akk/D}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

Здесь

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \xi_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \ldots & \xi_2 \\ \alpha_i & \beta_i & \ldots & \xi_i \\ \alpha_k & \beta_k & \ldots & \xi_k \end{vmatrix} \qquad (2.16а)$$

определитель k-го порядка, составленный из коэффициентов системы (2.15); $A_{11}, A_{21}, \ldots, A_{k1}$; $A_{12}, A_{22}, \ldots, A_{k2}$; $A_{1k}, A_{2k}, \ldots, A_{kk}$ – адъюнкты элементов определителя D (первый индекс соответствует номеру строки, второй – номеру столбца).

Подставив выражения (2.16) в последние $m–k$ уравнений системы (2.13) от (k + 1)-го до m-го, получим $m–k$ выражений для величин, участвующих в процессе и представленных теперь через произвольно выбранные (ранее) величины $p_{01}, \ldots, p_{0k}$. Так, например, для p_{0k+1} будем иметь

$$[p_{0k+1}] = [p_{01}^{\alpha_{k+1}}]^{\frac{A_{11}}{D}} \ldots [p_{0k}^{\alpha_{k+1}}]^{\frac{A_{k1}}{D}} [p_{01}^{\beta_{k+1}}]^{\frac{A_{12}}{D}} \ldots [p_{0k}^{\beta_{k+1}}]^{\frac{A_{k2}}{D}} \ldots [p_{01}^{\xi_{k+1}}]^{\frac{A_{1k}}{D}} \ldots [p_{0k}^{\xi_{k+1}}]^{\frac{A_{kk}}{D}}. \qquad (2.16б)$$

Для любой величины от p_{0k+1} до p_{om}, т.е. для p_{os}, где $s = k + 1, \ldots, m$, можно записать соответствующие выражения. Далее после группировки в правых частях величин с одинаковыми нижними индексами на основании (2.16б) запишем

$$[P_{os}] = [P_{01}]^{D1s/D}[P_{02}]^{D2s/D}\ldots [P_{0i}]^{Dis/D}\ldots [P_{0k}]^{Dks/D}. \qquad (2.17)$$

Легко видеть, что (2.17) имеет точно такую же структуру, что и (2.14), причем, например, для $[p_{os}]$

$$\alpha_s' = D_{1s}/D;\ \ldots;\ \gamma_s' = D_{is}/D;\ \ldots;\ \xi_s' = D_{ks}/D. \quad (2.18)$$

Значения величин D_{js}, где $j = 1, \ldots, k$, $s = k + 1, \ldots, m$, полученные при преобразовании (2.16б), могут быть легко найдены из определителя (2.16а) после замены в нем j-й строки на строку, составленную из показателей степени $\alpha_s', \beta_s', \ldots, \xi_s'$ величин $[P_{os}]_{s = k+1, \ldots, m}$ [см. (2.14)].

Если среди m участвующих в уравнении (2.12) величин $P_{01}, \ldots, P_{om}$ имеется k независимых ($P_{01}, \ldots, P_{oi}, \ldots, P_{ok}$), выбираемых произвольно, то остальные $m–k$ величин ($P_{0k+1}, \ldots, P_{os}, \ldots, P_{om}$), являются согласно (2.14) произведениями выбранных независимых величин в соответствующих степенях $\alpha_s', \ldots, \xi_s'$, где $s = k + 1, \ldots, m$.

С учетом (2.14) можно переписать (2.12) в виде

$$f\left(\frac{P_1}{P_{01}}, \ldots, \frac{P_i}{P_{0i}}, \ldots, \frac{P_k}{P_{0k}}, \frac{P_{k+1}}{P_{01}^{\alpha'_{k+1}} P_{02}^{\beta'_{k+1}} \ldots P_{0k}^{\xi'_{k+1}}}, \ldots, \frac{P_s}{P_{01}^{\alpha'_s} P_{02}^{\beta'_s} \ldots P_{0k}^{\xi'_s}}, \ldots, \frac{P_m}{P_{01}^{\alpha'_m} P_{02}^{\beta'_m} \ldots P_{0k}^{\xi'_m}}\right) = 0.$$

Поскольку k независимых величин P_0 выбираются произвольно, то можно принять, что

$$P_{01} = P_1;\ P_{02} = P_2;\ P_{0k} = P_k.$$

При этом (2.12) примет вид, отвечающий сформулированной выше второй теореме подобия:

$$f_1(1, 1, \ldots, 1, \pi_1, \pi_{s-k}, \pi_{m-k}) = 0, \quad (2.19)$$

где значения $\pi_1, \ldots, \pi_{m-k}$ – критерии подобия:

$$\pi_1 = \frac{P_{k+1}}{P_1^{\alpha'_{k+1}} P_2^{\beta'_{k+1}} \ldots P_k^{\xi'_{k+1}}};\ \ \pi_{s-k} = \frac{P_s}{P_1^{\alpha'_s} P_2^{\beta'_s} \ldots P_k^{\xi'_s}};\ \ \pi_{m-k} = \frac{P_m}{P_1^{\alpha'_m} P_2^{\beta'_m} \ldots P_k^{\xi'_m}}. \quad (2.20)$$

Величины $\alpha', \beta', \ldots, \xi'$ показывают, какой показатель степени (критериальный показатель) имеет та или иная величина, входящая в критерий подобия.

Единицы измерения числителей и знаменателей всех критериев равны, так как

$$|\pi| = \left[\frac{P_s}{P_1^{\alpha'_s} P_2^{\beta'_s} \ldots P_k^{\xi'_s}}\right] = 1$$

или $$[P_s] = [P_1]^{\alpha s'}[P_2]^{\beta s'} \ldots [P_k]^{\xi s'}.$$

Подставляя в записанное равенство основные единицы измерений, получим

$$a^{\alpha s} b^{\beta s} \ldots q^{\xi s} = (a^{\alpha 1} b^{\beta 1} \ldots q^{\xi 1})^{\alpha' s} \ldots (a^{\alpha 2} b^{\beta 2} \ldots q^{\xi 2})^{\beta' s} \ldots (a^{\alpha k} b^{\beta k} \ldots q^{\xi k})^{\xi' s},$$

отсюда следует, что

$$\alpha_s = \alpha_1\alpha'_s + \alpha_2\beta'_s + \alpha_k\xi'_s; \quad \beta_s = \beta_1\alpha'_s + \beta_2\beta'_s + \beta_k\xi'_s; \quad \xi_s = \xi_1\alpha'_s + \xi_2\beta'_s + \xi_k\xi'_s. \quad (2.21)$$

Полученные выше k соотношение (2.21) дают связь между известными показателями размерности основных единиц измерения (α_1, …, α_s) и искомыми критериальными показателями (α', …, ξ').

Очевидно, что можно найти их численные значения непосредственно из системы уравнений (2.21) или, как было показано выше, из (2.16а) и (2.18).

Приведенный анализ показывает, что физический процесс математически отражается функцией $m - k$ безразмерных соотношений – критериев подобия π. Всякое уравнение, дающее связь между m участвующими величинами, представленное в критериальной форме (2.19), будучи разрешено относительно какого-либо критерия подобия (например, π_1), позволяет выразить его как функцию $m - k - 1$ критериев подобия:

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{m-k}). \quad (2.22)$$

Значения критериев π являются одинаковыми для любого количества подобных процессов, протекающих в разных системах, сходственные параметры которых пропорциональны. Напомним, что пропорциональность параметров – это частный случай подобия. Вообще говоря, необходимо только некоторое, так или иначе определенное соответствие между параметрами подобных (в широком смысле) систем.

В самом деле, исходное соотношение (2.12) не накладывает никаких ограничений на значения P_1, P_{10}, P_2, P_{20} и т.д. Следовательно, и для процесса, параметры которого $R_1 = m_1P_1$, $R_2 = m_2P_2$, …, очевидно, будут справедливы все выкладки и все соотношения (2.12) – (2.22), если только

$$R_{10} = m_1P_{10},\ R_{20} = m_2P_{20} \text{ и т.д.}$$

Критериальное уравнение. Соотношение вида

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{m-k}),$$

представляющее собой математическую формулировку π-теоремы, называется *критериальным уравнением*. Оно показывает, что один из $m - k$-критериев подобия является функцией остальных $m - k - 1$-критериев. Таким образом, число величин, определяющих характер процесса при критериальной форме записи, уменьшается на $k + 1$. Независимых критериев оказывается $m - k - 1$. В данном случае это π_2, π_3, $\ldots\pi_{m-k}$. π_1 – зависимый критерий, при соблюдении независимых критериев выполняющийся автоматически.

В. *Третья теорема*

Эта теорема формулирует условия, необходимые и достаточные для практической реализации подобия. Согласно формулировке, данной Кирпичевым–Гухманом, она утверждает: *для подобия явлений должны быть соответственно одинаковыми определяющие критерии подобия и подобны условия однозначности*.

При этом под определяющими критериями понимаются критерии, содержащие те параметры процессов и системы, которые в данной задаче можно считать независимыми (время, длина и т.д.); под условиями однозначности понимается группа параметров, значения которых, заданные в виде чисел или функциональных зависимостей, выделяют из всего возможного многообразия явлений данного вида конкретное явление.

Другие формулировки теоремы о подобии. Иногда оказывается более удобным пользоваться первой теоремой о подобии в следующей формулировке: необходимым условием подобия двух систем является равенство соответствующих критериев подобия этих систем, составленных из параметров процесса и параметров систем.

Вторая теорема о подобии формулируется так: функциональная зависимость между характеризующими процесс величинами может быть при определенных условиях представлена в виде зависимости между составленными из них критериями подобия.

Эта формулировка подчеркивает, что именно первая теорема выявляет необходимые (но не необходимые и достаточные) свойства подобных систем, имеющих одинаковые критерии подобия, которые иногда рассматриваются как некоторая средняя мера отношения интенсивности двух физических эффектов, существенных для исследуемого процесса. В приведенной выше формулировке второй теоремы обращается внимание на необходимость учета принятых ограничений и на то, что методами анализа размерностей не выявляются условия существования подобия.

Первое дополнительное положение. О подобии сложных систем

Первое дополнительное положение имеет следующую основную формулировку: *подобие* ($\cong$) *сложных систем* ($A \cong B$), *состоящих из нескольких подсистем, соответственно подобных в отдельности* ($a' \cong b'$, $a'' \cong b''$, …), *обеспечивается подобием всех сходственных элементов, являющихся общими для подсистем*. Общая часть подсистем может при этом рассматриваться как самостоятельная система, число критериев подобия которой может определяться согласно π-теореме, а условия создания подобия – согласно третьей теореме.

Это подтверждает сформулированное выше условие подобия.

Первое дополнительное положение иногда удобно сформулировать в следующей форме: *две независимые системы* (a', a''), *по отдельности подобные двум другим* (b', b'') *системам, будучи сходственно соединены друг с другом через третьи системы* (c, d), *образуют две новые, сложные системы* (*А и В*), *которые будут подобны, если только соединяющие системы подобны друг другу* (*с подобна d*). При этом в соединяющие системы *входят как общие элементы соединяемых систем, так и элементы, относящиеся только к системам соединения.*

Следствие первого дополнительного положения.

Подобные сложные системы остаются подобными после любых упрощений, если только эти упрощения были проведены в системах (*А и В*) *соответственно одинаково*.

Упрощение сложных систем оказывается совершенно необходимо для построения практической теории их работы и для моделирования. Как правило, преобразования, существенно упрощающие изучаемые системы, приводят к искажению процессов, протекающих в этих системах; так в динамических системах замена двух или нескольких элементов одним приводит к уменьшению числа степеней свободы и т.д.

Второе дополнительное положение. *О подобии нелинейных систем*. Все теоремы и условия подобия, справедливые для систем различной сложности, могут быть распространены на линейные системы или системы с переменными параметрами, если выполняются условия совпадения относительных характеристик сходственных параметров, являющихся нелинейными или переменными. Относительная характеристика, пример которой показан на рис 2.2, имеет вид

$$P_{*\text{Н}} = \varphi_{*0}(P_{*i}),$$

где величины со звездочкой – относительные значения, выраженные в долях от некоторого характерного – базисного – параметра ($P_\text{б}$).

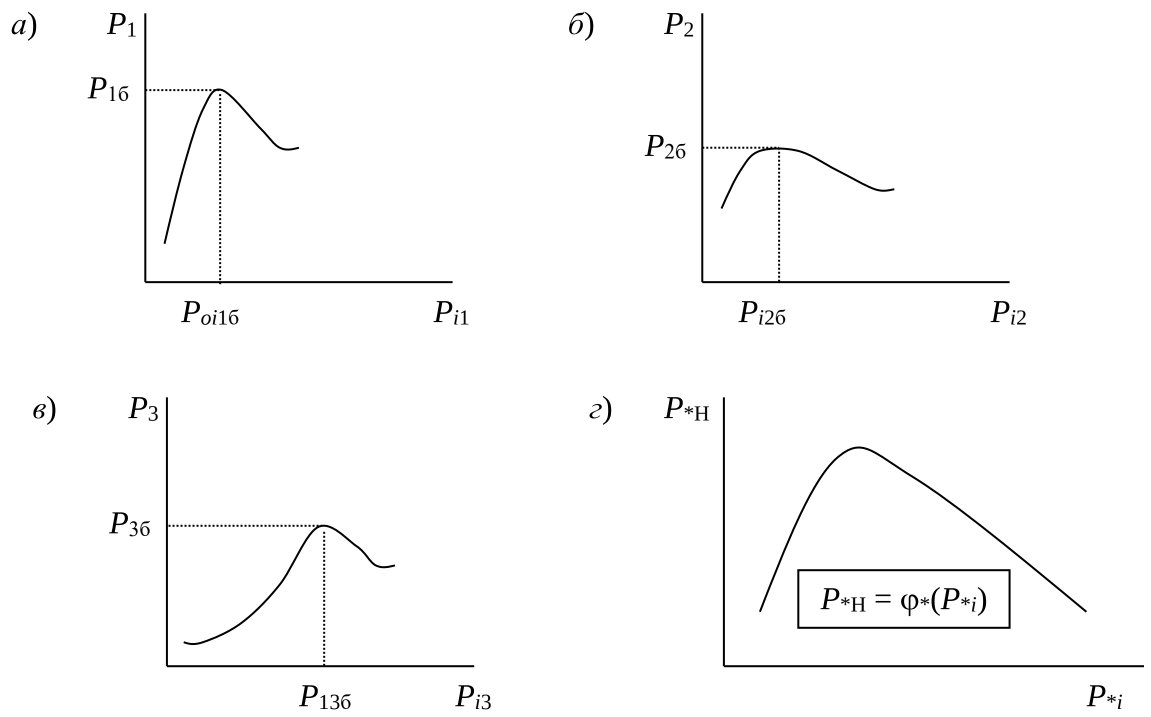

Рис. 2.2. Подобие трех (*а, б, в*) нелинейных зависимостей при выражении их через базисный параметр и представлении на обобщенной (*г*) характеристике $P_{*\text{Н}} = f(P_{*i})$: $P_{*\text{Н}} = P/P_\text{б}$, $P_{*i} = P_i/P_{i\text{б}}$

3. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМ

3.1. МНОЖЕСТВА. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Множество M – это любое объединение в одно целое (перечисление) вполне различаемых частей (предметов, явлений и т.п.).

Части множества называются объектами или элементами множества M.

Обозначение множества $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ или $M = \{m_i \colon i \in I\}$.

Полагаем, что задано семейство объектов системы:

$$\{V_i : i \in I\},$$

где V_i – объект системы; I – множество индексов.

Систему мы определим как некоторое отношение на собственном подмножестве декартова произведения xV

$$S \subset \times\{V_i : i \in I\} \tag{3.1}$$

все элементы (объекты) этого декартова произведения мы будем называть объектами системы S, а само множество S системным множеством или системой.

Подмножество. Множество M_1 называют подмножеством множества M, если для любого $m \in M_1 \Rightarrow m \in M$. Обозначение подмножества: $M_1 \subset M$. Собственное подмножество – любое подмножество данного множества M, исключая пустое множество $\varnothing$ и само M.

Декартово произведение множеств $M = A \times B \times C...$ есть семейство, элементы (объекты) которого представляют собой всевозможные упорядоченные множества объектов $M = \{(a_1, b_1, c_1, ...), ..., (a_i, b_i, c_i, ...)\}$, взятых соответственно из множеств A, B, C… Декартово произведение ассоциативно. Декартово произведение множества само на себя обозначается как $M \times M = \times M$.

Наибольший интерес представляют системы с двумя объектами – входным объектом X и выходным объектом Y (система вход-выход или черный ящик):

$$S \subset X \times Y.$$

Основными **причинами определения системы как теоретико-множественного отношения** являются следующие:

1. Система определяется в терминах ее наблюдаемых свойств или, точнее говоря, в терминах взаимосвязей между этими свойствами, а не тем, что они на самом деле собой представляют (т.е. не с помощью физических, химических, биологических, социальных или других явлений).

2. Определение системы как отношения является предельно общим. В условиях предельно нечеткой информации, когда систему удается описать лишь качественно, все словесные утверждения в силу их лингвистических функций определяют отношения. Каждое высказывание содержит две основные лингвистические категории: термы (денотаты) и функторы. Термы используются для обозначения объектов, а функторы – для обозначения отношения между ними.

Система объекта. Объектом является часть реального мира, которая выделяется и воспринимается как единое целое в течение длительного времени. Объект может быть материальным и абстрактным, естественным и искусственным. Реально объект обладает бесконечным набором свойств различной природы. Практически взаимодействие осуществляется с ограниченным множеством свойств, лежащих в приделах возможности их восприятия и необходимости для цели познания. Система объекта задается на множестве отобранных для наблюдения свойств. Процедура задания системы включает ряд операций: назначение переменных, параметров и канала наблюдения.

Каждому свойству объекта назначается переменная, с помощью которой суммируется изменение проявлений свойства. Множеству наблюдаемых проявлений свойства ставится в соответствие множество значений переменной.

Процедура наблюдения свойств объекта включает базу и канал наблюдения.

Под **базой наблюдения** понимается признаки различения одного проявления свойства от другого. Типовыми базами являются время, пространство, группа и их комбинации. Операционное выражение базы будем называть параметром наблюдения.

Операцию назначения значению параметра значения переменной назовем **каналом наблюдения**. В этом смысле необходимо различать четкий и нечеткий канал наблюдения.

Формально система может быть представлена в виде множества

$$S = (X, T, R, Z),$$

где X – множество переменных; T – множество параметров; R – отношения на множества X и T; Z – цель исследований.

Отношения между переменными и параметрами здесь понимаются в самом широком смысле, включая как ограничение, сцепление, соединение и т.д.

Формально структура представляет упорядоченности переменных и их значений по некоторому заданному относительно цели фактору. Физически (если такая интерпретация возможна) структура представляет аналитические и функциональные связи между элементами системы.

Полное множество состояний системы. В системе, заданной на множестве переменных $X = \{X_n,\ i = \overline{1, N}\}$, каждая переменная изменяет свое значение в некоторой области значений заданной множеством физически различных значений $X_n = \{X_{n,\,k},\ k = \overline{1, K_n}\}$. Зафиксированное значение всех переменных относительно одного значения параметра представляет вектор состояния системы $C_i = <\alpha_1, k_1, X_2, k_2, \ldots, X_N, k_N>$.

Множество всех возможных векторов состояний $C = \{C_i,\ i = \overline{1, |C|}\}$, образует полное множество состояний, где $|C| = \prod_{n=1}^{N} k_n$.

Реально состояние системы не равнозначны. Одни более, другие менее предпочтительны, другие запрещены. Это обстоятельство задается в виде функции ограничения.

Состояние системы на полном множестве состояний неравнозначны. Одни состояние более другие менее предпочтительны, третьи практически не осуществлены. Неравнозначность состояния задается в виде функции ограничения. В общем случае она представляет собой отображение полного множества состояний:

$$f_0 : C \to P,$$

где P – заданное множество.

Предположим, что на множестве интервалов наблюдений объекта для функции ограничения справедливо условие:

$$f_0 = 1, \text{ если } c \subset \hat{C};$$
$$0, \text{ если } c \notin \hat{C},$$

где c – вектор состояния системы $\hat{C} \in C$ – подмножество полного множества состояний.

В этом случае функция ограничения образует замкнутое множество состояний $\hat{C}$. Такие системы будем называть замкнутыми. В обратном случае, когда от интервала к интервалу наблюдения состав элементов $\hat{C}$ меняется, т.е. функция ограничена для интервалов наблюдений, $f_0^i \not\equiv f_0^j$ не множественны, то система будет разомкнутой.

Рассмотрим отображение в интервале наблюдения T множества моментов времени измерений примененных на множестве наблюдаемых состояний $\hat{C}$.

$$f_0 : \hat{C} \to T;\ T \to \hat{C}.$$

Здесь возможны два случая. В одном отображение однозначно, в другим – многозначно.

В случае однозначного отображения, т.е. когда одному значению времени соответствует только одно состояние системы, последняя будет детерминированной. Если отображение многозначно, т.е. одному значению времени допускается два и более состояний, то система будет стохастической.

Для детерминированной системы функция ограничения имеет вид:

$f_0 = 1$, если при $t = t_i$, $C = C_i$;

0, если при $t = t_i$, $C \neq C_i$.

У стохастической системы в момент наблюдения $t = t_i$ состояние системы $\hat{C} \in C$ является случайным. Ограничение полного множества состояний системы в этом случае задается нечеткими функциями типа вероятности, возможности, правдоподобности и др. В общем случае они представляют отображения вида:

$$f_0 : |C| \to [0, 1].$$

При выборе функции ограничения исходят из соотношения мощности полного множества состояний $|C|$ и мощности множества моментов наблюдения $|T|$. Если $|C| \le |T|$, то предпочтительной является функция вероятности. В обратном случае $|C| > |T|$, предпочтительней функция возможностей.

Мощность или кардинальное число множества M – количество элементов в множестве M.

Функция вероятности задается в следующем виде:

$$P = \{P_t,\ t = \overline{1, |T|}\},$$

где $P_t = \dfrac{N_k}{\sum_k N_k}$, N_k – число наблюдаемых состояний C_k; $|T| = \Sigma N_k$ – общее число наблюдений.

Функция возможности определяется следующим образом:

$$W = \{W_k,\ k = 1, k\},$$

где $W_k = \dfrac{N_k}{\max N_i}$, $i \in |\mathrm{C}|$.

В первом случае наблюденное число состояний системы C_k нормируется относительно общего числа наблюдения $|T|$, во втором относительное число состояний с наибольшим значением.

Мера нечеткости множества состояний системы. У стохастических систем полное множество состояния с позиции их допустимости представляет собой нечеткое множество.

При этом уровень нечеткости может меняться в значительных пределах. Например, если вероятности состояний $P(C_i) = P(C_j)$ равны, то он максимальный, а при уровне $P(C_i) = 1$ он минимален. Поэтому надо ввести меру нечеткости полного множества состояний уровня нечеткости.

Для вероятностных систем нечетность задается через множество вероятностей состояния системы в виде отображения

$$H: P \to [0, \infty].$$

В качестве меры уровня нечеткости принята энтропия. Она определяется по формуле:

$$H = -\sum_{i=1}^{|C|} p(C_i) \log p(C_i).$$

Из этой формулы видно, что если $p(C_i) = 1$, то $H = 0$, при $p(C_i) = 1/|C|$ $H = \log_2|C|$.

Таким образом, величина энтропии монотонно меняется в пределах:

$$0 \lesssim H \lesssim \log_2 |C|.$$

Для вероятностных систем аналогично нечеткость вводится через множество возможностей. A мера уровня нечеткости через вероятностную энтропию.

Рассмотрим систему на множестве интервалов наблюдения T_1, T_2, T_3, … . В этом случае возможно, что от интервала наблюдения $H_i = H_j$, уменьшается $H_1 > H_2 > H_3$… или возрастает $H_1 < H_2 < H_3$… . В зависимости от характера интервалов энтропии на множестве интервалов наблюдения различают системы:

– закрытые, если $H_1 > H_2 > H_3 <$…;
– открытые, если $H_1 \gtrless H_2 \gtrless H_3 \gtrless$… .

3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАТЕГОРИЙ, ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА КАТЕГОРИЙ, ФУНКТОРЫ

Категория состоит из:

1. Класса объектов Obj.

2. Множеств морфизмов (стрелок) $Hom(A, B)$ для каждой пары объектов $A, B \in Obj$ (A и B могут совпадать).

3. Операции композиции морфизмов. Формально говоря, для всех троек объектов $A, B, C \in Obj$ задано отображение $\circ$: $Hom\ (A, B) \times Hom\ (B, C) \to Hom\ (A, C)$.

4. Тождественных морфизмов $id_A \in Hom(A, A)$.

Эти данные должны удовлетворять следующим условиям:

1. Операция композиции морфизмов ассоциативна.

2. Тождественные морфизмы нейтральны относительно композиции: $f \circ id_A = f = id_B \circ f$ для любого $f \in Hom\ (A, B)$.

Класс – это то же самое, что и множество, но, возможно, очень большое, например, класс всех множеств. Чтобы избежать парадоксов классам запрещают быть элементами других классов и множеств. Если «класс» заменить на «множество», то получится определение т.н. малой категории. Другими словами, малая категория – это ориентированный граф (с петлями и кратными ребрами), на ребрах которого определена операция композиции.

Пример 1. Определим категорию множеств *Set*. Объектами пусть будут множества, морфизмами – отображения множеств. Операцию композиции отображений и тождественные отображения определим стандартным образом.

Пример 2. Определим категорию групп *Group*. В качестве объектов возьмем группы, а в качестве морфизмов – гомоморфизмы групп.

Пример 3. Определим категорию векторных пространств *Vect*. В качестве объектов возьмем векторные пространства (конечномерные, над полем $\mathbb{R}$), а в качестве морфизмов – линейные отображения.

Пример 4. Определим категорию топологических пространств *Top*. В качестве объектов возьмем топологические пространства, а в качестве морфизмов – непрерывные отображения.

Во всех предыдущих примерах объектами категорий были множества с дополнительной структурой, а морфизмами – отображения этих множеств, удовлетворяющие каким-то специальным условиям. В общем случае это не так.

Пример 5. Определим категорию натуральных чисел *Nat*. Пусть объектами будут натуральные числа. Пусть между натуральными числами *mиn* существует единственный морфизм, если m делится на n.

Пример 6. Определим категорию логических высказываний *Prop*. Пусть объектами будут логические высказывания, а морфизмами – выводы исчисления высказываний. Композицию морфизмов определим как конкатенацию выводов.

Построения в категориях. Теория категорий позволяет единообразно определять конструкции и доказывать теоремы из разных областей математики. Пусть C – произвольная категория.

$X \in Obj(C)$ – начальный объект категории C, если для любого $A \in Obj(C)$ существует единственный морфизм $X \to$ A.

Пример 1. В знакомых нам категориях начальными объектами будут:

1. *Set* – пустое множество $\varnothing$;
2. *Group* – тривиальная группа из одного элемента $\{e\}$;
3. *Vect* – нульмерное пространство $\{0\}$;
4. *Top* – пустое пространство $\varnothing$;
5. *Nat* – начальных объектов нет.

X $\in$ Obj(C) – терминальный объект категории C, если для любого $A \in Obj(C)$ существует единственный морфизм $A \to X$.

Пример 2. В знакомых нам категориях терминальными объектами будут:

1. *Set* – любое одноэлементное множество;
2. *Group* – тривиальная группа из одного элемента $\{e\}$;
3. *Vect* – нульмерное пространство $\{0\}$;
4. *Top* – точка *pt*;
5. *Nat* – единица.

Морфизм f: $A \to B$ называется изоморфизмом, если существует морфизм g: $B \to A$, такой что $g \circ f = id_A$, $f \circ g = id_B$.

Пример 3. В знакомых нам категориях изоморфизмами будут:

1. *Set* – биекции;
2. *Group* – изоморфизмы групп;
3. *Vect* – изоморфизмы векторных пространств;
4. *Top* – гомеоморфизмы;
5. *Nat* – равенства натуральных чисел.

В любой категории C все начальные объекты изоморфны между собой, все терминальные объекты изоморфны между собой.

Доказательство. Пусть X и Y – два начальных объекта. Тогда, по определению начального объекта, существуют отображения f: $X \to Y$, g: $Y \to X$. Следовательно, $g \circ f$ – это морфизм $X \to X$. Но такой морфизм единственен в силу того, что X – начальный объект. Следовательно, $f = id_X$. Аналогично $g = id_Y$.

Морфизм f: $A \to B$ называется мономорфизмом, если для любого объекта C и любых морфизмов g_1, g_2: $C \to A$ из $f \circ g_1 = f \circ g_2$ следует $g_1 = g_2$. Другими словами, f – мономорфизм, если его можно сокращать слева.

Пример 4. В категории множеств мономорфизмы – это инъективные отображения.

Морфизм f: $A \to B$ называется эпиморфизмом, если его можно сокращать справа.

Пример 5. В категории множеств эпиморфизмы – это сюръективные отображения.

Объект X называется произведением объектов A и B, если

1) существуют морфизмы i_A: $X \to A$, i_B: $X \to B$;

2) для любого объекта C и любых морфизмов f_A: $C \to A$, f_B: $C \to B$ существует единственный морфизм f: $C \to X$, такой что $i_A \circ f = f_A$, $i_B \circ f = f_B$.

В предыдущем определении по сути говорится: X – произведение, если в морфизме $C \to X$ содержится та же информация, что и в паре морфизмов $C \to$ А, $C \to B$.

Пример 6. В знакомых нам категориях произведениями будут:

1. *Set* – декартово произведение множеств;
2. *Group* – прямое произведение групп;
3. *Vect* – прямая сумма векторных пространств;
4. *Nat* – наименьшее общее кратное двух натуральных чисел;
5. *Prop* – конъюнкция логических высказываний.

Общепринятым является другое определение: объект X вместе с морфизмами i_A: $X \to A$, i_B: $X \to B$ называется произведением объектов A и B.

Объект X называется копроизведением объектов A и B, если

1) существуют морфизмы i_A: $A \to X$, i_B: $B \to X$.

2) для любого объекта C и любых морфизмов f_A: $A \to C$, f_B: $B \to C$ существует единственный морфизм f: $X \to$ С, такой что $f \circ i_A = f_A, f \circ i_B = f_B$.

Пример 7. В знакомых нам категориях копроизведениями будут:

1. *Set* – дизъюнктное объединение множеств;
2. *Group* – свободное произведение групп;
3. *Vect* – прямая сумма векторных пространств;
4. *Nat* – наибольший общий делитель двух натуральных чисел;
5. *Prop* – дизъюнкция логических высказываний.

Оказывается, что столь непохожие с точки зрения теоретико-множественной математики конструкции как объединение, свободное произведение, прямая сумма, наибольший общий делитель и дизъюнкция – это одно и то же, но только в разных категориях! Здесь хорошо видна объединяющая сила теории категорий.

В любой категории C все произведения объектов A и B изоморфны между собой, все копроизведения объектов A и B изоморфны между собой.

Пусть C – произвольная категория. Двойственной к ней категорией C^* называется категория с тем же классом объектов, но в которой направления всех стрелок изменены на противоположные.

Тогда терминальный объект – это начальный объект в двойственной категории, копроизведение – это произведение в двойственной категории и т.д.

Вообще в теории категорий приставка «ко» означает переход к двойственной категории.

Функторы. Теория категорий возникла в 40-е года XX века благодаря накоплению примеров функторов в алгебраической топологии. Пусть C и D – произвольные категории.

Ковариантный функтор F: $C \to D$.

1. Каждому объекту A категории C ставит в соответствие объект $F(A)$ категории D.

2. Каждому морфизму f: $A \to B$ категории C ставит в соответствие морфизм $F(f)$: $F(A) \to F(B)$, причем так, что:

1) F сохраняет композицию морфизмов: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;

2) F сохраняет тождественные морфизмы: $F(id_A) = idF(A)$.

Контравариантный функтор определяется так же, но с той только разницей, что каждому морфизму f: $A \to B$ он сопоставляет морфизм $F(f)$: $F(B) \to F(A)$. Другими словами, контравариантный функтор $C \to D$ – это ковариантный функтор $C^* \to D$. Названия пришли из дифференциальной геометрии (ковариантные и контравариантные тензоры).

Пример 8. Определим ковариантный функтор «множество подмножеств» $Set \to Set$, каждому множеству A поставив в соответствие множество 2^A, и каждому отображению $A \to B$ поставив в соответствие (понятно, как определенное) отображение $2^A \to 2^B$.

Пример 9. Определим контравариантный функтор $Vect \to Vect$, каждому векторному пространству V поставив в соответствие пространство V^* линейных функций $V \to \mathbb{R}$, и каждому линейному отображению $U \to V$ поставив в соответствие (понятно, как определенное) линейное отображение $V^* \to U^*$.

Топос – это категория, в которой существуют:

1. Конечные пределы (произведения и их обобщения).
2. Конечные копределы (копроизведения и их обобщения).
3. Экспоненты (аналоги «множеств отображений»).
4. Выделитель подобъектов (subobject classifier, аналог двухэлементного множества).

Эти аксиомы позволяют делать с объектами топоса все, что можно делать с обычными множествами. При этом категория Set – это далеко не единственный известный топос. Любое понятие теоретико-множественной математики можно перенести на произвольный топос.

Составим математическую модель информационной системы и опишем ее с помощью теории категорий. В нашем случае будет использоваться система использования интернета в маленьком офисе. Система состоит из пяти элементов: компьютер администратора, роутер, модем, телефон, ноутбук.

Запишем ограничения к данной системе.

1. Компьютер администратора может производить подключение к интернету только через основной шлюз 192.168.0.1.

2. Запросить отключение Wi-Fi, а также интернета может только рабочий с ноутбуком, отправив сообщение с запросом к администратору.

3. Максимально допустимое подключение к сети Wi-Fi один телефон и один ноутбук.

4. Администратор не может выключить интернет пока в сети подключены активные пользователи, но Wi-Fi он может выключать. Но если администратору пришло сообщение о просьбе выключения интернета с ноутбука, то он может выключить интернет.

Опишем систему с помощью теории категорий [2] (рис. 3.1).

A – начальное состояние системы. Оно включает в себя только компьютер администратора.

$A(a_1(t)),\ a_1(t)$ – компьютер администратора.

$f : A \to B\ f$ – включение роутера.

$B(b_1(t), b_2(t))\ b_2$ – роутер.

B – состояние системы с включенным ПК администратора и роутером.

$g : B \to C\ \ g$ – включение модема.

$C(c_1(t), c_2(t), c_3(t))\ \ c_3$ – модем.

C – состояние системы с включенным ПК, роутером и модемом.

$n : C \to D\ n$ – подключение к интернету.

$D(d_1(t), d_2(t), d_3(t))$.

D – система с подключенным интернетом.

$z : D \to H\ \ z$ – включение Wi-Fi.

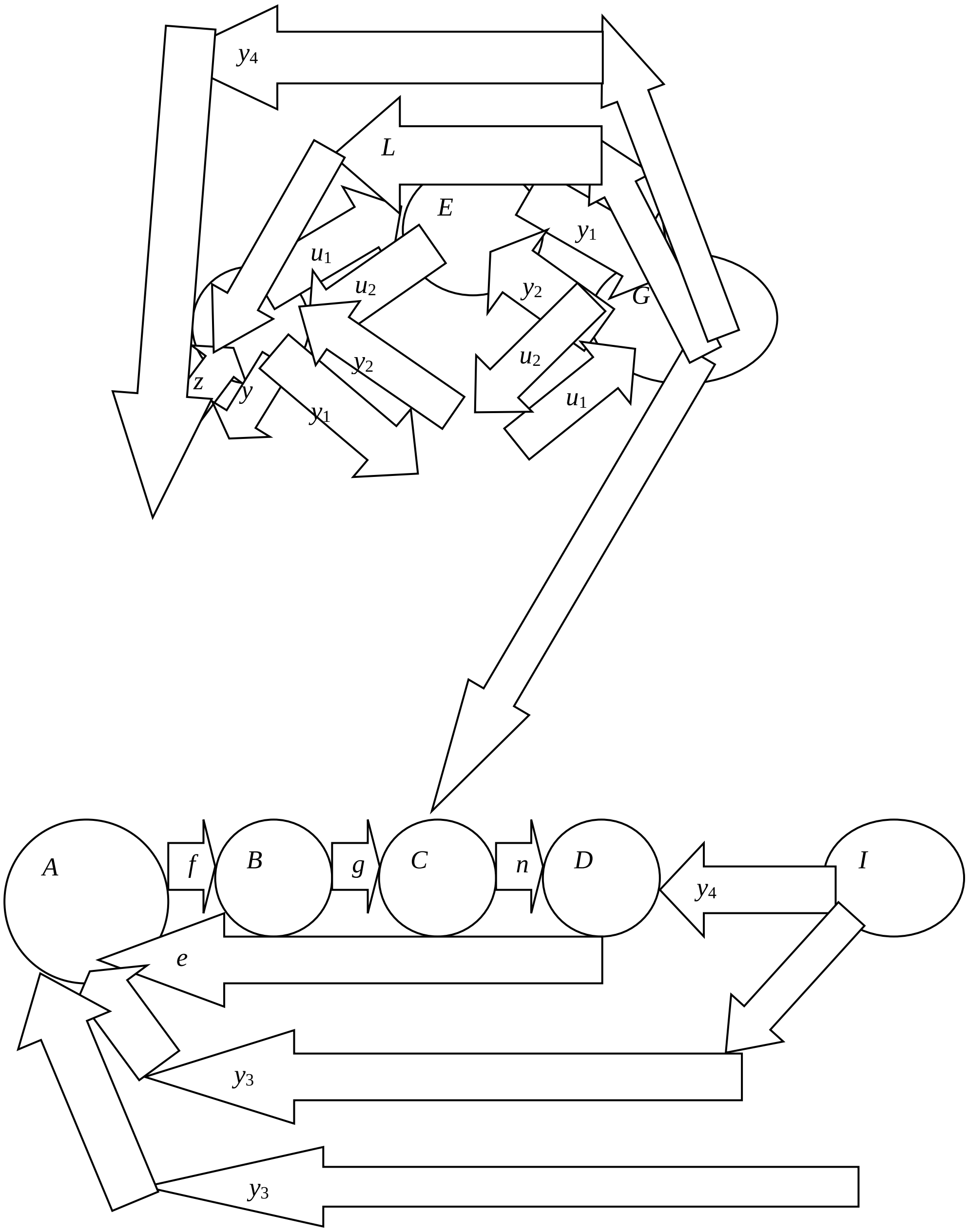

Рис. 3.1

$H(h_1(t),\, h_2(t),\, h_3(t))$.

H – система с подключенным интернетом и Wi-Fi

$y: H \to D$ y – выключение Wi-Fi администратором

$u_1 : H \to E$ u_1 – подключение к Wi-Fi телефона.

$E(e_1(t),\, e_2(t),\, e_3(t),\, e_4(t))$ e_4 – телефон

$u_2 : E \to H$ u_2 – отключение телефона от Wi-Fi

$y_1 : H \to I$ y_1 – подключение ноутбука к Wi-Fi

$I(i_1(t),\, i_2(t),\, i_3(t),\, i_4(t))$ y_4 – ноутбук

$y_2 : I \to H$ y_2 – отключение ноутбука от Wi-Fi

$u_1 : I \to G$ – подключение к сети телефона

$G(g_1(t),\ g_2(t),\ g_3(t),\ g_4(t),\ g_5(t))$ $g_4,\ g_5$ – ноутбук, телефон

$u_2 : G \to I$ – отключение телефона

$y_1 : E \to G$ – подключение ноутбука

$G(g_1(t),\ g_2(t),\ g_3(t),\ g_4(t),\ g_5(t))$ g_4, g_5 – телефон, ноутбук

$y_2 : G \to E$ – отключение ноутбука

$l : G \to H$ – отключение телефона и ноутбука.

$y_3 : I \to H$ – сообщение администратору об отключении системы

$y_3 : G \to A$ – сообщение администратору об отключении системы

$y_4 : I \to D$ – сообщение об отключении Wi-Fi

$y_4 : G \to D$ – сообщение об отключении Wi-Fi

$f(A,B) \in mor_{\Sigma}(A,B)$ имеет функциональное отношение

$f(a_i) \equiv \{b_j | (a_i, b_j) \in f\} \subset A \times B$ $f(a_i) = \phi$, либо состоит из одного элемента

$g(B,C) \in mor_{\Sigma}(B,C)$ имеет всюду определенное отношение

$p(b_i) \equiv \{c_j | (b_i, c_j) \in p\} \subset B \times C$ $p(b_i) \neq \phi$ $i \equiv \overline{1,n}$

$h(C,D) \in mor_{\Sigma}(C,D)$ имеет биективное отношение

$b(c_i) \equiv \{d_j | (c_i, d_j) \in b\} \subset C \times D$ $b(c_i) \neq \phi$, а так же $b(c_i)$ и $b^{-1}(d_j)$ состоят из одного элемента, $i, j = \overline{1,n}$ $n = m$

$z(D,H) \in mor_{\Sigma}(D,H)$ имеет биективное отношение

$b(d_i) \equiv \{h_j | (d_i, h_j) \in b\} \subset D \times H$ $b(d_i) \neq \phi$, а так же $b(d_i)$ и $b^{-1}(h_j)$ состоят из одного элемента, $i, j = \overline{1,n}$ $n = m$

$e(D,A) \in mor_{\Sigma}(D,A)$ имеет сюръективное отношение

$S(di) \equiv \{a_j | (d_i, a_j) \in S\} \subset D \times A$ $S^{-1}(a_j) \neq \phi, j = \overline{1,m}$

$y(H,D) \in mor_{\Sigma}(H,D)$ имеет биективное отношение

$b(h_i) \equiv \{d_j | (h_i, d_j) \in b\} \subset H \times D$ $b(h_i) \neq \phi$ а так же $b(h_i)$ и $b^{-1}(d_j)$ состоят из одного элемента $i, j = \overline{1,m}$ $n = m$

$u_1(H,E) \in mor_{\Sigma}(H,E)$ имеет всюду определенное отношение

$p(h_i) \equiv \{e_j \,|\, (h_i, e_j) \notin p\} \subset H \times E \;\; p(h_i) \neq \phi \;\; i = \overline{1, n}$

$y_1(H, I) \in mor_\Sigma(H, E)$ имеет всюду определенное отношение

$p(h_i) \equiv \{I_j \,|\, (h_i, i_j) \in p\} \subset H \times I \;\; p(h_i) \neq \phi, \; i = \overline{1, n}$

$y_1(E, G) \in mor_\Sigma(E, G)$ имеет всюду определенное отношение

$p(e_i) \equiv \{g_j \,|\, (e_i, g_j) \in p\} \subset E \times G \;\; p(e_i) \neq \phi, \; i = \overline{1, n}$

$u_2(E, H) \in mor_\Sigma(E, H)$ имеет сюръективное отношение

$s(e_i) \equiv \{h_j \,|\, (e_i, h_j) \in s\} \subset E \times H \;\; s^{-1}(h_j) \neq \phi, \; j = \overline{1, m}$

$u_1(I, G) \in mor_\Sigma(I, G)$ имеет всюду определенное отношение

$p(i_i) \equiv \{g_j \,|\, (i_i, g_j) \in p\} \subset I \times G \;\; p(i_i) \neq \phi, \; i = \overline{1, n}$

$y_2(I, H) \in mor_\Sigma(I, H)$bv имеет сюръективное отношение

$s(i_i) \equiv \{h_j \,|\, (i_i, h_j) \in s\} \subset I \times H \;\; s^{-1}(h_j) \neq \phi, \; j = \overline{1, m}$

$y_3(I, A) \in mor_\Sigma(I, A)$ имеет сюръективное отношение

$s(i_i) \equiv \{d_j \,|\, (i_i, a_j) \in s\} \subset I \times A \;\; s^{-1}(a_j) \neq \phi, \; j = \overline{1, m}$

$y_4(I, D) \in mor_\Sigma(I, D)$ имеет сюръективное отношение

$s(i_i) \equiv \{d_j \,|\, (i_i, d_j) \in s\} \subset I \times D \;\; s^{-1}(d_j) \neq \phi, \; j = \overline{1, m}$

$u_2(G, I) \in mor_\Sigma(G, I)$ имеет сюръективное отношение

$s(g_i) \equiv \{i_j \,|\, (g_i, i_j) \in s\} \subset G \times I \;\; s^{-1}(i_j) \neq \phi, \; j = \overline{1, m}$

$y_2(G, E) \in mor_\Sigma(G, E)$ имеет сюръективное отношение

$s(g_i) \equiv \{e_j \,|\, (g_i, e_j) \in s\} \subset G \times E \;\; s^{-1}(e_j) \neq \phi, \; j = \overline{1, m}$

$y_3(G, A) \in mor_\Sigma(G, A)$ имеет сюръективное отношение

$s(g_i) \equiv \{a_j \,|\, (g_i, a_j) \in s\} \subset G \times A \;\; s^{-1}(d_j) \neq \phi, \; j = \overline{1, m}$

$y_4(G, D) \in mor_\Sigma(G, D)$ имеет сюръективное отношение

$s(g_i) \equiv \{d_j \,|\, (g_i, d_j) \in s\} \subset G \times D \;\; s^{-1}(d_j) \neq \phi, \; j = \overline{1, m}$

$l(G, H) \in mor_\Sigma(G, H)$ имеет сюръективное отношение

$s(g_i) \equiv \{h_j \,|\, (g_i, h_j) \in s\} \subset G, H \;\; s^{-1}(h_j) \neq \phi, \; j = \overline{1, m}$

Рассчитаем структурные инварианты для различных состояний данной системы. Для расчета мы будем использовать следующие формулы:

$J_f^A(B) = (n+1)^m$ – функционального отношения, $J_p^A(B) = (2^n - 1)^m$ – для всюду определенного отношения, $J_{s,i}^A(B) = m^n$ – для биективного отношения, $J_s^A(B) = (2^m - 1)^n$ – для сюръективного отношения.[1]

f) $J_f^A(B) = (1+1)^2 = 4$

g) $J_p^b(C) = (2^2 - 1)^3 = 27$

n) $J_{s,i}^c(D) = 3^3 = 27$

z) $J_{s,i}^D(H) = 3^3 = 27$

e) $J_s^D(A) = (2-1)^3 = 1$

y) $J_{s,i}^H(D) = 3^3 = 9$

u_1) $J_p^H(E) = (2^3 - 1)^4 = 2401$

y_1) $J_p^H(I) = (2^3 - 1)^4 = 2401$

y_1) $J_p^E(G) = (2^4 - 1)^5 = 759375$

u_2) $J_s^E(H) = (2^4 - 1)^3 = 3375$

u_1) $J_s^I(G) = (2^4 - 1)^5 = 759375$

y_2) $J_s^I(H) = (2^4 - 1)^3 = 3375$

y_3) $J_s^I(A) = (2^4 - 1) = 15$

y_4) $J_s^I(D) = (2^4 - 1)^3 = 3375$

u_2) $J_s^G(I) = (2^5 - 1)^4 = 923521$

y_2) $J_s^G(E) = (2^5 - 1)^4 = 923521$

y_3) $J_s^G(A) = (2^5 - 1) = 31$

y_4) $J_s^G(D) = (2^5 - 1)^3 = 29791$

l) $J_s^G(H) = (2^5 - 1)^3 = 29791$

Система Σ переходит из состояния $A \in set\Sigma$ в состояние $G \in set\Sigma$. Состояние *G* экстремально, так как в нем структура информации $H_\Sigma^A(G)$ максимальна, а инвариант $J_\Sigma^A(G)$ мал и этим характеризует высокую устойчивость состояния.

4. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ

4.1. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ И ВИДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ. УРОВНИ ОПИСАНИЯ СИСТЕМ

Методы описания систем классифицируются в порядке возрастания формализованности – от качественных методов, с которыми в основном и связан был первоначально системный анализ, до количественного системного моделирования с применением ЭВМ (рис. 4.1). Разделение методов на качественные и количественные носит, конечно, условный характер.

В качественных методах основное внимание уделяется организации постановки задачи, новому этапу ее формализации, формированию вариантов, выбору подхода к оценке вариантов, использованию опыта человека, его предпочтений, которые не всегда могут быть выражены в количественных оценках.

Количественные методы связаны с анализом вариантов, с их количественными характеристиками корректности, точности и т.п. Для постановки задачи эти методы не имеют средств, почти полностью оставляя осуществление этого этапа за человеком.

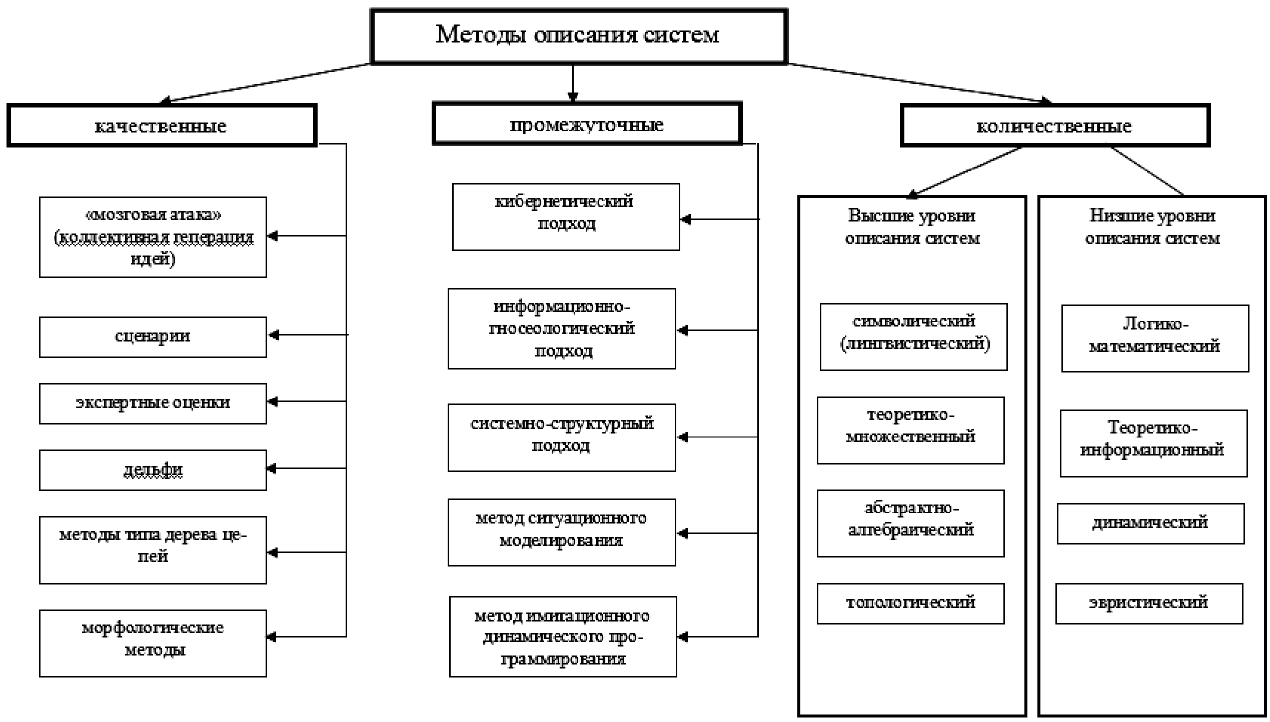

Рис. 4.1

Между этими крайними классами методов системного анализа имеются методы, которые стремятся охватить оба этапа – этап постановки задачи, разработки вариантов и этап оценки и количественного анализа вариантов, – но не делают это с привлечением разных исходных концепций и терминологии, с разной степенью формализованности.

4.2. СИСТЕМНО-ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. АВТОМАТЫ

Множеством моментов времени (общей временной системы) называется линейно упорядоченное (абстрактное) множество. Это множество будет обозначаться символом T, а определенное в нем отношение порядка – через $\le$.

Для удобства обозначений мы будем считать, что в множестве T имеется *минимальный элемент* 0. Другими словами, мы предполагаем, что существует некоторое надмножество $\overline{T}$, линейно упорядоченное отношением $\le$ и содержащее фиксированный элемент 0 такой, что множество Т можно определить как $T = \{t : t \ge 0\}$[1].

Пусть A и B – какие-то произвольные множества, T – некоторое множество моментов времени, A^T и B^T – множества всевозможных отображений из T в A и B соответственно и $X \subset A^T$, $Y \subset B^T$. *Общей временной системой* S над X и Y называется отношение на X и Y, т.е. $S \subset X \times Y$. Множества A и B называются *алфавитами входных воздействий* (*входов*) *и выходных величин* (*выходов*) системы соответственно. Множества X и Y называют еще *временными объектами системы*; их элементами x: $T \to A$ и y: $T \to B$ служат абстрактные функции времени. Значения функций из X в момент времени t будут соответственно обозначаться через $x(t)$ и $y(t)$.

Для того чтобы изучать динамику поведения временных систем, необходимо ввести в рассмотрение подходящие для этой цели *отрезки* (*интервалы*) *времени*. В этой связи мы договоримся пользоваться следующими обозначениями.

Для любых t, $t` > t$

$$T_t = \{t`: t` \ge \mathrm{t}\},\ T^{\,t} = \{t`: t` < t\},\ T_{t\,t`} = \{t^*: t \le t^* < t`\},$$

$$\overline{T}_{\,t\,t`} = T_{t\,t`} \cup \{t`\},\ \overline{T}^{\,t} = T^{\,t} \cup \{t\}.$$

Сужения функции $x \in A^T$ на различные отрезки времени будут определяться следующим образом:

$x_t = x \mid T_t$, $x^t = x \mid T^t$, $x_{tt^*} = x \mid T_{tt^*}$, $\bar{x}_{tt*} = x \mid \bar{T}_{tt*}$,

$\bar{x}^t = x \mid \bar{T}_t$, $X_t = \{x_t : x_t = x \mid T_t \,\&\, x \in X\}$,

$X^t = \{x^t : x^t = x \mid T^t \,\&\, x \in X\}$, $X_{tt^*} = \{x_{tt^*} : x_{tt^*} = x \mid T_{tt^*} \,\&\, x \in X\}$,

$X(t) = \{x(t) : x \in X\}$.

Мы также договоримся, что $x_{tt} = \varnothing$, $X_{tt} = \{\varnothing\}$.

С помощью операции сужения мы введем новую операцию – операцию сочленения. Пусть $x \in A^T$ и $x^* \in A^T$. Тогда для любого t можно определить новый элемент $\hat{x}$ из A^T, положив

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x(\tau), & \text{если } \tau < t, \\ x^*(\tau), & \text{если } \tau \geq t, \end{cases}$$

и условившись обозначать $\hat{x}$ через $\hat{x} = x^t \cdot x^*{}_t$. Последнюю операцию и называют *операцией сочленения* элементов x^t и $x^*{}_t$.

Для заданного множества $X \subset A^T$ семейство всевозможных определенных выше сужений элементов из X мы будем обозначать через $\bar{X}$. Другими словами,

$$\bar{X} = \{\hat{x}: (\hat{x} = x \vee \hat{x} = x_t \vee \hat{x} = x^t \vee \hat{x} = x_{tt} \vee \hat{x} =$$
$$= \bar{x}_{tt*} \vee \hat{x} = \bar{x}^t) \,\&\, x \in \mathrm{X} \,\&\, t, t' \in \mathrm{T} \,\&\, t' \geq t\}.$$

Сужения функций из Y и соответствующие операции в Y определяются точно также, как и в X.

Временная система $S \subset X \times Y$ называется системой с полным входом тогда и только тогда, когда

$$(\forall x)\,(\forall x^*)\,(\forall t)\,(x, x^* \in Д\,(S) \,\&\, | \, t \in T \Rightarrow x^t x^*{}_t \in Д\,(S)) \text{ и } (\forall t)\,(\{x(t) \mid x \in X\} = A).$$

Пусть S – временная система, $S \subset. A^T \times B^T$. *Объектом начальных состояний* системы S и *начальной реакцией* системы называются соответственно объект глобальных состояний и глобальная реакция этой системы. Начальная реакция системы обозначается через ρ_0. Другими словами, ρ_0: $C_0 \times X \rightarrow Y$ удовлетворяет условию

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow (\exists c)\,[\rho_0\,(c, x) = y].$$

Пусть S – временная система и $t \in T$. *Объектом состояний в момент времени* t, который будем обозначать через C_t , называется объект начальных состояний для сужения S_t . Другими словами, это абстрактное множество, для которого найдется такая функция ρ_t: $C_t \times X_t \to Y$, что

$$(x_t , y_t) \in S_t \Leftrightarrow (\exists c)\ [\rho_t (c, x_t) = y_t].$$

Функцию ρ_t называют *реакцией* (*системы*) *в момент времени t*.

Семейство всех реакций данной системы, т.е.

$$\overline{\rho} = \{\rho_t : C_t \times X_t \to Y_t \ \&\ t \in T\}$$

назовем *семейством реакций* системы S, а множество $\overline{C} = \{C_t : t \in T\}$ – *семейством объектов состояний*.

Понятие динамической системы возникает тогда, когда появляется необходимость исследовать, как система развивается во времени. Поэтому можно установить взаимосвязь между значениями объектов системы, относящимися к различным моментам времени. Для этой цели одного понятия реакции системы уже недостаточно и приходится вводить другое семейство функций.

Временная система $S \subset X \times Y$ называется *динамической* (или она *допускает динамическое представление*) тогда и только тогда, когда найдутся два таких семейства отображений

$$\overline{\rho} = \{\rho_t : C_t \times X_t \to Y_t \ \&\ t \in T\} \text{ и } \overline{\varphi} = \{\varphi_{t\,t'} : C_t \times X_{t\,t'} \to C_{t'} \ \&\ t, t' \in T \ \&|\ t' > t\},$$

что (1) семейство $\overline{\rho}$ согласуется с S, т.е. является семейством реакций этой системы;

(2) все функции $\varphi_{t\,t'}$ из семейства $\overline{\varphi}$ удовлетворяют следующим условиям:

– $\rho_t (c_t, x_t) \mid T_{t'} = \rho_{t'} (\varphi_{t\,t'} (c_t, x_{t\,t'}), x_{t'})$, где $x_t = x_{t\,t'}\, x_{t'}$;

– $((\varphi_{t\,t'} (c_t, x_{t\,t'}) = \varphi_{t''\,t'} (\varphi_{t\,t''} (c_t, x_{t\,t''}), x_{t''\,t'}$, где $x_{t\,t'} = x_{t\,t''}\, x_{t''\,t'}$.

Функции $\varphi_{t\,t'}$ называются *функциями перехода состояний* (на $T_{t\,t'}$), а семейство $\overline{\varphi}$ – *семейством функций перехода состояний*.

Функции $\varphi_{t\,t'}$, вообще говоря, определены лишь для $t < t'$. Однако в дальнейшем мы договоримся считать, что $\varphi_{t\,t} (c_t, x_{t\,t}) = c_t$ для всех $t \in T$.

Поскольку динамическая система полностью описывается двумя семействами отображений $\overline{\rho}$ и $\overline{\varphi}$, мы будем называть динамическим представлением системы и даже просто динамической системой саму эту пару $(\overline{\rho}, \overline{\varphi})$. Если для семейства реакций существует согласующееся с ним семейство перехода состояний, то мы будем называть первое семейство *семейством реакций динамической системы*. Ниже мы покажем, что не каждое семейство реакций может служить семейством реакций динамической системы.

Пусть S – переменная система, $S \subset X \times Y$, а C – произвольное множество. Множество C является *пространством состояний* системы S тогда и только тогда, когда найдутся два таких семейства функций $\overline{\rho} = \{\rho_t : C \times X_t \rightarrow Y_t\}$ и $\overline{\varphi} = \{\varphi_{t\,t'} : C \times X_{t\,t'} \rightarrow C\}$, что

- для всех $t \in T$, $S_t \subset S_t^{\rho}$ и $S_t^{\rho} = \{(x, y) : (\exists\, c)\,(y = \rho_0\,(c, x))\} = S$;
- для всех t, t' и $t'' \in T \rho_t\,(c, x_t) \mid T_{t'} = \rho_{t'}\,(\varphi_{t\,t'}\,(c, x_{t\,t'}), x_{t'})$,
- $\varphi_{t\,t'}\,(c, x_{t\,t'}) = \varphi_{t''\,t'}\,(\varphi_{t\,t''}\,(c, x_{t\,t''}), x_{t''\,t'})$,
- $\varphi_{t\,t}\,(c, x_{t\,t}) = c$,

где $x_t = x_{t\,t'}\, x_{t'}$ и $x_{t\,t'} = x_{t\,t''}\, x_{t''}\, x_{t'}$. В этом случае S называется *динамической системой в пространстве состояний C*.

Общесистемная и системные модели функционирования обладают исключительно высокой степенью общности. Они, безусловно, необходимы для теоретических исследований и полезны, так как выявляют общие закономерности, присущие всем или весьма широкому классу систем. Но в повседневной практической деятельности инженеры традиционно используют так называемые конструктивные модели – гораздо менее общие, но позволяющие производить конкретные вычисления. Конструктивные модели в сущности представляют собой алгоритмы, пользуясь которыми можно определить значения одних переменных, характеризующих данную систему, по заданным или измеренным значениям других переменных.

Разработка конструктивных моделей – основная задача специальных дисциплин. Однако между системными и конструктивными моделями нет противоречия. По мере накопления знаний о системе, уточнения и конкретизации ее свойств и характеристик системная модель естественным образом преобразуется в конструктивную. Следовательно, конструктивная модель может и должна закономерно вырастать из более общей системной модели. Такой – истинно системотехнический – подход представляется более обоснованным, чем априорное задание конструктивной модели исследователем, использующим для этого лишь свою интуицию и субъективные представления о возможностях тех или иных математических схем.

Рассмотрим основные, наиболее важные и принципиальные этапы построения моделей функционирования на основе системотехнической цепочки преобразований «общесистемная модель $\rightarrow$ системная модель $\rightarrow$ конструктивная модель».

Конкретизация общесистемной модели. Моделирование процессов функционирования конкретной системы должно начинаться с записи всех компонент общесистемной модели, определения их содержательного смысла и областей изменения. Необходимо определить: интервал времени, на котором нас интересует функционирование системы; множества входных и выходных воздействий в области их возможных изменений; множество характеристик состояния системы и область их возможных изменений. Эта работа необходима не только для задания в дальнейшем операторов выхода и перехода. Она, как правило, полезна и для самого исследователя, поскольку заставляет его заново, тщательно и по определенной схеме, задаваемой структурой модели MF, осмыслить механизм функционирования системы, уточнить и классифицировать используемые для описания системы переменные. Этот процесс не всегда протекает гладко. Зачастую выясняется, что набор переменных системы избыточен или, наоборот, недостаточен для построения модели.

Значительные трудности могут встретиться при определении переменных состояния, совокупность которых должна удовлетворять условиям. Чтобы выполнить эти условия и сформировать необходимый набор переменных состояния, исследователь обычно вынужден в явном виде ввести ряд допущений. Среди них могут оказаться новые ограничения, ранее не принимавшиеся во внимание, или ограничения, формально заложенные в используемый для моделирования математический аппарат, но иногда никак исследователем не осознаваемые. Возможен и третий вариант, когда допущения, которые необходимо сделать, чтобы описать систему с помощью модели MF, оказываются несовместимыми с допущениями, положенными в основу традиционно используемой исследователем конструктивной модели. При возникновении подобной ситуации не исключено, что исследователю придется коренным образом пересмотреть свои взгляды на адекватность данной конструктивной модели реальным процессам функционирования системы.

Выбор системной модели. После определения для моделируемой системы компонент модели *MF* можно приступить к ее дальнейшей конкретизации. Первым шагом на этом пути является выбор системной модели. На рисунке 4.2. приведена классификация системных модулей, которая может облегчить исследователю этот процесс.

Общесистемная модель *MF*, описывающая класс систем без предистории, последовательно уточняется в процессе рассмотрения четырех системных свойств: непрерывности *N*, линейности *L*, стационарности *C* и стохастичности *P*. Наличие свойства кодируется единицей, а отсутствие – нулем.

На первом этапе устанавливается непрерывность или дискретность системы. Соответственно из модели *MF* получаем модель непрерывной системы *MF*1 и модель дискретной системы *MF*0. На втором этапе *MF*1 и *MF*0 проверяются на линейность. При этом получаем линейные непрерывную *MF*11 и дискретную *MF*01 и нелинейные непрерывную *MF*10 и дискретную *MF*00 модели. На третьем этапе для каждой модели, полученной на втором этапе, выясняется наличие или отсутствие стационарности, что позволяет выделить восемь типов системных моделей. На последнем, четвертом этапе эти восемь моделей конкретизируются путем установления их стохастичности или детерминированности.

Таким образом, анализ свойств *N*, *L*, *C* и *P* позволяет выделить 16 различных системных моделей. Для некоторых из них существует развитый математический аппарат, другие исследованы недостаточно. Например, не вызывает трудностей моделирование непрерывных линейных стационарных детерминированных систем (модель *MF*1110), для которых имеется адекватное математическое описание – линейные дифференциальные с постоянными коэффициентами. Напротив, дискретные нелинейные нестационарные вероятностные системы (модель *MF*0001) не имеют достаточно адекватного математического описания.

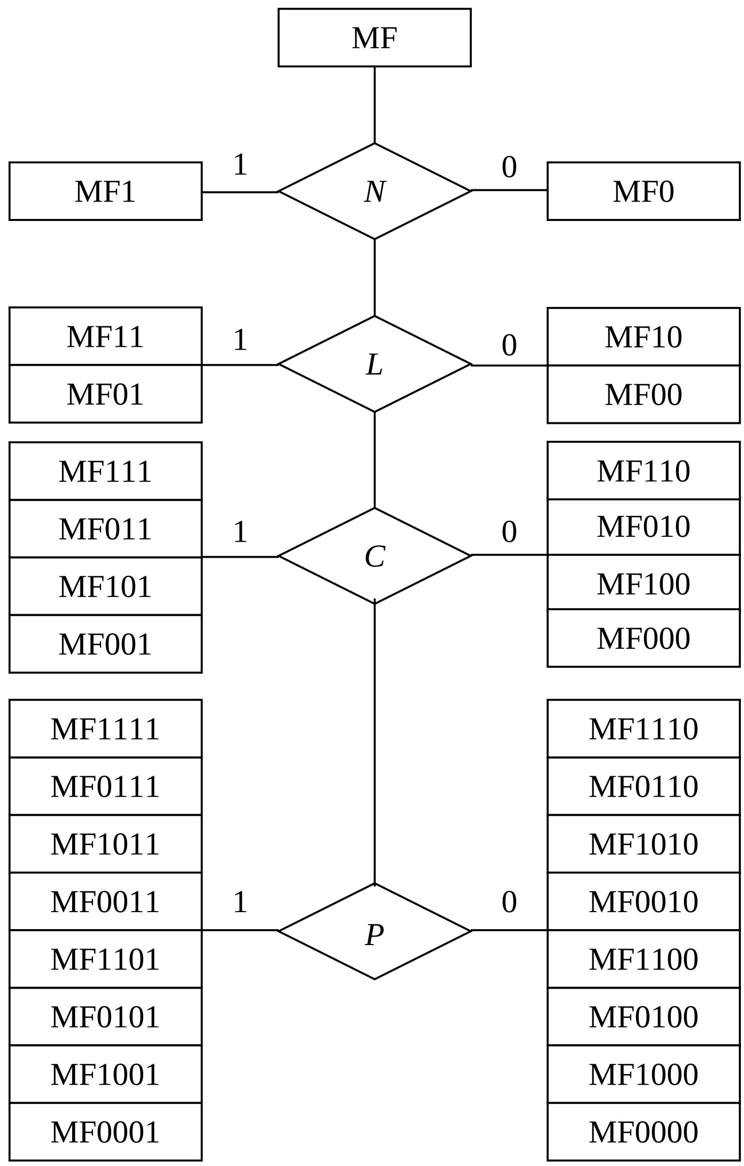

Рис. 4.2

В процессе выбора системной модели следует учитывать различную степень их изученности и по возможности избегать использования моделей, не имеющих развитого математического аппарата. Правда, стремление получить возможно более простую и изученную модель может потребовать от исследователя принятия допущений, справедливость которых для данной системы сомнительна. Но, поскольку исследователь, продвигаясь по классификационному дереву, вынужден сделать это вполне сознательно и в явном виде, он сможет оценить погрешность модели, вызванную принятием этих допущений, и после этого вполне обоснованно принять решение о возможности ее использования.

Получение конструктивной модели. Процесс получения конструктивной модели сводится к конкретизации операторов системной модели на основе имеющихся у исследователя экспериментальных и теоретических сведений о характере функционирования системы. Если конструктивная модель построена, на ней необходимо заново проверить справедливость всех принятых на предыдущих этапах допущений. Обычно для одной и той же системной модели можно предложить несколько конструктивных реализаций. Какую из них выбрать, зависит от многих факторов, определяющих соответствие (адекватность) модели и изучаемой системы.

Адекватность конструктивной модели означает, что она соответствует целям исследования (адекватность по целям); учитывает все необходимые для проведения исследований переменные и связи между ними (адекватность по полноте); не требует чрезмерно много информации, используемой в качестве исходных данных, а та информация, которая используется, может быть получена с достаточной точностью (адекватность по исходным данным); содержит такие переменные управления и с такими диапазонами изменения их значений, при которых исследователь может эффективно управлять ходом эксперимента (адекватность по управлению); позволяет получить решение в приемлемые сроки и с достаточной точностью (адекватность по точности и времени решения); и, наконец, модель не должна быть слишком «жесткой», чтобы незначительное изменение характера решаемых на ней задач не повлекло необходимости ее коренного пересмотра (адекватность по возможностям адаптации).

Модель, удовлетворяющая перечисленным требованиям, представляется скорее идеалом, к которому следует стремиться, чем реальностью, достижимой в практической деятельности. Именно это обстоятельство и объясняет существование в ряде случаев значительного числа конструктивных моделей, описывающих один и тот же объект исследования, но обладающих различными достоинствами и недостатками, а потому используемых для различных целей.

Изучая общие закономерности, теория систем абстрагируется от физических свойств сигналов и технических особенностей средств их обработки в системах, а использует математические модели для описания сигналов и систем.

Сигналы на входе и выходе системы являются функциями времени, т.е. отображениями множества моментов времени T на множество X входных и множество Y выходных сигналов. Математическая модель системы определяется оператором S, отображающим множество входных сигналов на множество выходных сигналов (рис. 4.3):

$$S : X \to Y \tag{4.1а}$$

или $$\{y(t)\} = S\{x(t)\},\ x(t) \in X,\ y(t) \in Y. \tag{4.1б}$$

Соотношение (4.1б) можно представить с учетом физической реализуемости системы в виде семейства функционалов:

$$Y(t) = F_t(x^t_{-\infty}), \tag{4.2}$$

где через $x^t_{-\infty}$ обозначен отрезок входного сигнала на интервале времени $(-\infty, t)$. Обозначение F_t указывает на возможную зависимость вида функционала или его параметров от времени.

Оператор S или семейство функционалов F_t характеризуют так называемую модель «вход–выход» системы. Теорию систем, использующую модель «вход–выход», называют *макротеорией систем*. Модель «вход–выход» описывает только соотношение между сигналами на входе и выходе системы и не отображает внутреннее состояние системы. По этой причине указанную модель иногда называют «черным ящиком».

Иная ситуация возникает, когда входной сигнал известен лишь на конечном интервале времени $[t_0, t]$. Тогда мгновенное значение $y(t)$ выходного сигнала зависит не только от заданного отрезка $x^t_{t\,0}$ входного сигнала, но и состояния $z\,(t_0)$ системы в момент времени t_0, в котором закодировано все «прошлое» системы.

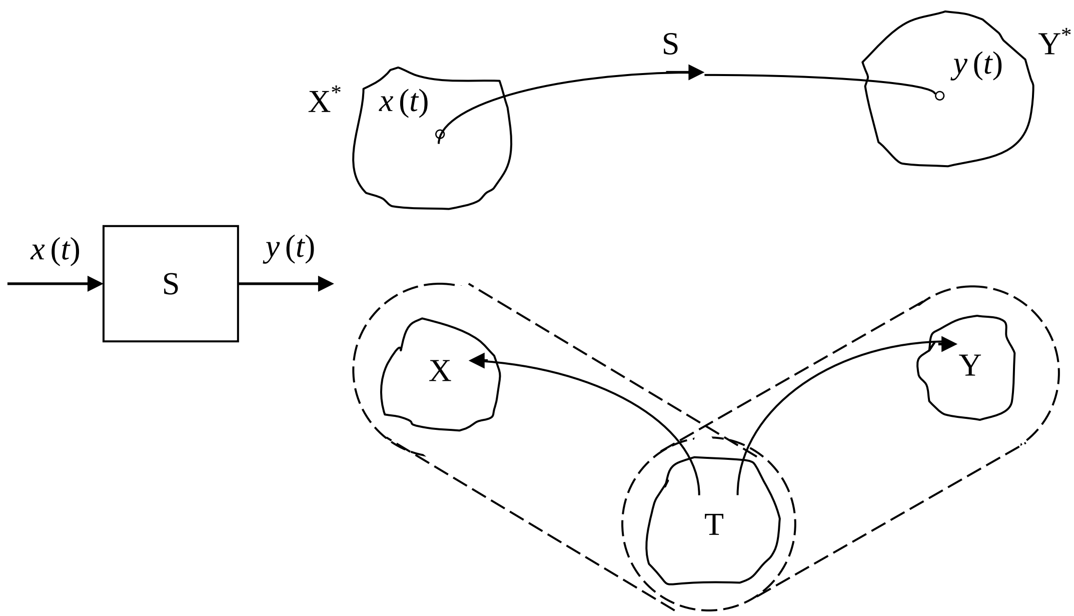

Рис. 4.3. Отображения сигналов в системе

Таким образом, состоянием системы в момент времени t_0 называется набор сведений о прошлом системы, который в совокупности с входным сигналом, заданным на интервале $[t_0, t]$, необходим и достаточен для однозначного определения выходного сигнала, т.е.

$$y(t) = D_t\,[z(t_0), x^t_{t\,0}]. \tag{4.3}$$

Состояние системы также изменяется во времени и определяется уравнением перехода

$$(t) = \Lambda_t\,[z(t_0), x^t_{t\,0}]. \tag{4.4}$$

Соотношения (4.3) и (4.4), учитывающие внутреннее состояние системы, характеризуют так называемую *модель «вход–состояние–выход»* системы. В дальнейшем эту модель будем называть кратко моделью состояния.

Два основных вида систем. Простейшей формой оператора S в (4.1б) является однозначное отображение вход – выход

$$y(t) = f_t[x(t)],\ t \in T, \tag{4.5}$$

которое характеризуется тем, что значения выходного сигнала $y(t)$ в момент времени t определяется значением $x(t)$ входного сигнала, только в тот же самый момент времени t. Если система характеризуется соотношением (4.5), то она называется *статической* или *неинерционной системой* (или системой «без памяти»). В более общем случае система характеризуется функционалами (4.2) или (4.3) и тогда значение сигнала $y(t)$ определяется не только значением входного сигнала в момент наблюдения t выходного сигнала, но и значениями входного сигнала в моменты времени, предшествовавшие моменту времени наблюдения выходного сигнала. Такая система называется физически реализуемой *динамической* или *инерционной системой* (или системой «с памятью»).

Детерминированная система называется стационарной или инвариантной во времени (или системой с постоянными во времени параметрами), если отображение (4.1а) не зависит от временного сдвига, т.е. от выбора начала отсчета времени.

Математические модели линейных динамических систем (резюме). На рисунке 4.3 в компактном виде представлены различные характеристики линейной динамической системы с непрерывным временем, на основе которых формируются математические модели системы (см. табл. 4.1). Характеристики, аналогичные приведенным на рис. 4.4, могут быть введены и для линейных динамических систем с дискретным временем, если заменить интеграл Дюамеля суммой с весами, использовать z-преобразование вместо преобразования Лапласа и заменить дифференциальные уравнения разностными уравнениями.

Модель «вход–выход» линейной динамической системы определяется во временной области импульсной характеристикой $g(t)$ – в случае СН и весовой функцией $g(n)$ – в случае СД, а в частотной области – передаточной функцией $\mathrm{G}(p)$ (преобразование Лапласа от $g(t)$ и функцией $G(z)$ (z – преобразованием $g(n)$). Модель состояния линейной динамической системы (СН) определяется с помощью линейного дифференциального уравнения – обыкновенного для систем с сосредоточенными параметрами и в частных производных – для систем с распределенными параметрами. И в том, и в другом случаях при любых начальных условиях возможно представление модели состояния линейной динамической системы в форме канонических уравнений состояния, которая наиболее полезна для исследования систем.

От детерминированных систем к стохастическим системам. В основе описания детерминированных систем лежит понятие отображения (оператора, функциала, функции), т.е. однозначного соотношения между входными и выходными сигналами.

Если задан сигнал на входе системы и известна характеристика системы, включающая состояние системы в начальный момент времени, то значения сигнала на выходе системы в любой момент времени определяются однозначно.

Таблица 4.1

Представление	Модель	
	«вход–выход»	состояний
Локальное	Обыкновенное дифференциальное уравнение или разностное уравнение	Система разностных или обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, дифференциальное уравнение в частных производных
Глобальное	Ряд Вольтерра (для линейных систем – интеграл Дюамеля)	Общее решение системы разностных или дифференциальных уравнений или уравнения в частных производных

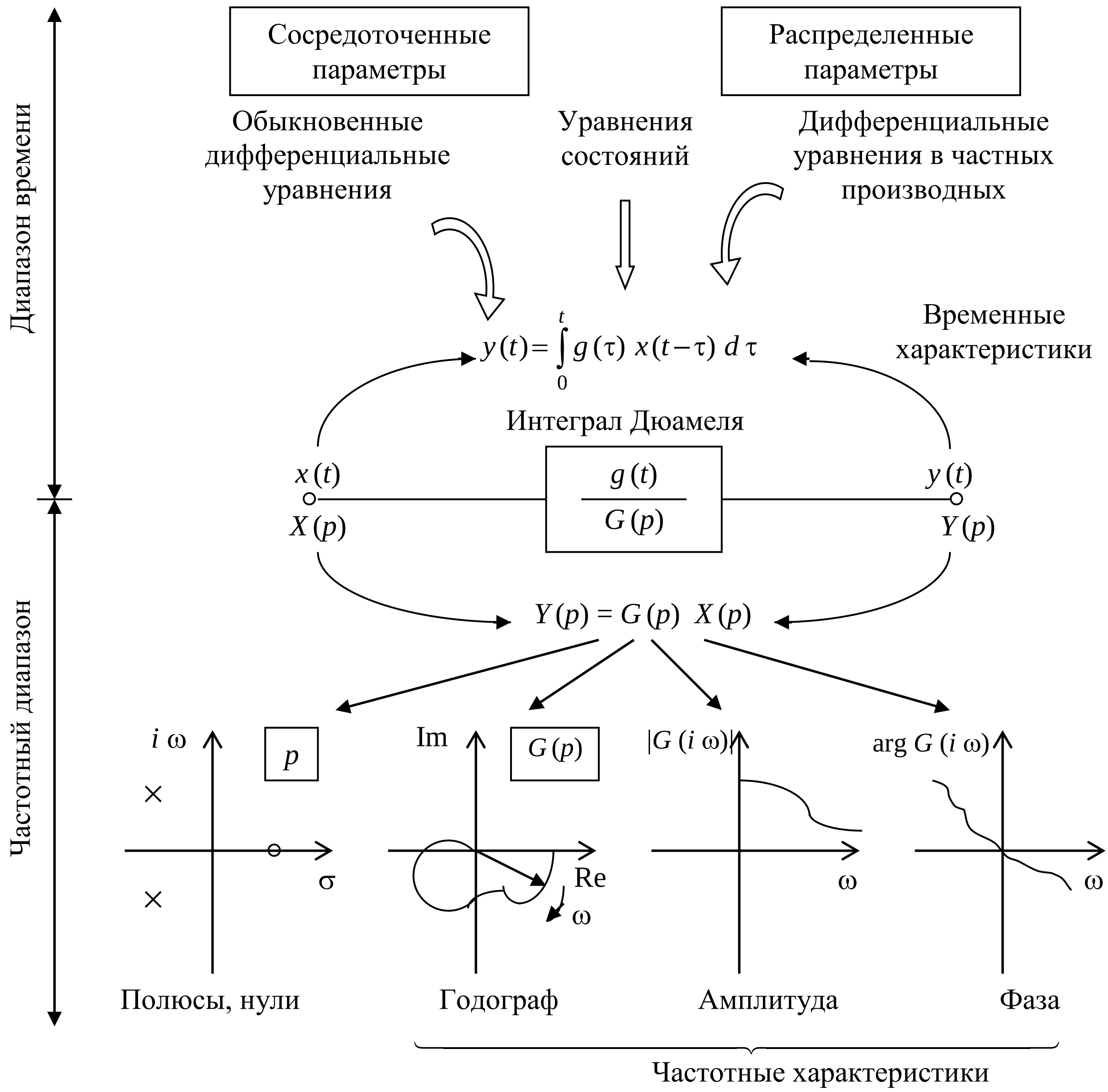

Рис. 4.4. Характеристики линейной динамической системы с непрерывным действием

Модель детерминированной системы под воздействием детерминированного сигнала является идеализацией реальных объектов, так как не учитывает случайные факторы, действующие, как правило, на входе системы (стохастические сигналы, помехи) и(или) внутри системы. При учете этих факторов однозначность соотношения вход–выход нарушается и вместо детерминированного отображения возникает стохастическое.

Представляют интерес следующие виды стохастических отображений вход–выход: а) характеристика системы детерминирована, но входной сигнал, а, следовательно, и выходной сигнал – стохастические; б) характеристика системы изменяется случайным образом (представляется случайным процессом, в частности, квазидетерминированным), сигнал на входе – детерминированный, а сигнал на выходе – стохастический; в) и сигнал на входе, и характеристика системы, а, следовательно, и сигнал на выходе системы изменяется случайным образом. Случай а) будем называть детерминированной системой под стохастическим воздействием, случай б) – системой со стохастическим поведением под детерминированным воздействием, случай в) – системой со стохастическим поведением под стохастическим воздействием. Все три случая будем объединять общим понятием стохастической системы.

Прямое и косвенное описание стохастических систем. Существуют два подхода к описанию стохастических систем. При первом подходе устанавливается связь входных и выходных сигналов в форме функциональной зависимости случайных величин на выходе системы от случайных величин на входе (для статических стохастических систем). Так как такое описание системы использует сами значения сигналов, то назовем его *прямым описанием стохастической системы*.

При втором подходе система описывается соотношением между вероятностными мерами μ_ξ и μ_η, определенными на множествах входных и выходных сигналов. Так как такое описание использует не сами значения сигналов, а их вероятностные характеристики, то назовем его *косвенным описанием стохастической системы*.

Введение понятия прямого и косвенного описания стохастических систем иллюстрируется на рис. 4.5, *а*, *б*.

Динамические стохастические системы с дискретным временем. Основные модели. Для описания динамических детерминированных систем используются модели типа «вход–выход» и типа «вход–состояние–выход» (или, кратко, модель состояния). Модель состояния допускает локальное или глобальное представления. При локальном представлении соотношение «вход–выход» определяется в неявном виде разностными или дифференциальными уравнениями, которые содержат значения $x(t)$ входного сигнала, $y(t)$ выходного сигнала и $z(t)$ внутреннего состояния только для текущего значения времени t. При глобальном представлении соотношение «вход–выход» определяется в виде явной функциональной зависимости выходного сигнала $y(t)$ от отрезка входного сигнала x_{t0} и состояния $z(t_0)$.

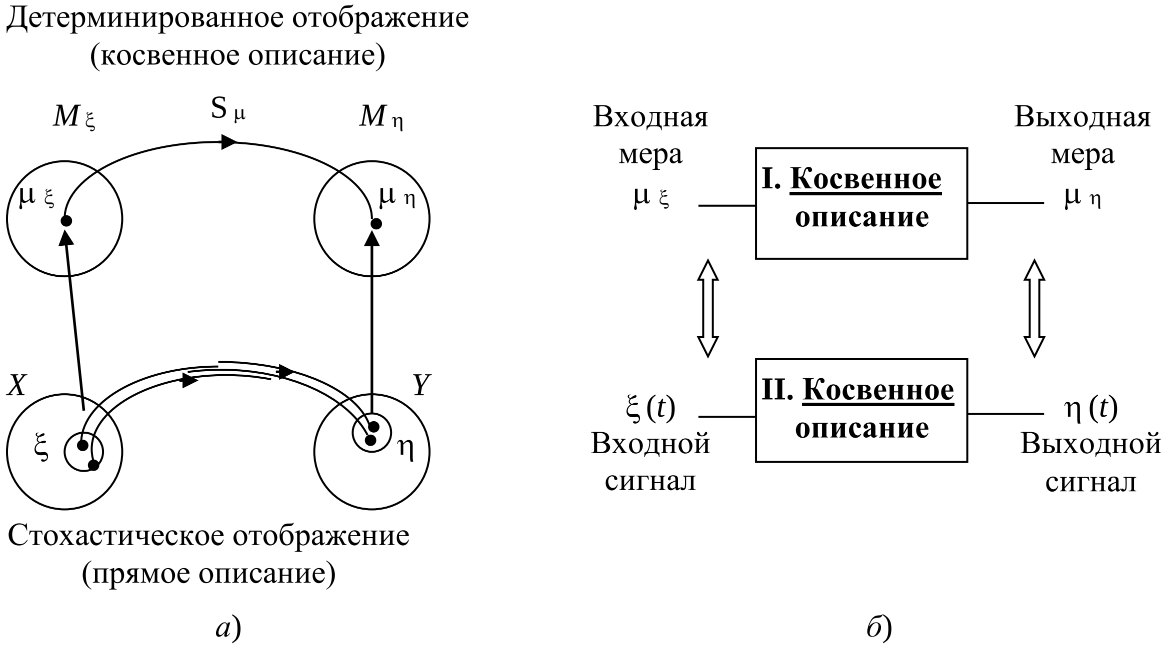

Рис. 4.5. Прямое и косвенное описание стохастической системы:

а – отображения; *б* – характеристики прямого и косвенного описания

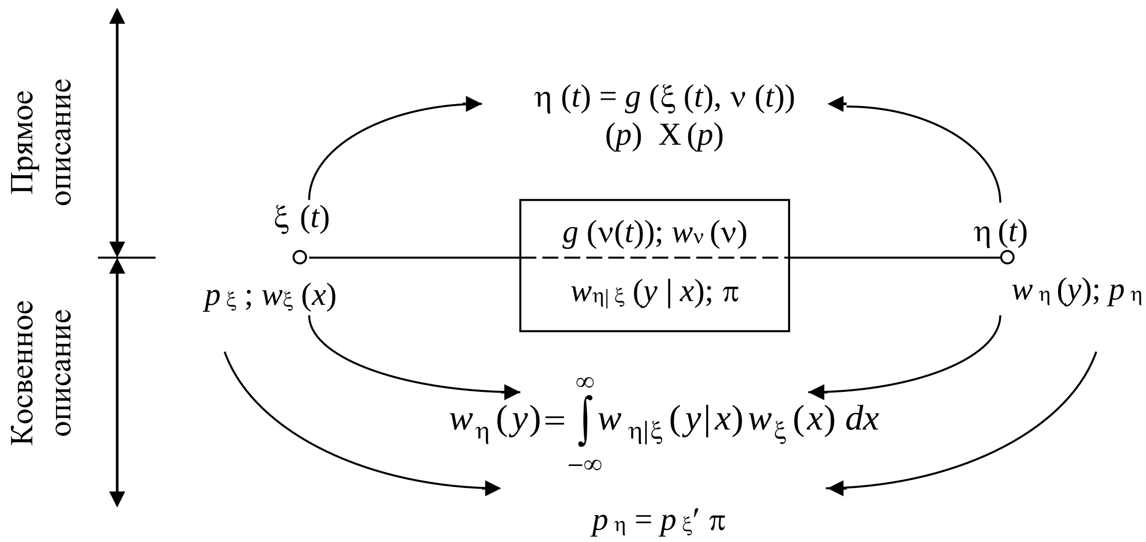

Рис. 4.6. Общая схема взаимосвязи прямого и косвенного описания статических стохастических систем

Для описания динамических стохастических систем указанные детерминированные соотношения следует заменить вероятностными. При прямом описании динамической стохастической системы вводятся внутренние случайные величины, отражающие стохастическое поведение системы, а при косвенном описании определяются соотношения между вероятностными характеристиками сигналов на входе и на выходе системы.

Исследование общих моделей динамических стохастических систем (указанных двух типов) представляет сложную задачу. Поэтому часто ограничиваются исследованием моделей при дополнительных условиях. Такими ограничивающими условиями могут быть: а) специальные классы сигналов на входе системы, например гауссовские, с независимыми приращениями, или так называемые линейные сигналы; б) специальные классы динамических систем, прежде всего, линейные системы; в) специальные виды вероятностных характеристик при косвенном описании, например, смешанные моменты, простейшие из которых – корреляционная функция.

Динамические системы и марковские сигналы. Марковские случайные последовательности появляются при прямом описании динамической стохастической системы с дискретным временем, когда входным сигналом является случайный процесс с независимыми значениями (рис. 4.7).

Энергетические характеристики сигнала на выходе линейной системы. Динамическая стохастическая система характеризовалась: а) прямым описанием в виде стохастического дифференциального уравнения; б) косвенным описанием в виде уравнения Колмогорова – Фоккера – Планка. Эта последовательность определения характеристик системы выделена на рис. 4.8 белыми стрелками. Для характеризации установившегося сигнала на выходе линейной системы часто бывает более адекватной другая последовательность, которая выделена на рис. 4.8 черными стрелками.

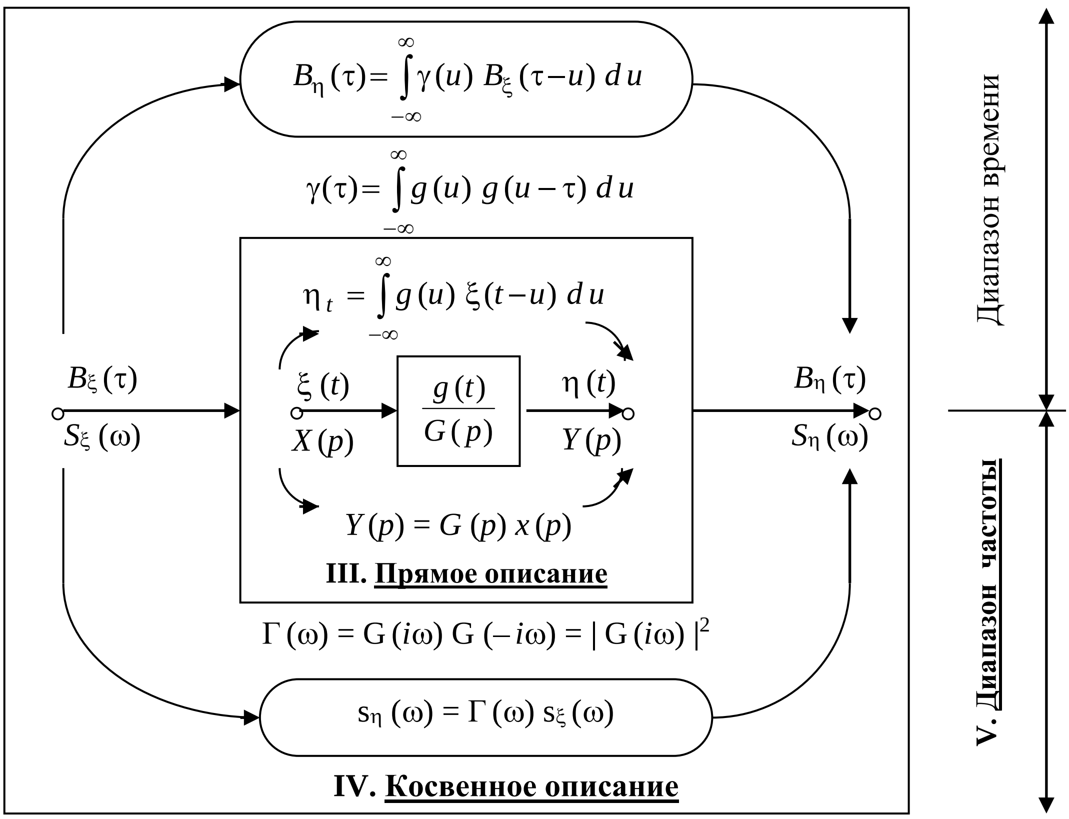

Рис. 4.7. Типовые системные соотношения для стохастических цифровых фильтров

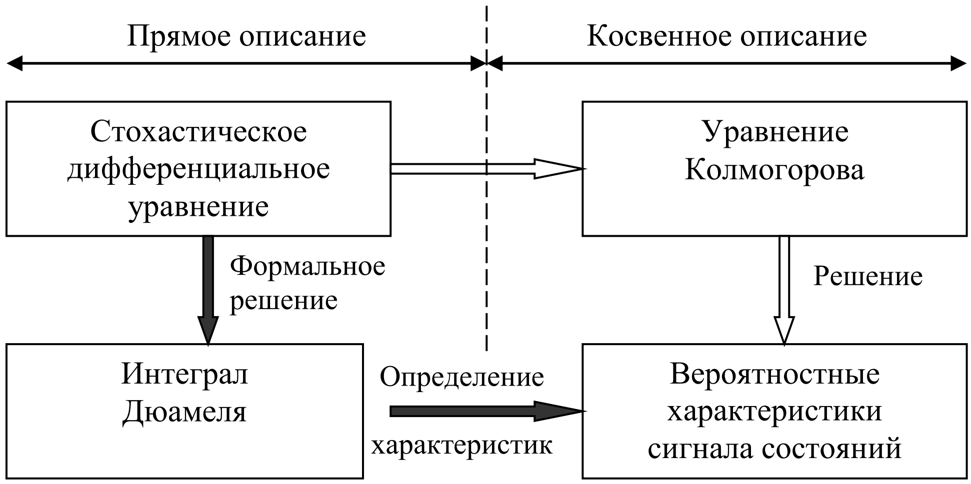

Рис. 4.8. Две последовательности определения вероятностных характеристик выходного сигнала динамической системы

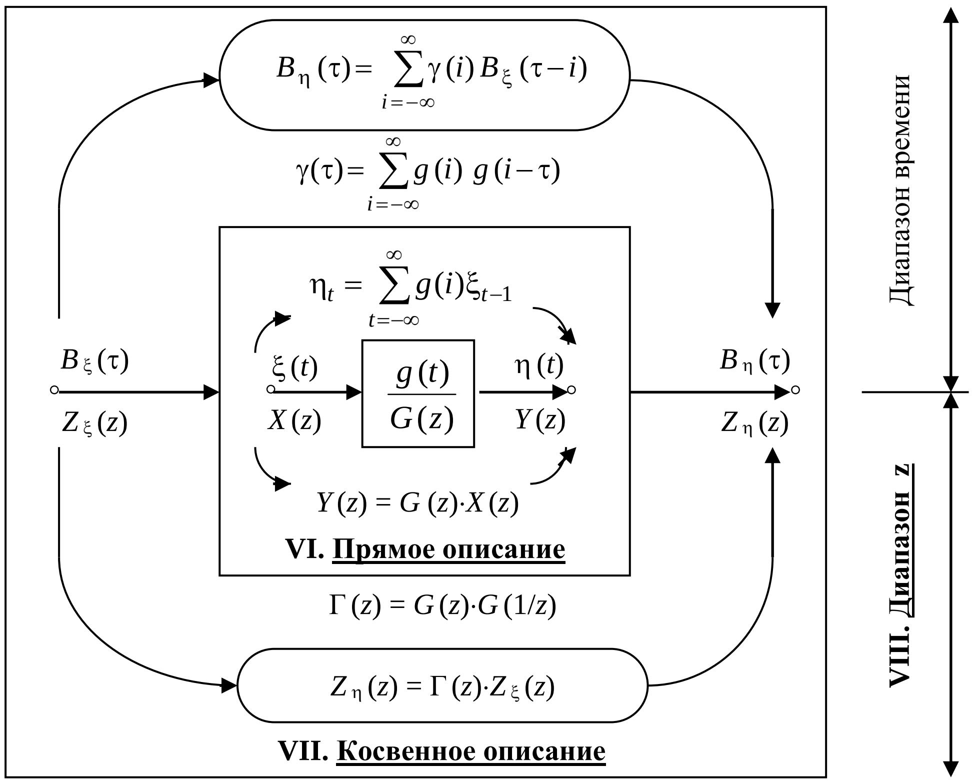

Рис. 4.9. Связь между входными и выходными характеристиками линейной системы

В качестве полезного обзора основных соотношений для прямого и косвенного описания стохастических динамических систем включили табл. 4.2, которая содержит эти соотношения как для дискретных, так и для аналоговых систем. В каждой из четырех клеток таблицы, соответствующих четырем типам систем, приведены соотношения, представляющие прямое (в верхней половине клетки) и косвенное (в нижней половине клетки) описание системы.

Таблица 4.2

Время	Множество состояний	
	Дискретное	Континуальное
Дискретное	$\zeta_{t+1} = \lambda\,(\zeta_t, \xi_t)$ λ – дискретная функция, $\xi_t, \zeta_t, \zeta_{t+1}$ – дискретные случайные величины	$\zeta_{t+1} = \lambda\,(\zeta_t, \xi_t)$ λ – непрерывная функция, $\xi_t, \zeta_t, \zeta_{t+1}$ – непрерывные случайные величины
	$p_\zeta\,(t+1) = \pi' p_\zeta\,(t)$ – распределение вероятностей	$w_\zeta\,(z, t+1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(z\,z', t)\, w_\zeta\,(z', t)\, d\,z'$ – плотность вероятности
	Стохастические автоматы	Стохастические цифровые фильтры
Непрерывное	$\dfrac{d\,\zeta}{d\,t} = f\,(\zeta, t)\,\xi\,(t)$ $\xi(t)$ – пуассоновский белый шум	$\dfrac{d\,\zeta}{d\,t} = f\,(\zeta, t) + g\,(\zeta, t)\,\xi\,(\mathrm{t})$
	$\dfrac{d\,p}{d\,t} = \mathrm{A}' p_\xi$	$\dfrac{\partial w_\zeta\,(z, t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial t}(A_1\,(z, t)\; w_\zeta\,(z, t) +$ $+\dfrac{N_0}{2}\,\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\;(A_2\,(z, t)\; w_\zeta\,(z, t))$
	Аналого-дискретные стохастические системы	Аналоговые стохастические системы

Автоматы. Конечный автомат определяется как совокупность следующих пяти объектов:

1) S – конечное множество состояний;

2) I – конечное множество входных символов;

3) O – конечное множество выходных символов;

4) σ – отображение $S{\times}I$ в S; эта функция определяет по текущему состоянию и входу следующее состояние и называется *функцией изменения состояний* или *функцией переходов*;

5) δ – отображение $S{\times}I$ в O; эта функция определяет по текущему состоянию и входу текущее значение выхода и называется *выходной функцией*.

Если δ зависит как от S, так и от I, то конечный автомат называется автоматом Мили; если же δ зависит только от S, – то автоматом Мура. В автомате Мура, в отличие от автомата Мили, каждый выходной символ формируется просто по состоянию автомата, а выходные символы при этом не учитываются.

Диаграмма состояний (диаграмма изменения состояний) G (M) конечного автомата $M = (S, I,$ O, σ, $\delta)$ определяется следующим образом. Число вершин G (M) равно $| S |$. Между вершинами и состояниями из S устанавливается взаимно однозначное соответствие; при этом каждой вершине присваивается имя соответствующего ей состояния. Вершина с именем s обычно просто называется вершиной s. Из каждой вершины s проводятся ориентированные ребра во все вершины σ (s, a), $a \in I$. Ребру, проведенному из вершины s в вершину σ (s, a), присваивается имя $a/[\delta\ (s, a)]$. Других ребер диаграмма состояний $G(M)$ не имеет.

В приведенном определении конечного автомата σ и δ считаются всюду определенными на $S{\times}I$ функциями. Если либо обе функции σ и δ, либо одна из них определены на $S{\times}I$ не всюду, т.е. являются частичными функциями, то конечный автомат называется *частично определенным*. Такие конечные автоматы являются моделями многих широко используемых на практике устройств. Если же обе функции, σ и δ, определены всюду, то конечный автомат называют *полностью определенным*. В дальнейшем термином «конечный автомат» будет обозначаться полностью определенный конечный автомат.

4.3. МЕТОДЫ СТРУКТУРИЗАЦИИ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Организация состоит из семейства взаимодействующих, иерархически расположенных элементов, наделенных правом принимать решения.

Структура должна отображать самые важные характеристики организации, а именно: 1) что организация состоит из взаимосвязанных подсистем, имеющих право принимать решения; 2) что эти подсистемы образуют иерархию. Поэтому теоретико-системная модель организации – это многоэшелонная система.

Теории организации можно разделить на три категории: *классические* (структурные), *поведенческие* (мотивационные) и *системно-ориентированные*. Сопоставим эти направления, укажем тот вклад, который дает многоуровневый системный подход в решении следующих вопросов: 1) характерные особенности отдельно взятых членов организации – ее *участников*; 2) способ отображения структуры организации; 3) применимые в этой области инструменты и методы исследования.

Концептуализация. Страты, слои, эшелоны. Понятие многоуровневой иерархической структуры нельзя определить одной краткой и сжатой формулировкой. Поэтому укажем несколько существенных характеристик, присущих всем иерархическим системам. К ним относятся: последовательное вертикальное расположение подсистем, составляющих данную систему (вертикальная декомпозиция); приоритет действий или право вмешательства подсистем верхнего уровня; зависимость действий подсистем верхнего уровня от фактического исполнения нижними уровнями своих функций.

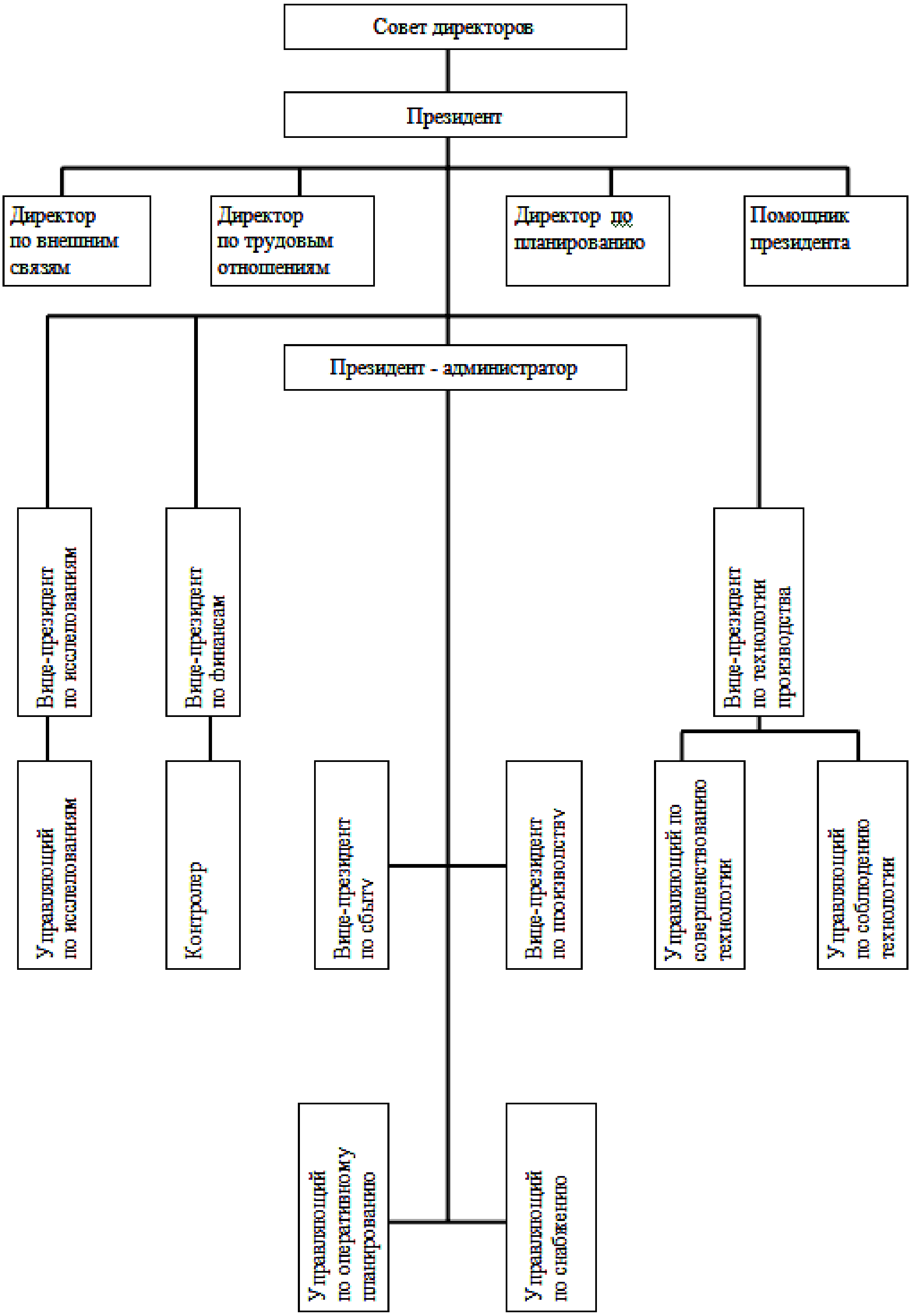

Рис. 4.10. Организационная структура компании

Вертикальная соподчиненность. Любая иерархия состоит из вертикально соподчиненных подсистем; это означает, что вся система представляет собой семейство взаимодействующих подсистем, как показано на рис. 4.11. Под «системой» или «подсистемой» здесь понимается просто осуществление процесса преобразования входных данных в выходные. Это преобразование может либо быть динамическим, протекающим чаще всего в реальном масштабе времени процессом с заранее заданным детерминированным алгоритмом и последовательно выполняемыми операциями, либо представлять собой так называемую процедуру «решения проблемы»; в последнем случае декомпозиция носит концептуальный характер: здесь мы имеем совокупность подлежащих выполнению операций, которые могут быть выполнены в разное время и в разной последовательности (системы с недетерминированным алгоритмом).

Входы и выходы могут быть распределены по всем уровням, хотя чаще всего обмен со средой происходит на более низком (или самом низком) уровне.

Право вмешательства. На деятельность подсистемы любого уровня непосредственное воздействие оказывают вышерасположенные уровни, чаще всего ближайший старший уровень.

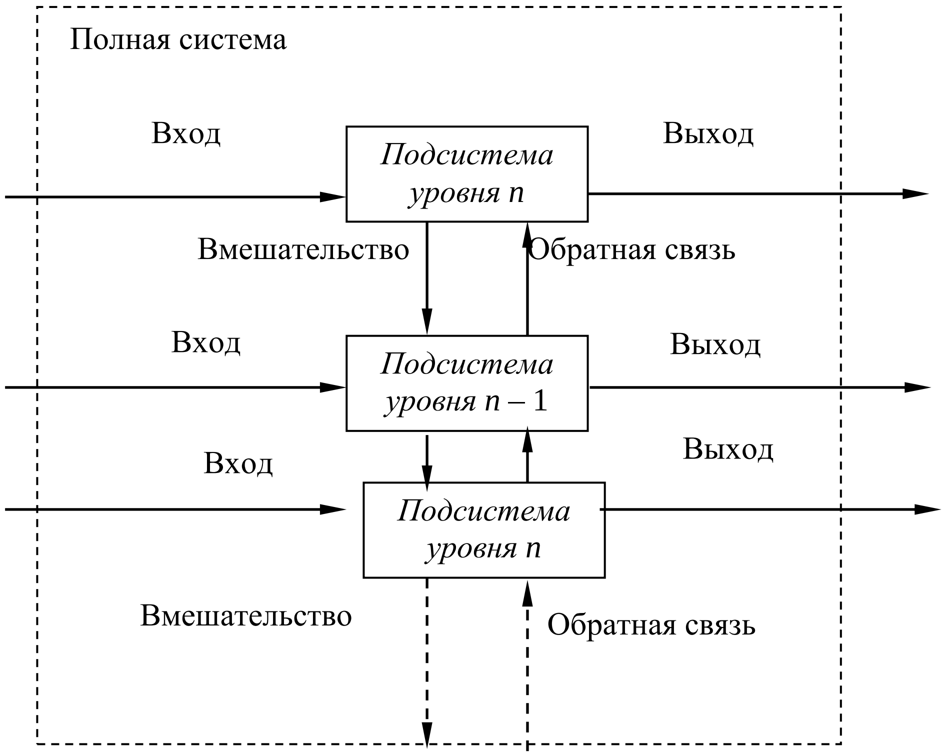

Рис. 4.11. Вертикальное взаимодействие между уровнями иерархии

Это воздействие носит для нижележащих уровней обязывающий характер и в нем находит свое выражение приоритет действий и целей более высоких уровней. В дальнейшем мы это воздействие на более низкие уровни будем называть *вмешательством*. Чтобы подчеркнуть значение приоритета в установлении порядка действий, мы будем называть элементы верхнего и нижнего уровней соответственно *вышестоящими* (supremal) и *нижестоящими* (infimal).

Взаимозависимость действий. Так как понятие приоритета подразумевает, что вмешательство *предшествует* действиям более низких уровней, успешность работы верхнего уровня зависит не только от осуществляемых им действий, но и от соответствующих реакций нижних уровней, точнее от их суммарного эффекта. Поэтому можно считать, что качество работы всей системы обеспечивается обратной связью, т.е. реакциями на вмешательство, информация о которых направляется снизу вверх (рис. 4.11).

Основные виды иерархий. Мы введем здесь три типа иерархических систем, которые в некотором смысле отражают классификацию иерархий.

Различают три понятия уровней: а) уровень описания, или абстрагирования; б) уровень сложности принимаемого решения; в) организационный уровень. Для их различения введем следующие термины: «страта», «слой» и «эшелон». Термин «уровень» сохраним как родовой, относящийся к любому из этих понятий, когда нет необходимости в дальнейших уточнениях,

Страты. Уровни описания, или абстрагирования. Система задается семейством моделей, каждая из которых описывает поведение системы с точки зрения различных уровней абстрагирования. Для каждого уровня существует ряд характерных особенностей и переменных, законов и принципов, с помощью которых и описывается поведение системы. Чтобы такое иерархическое описание было эффективным, необходима как можно большая независимость моделей для различных уровней системы.

Чтобы отличить эту концепцию иерархии от других, мы будем использовать для нее термин *стратифицированная система*, или *стратифицированное описание*. Уровни абстрагирования, включающие стратифицированное описание, будем называть *стратами*. На каждой страте в иерархии структур имеется свой собственный набор переменных.

Рассмотрим модель электронной вычислительной машины. Ее функционирование обычно описывается не менее чем на двух стратах (рис. 4.12). На первой страте система описывается на языке физических законов, управляющих работой и взаимодействием ее составных частей, в то время как на второй страте мы имеем дело с абстрактными нефизическими понятиями, такими, как двоичные разряды или информационные потоки.

Другой пример стратифицированной системы, созданной человеком, – автоматизированный промышленный комплекс. Полностью автоматизированный промышленный комплекс обычно моделируют на трех стратах: а) физические процессы обработки материалов и преобразования энергии; б) управление и обработка информации; в) экономика производства с точки зрения его производительности и прибыльности (рис. 4.13).

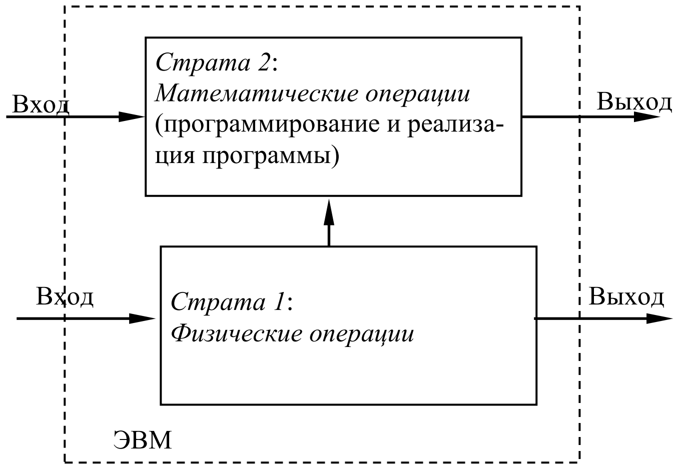

Рис. 4.12. Стратифицированное представление ЭВМ с помощью двух страт

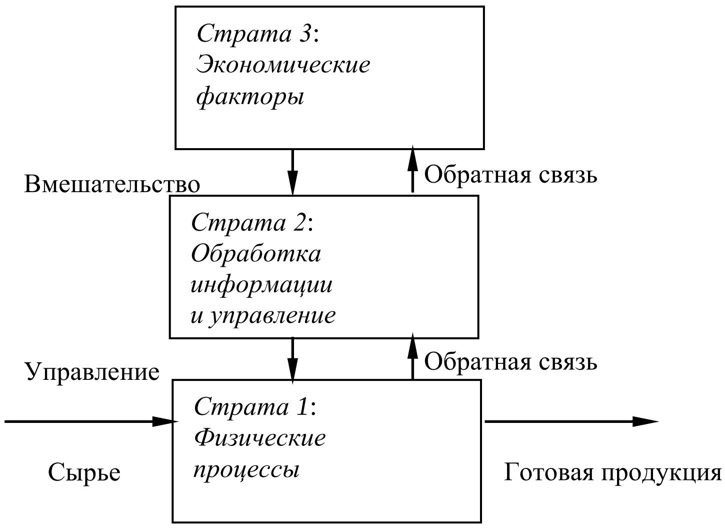

Рис. 4.13. Стратифицированное представление автоматизированного промышленного производства

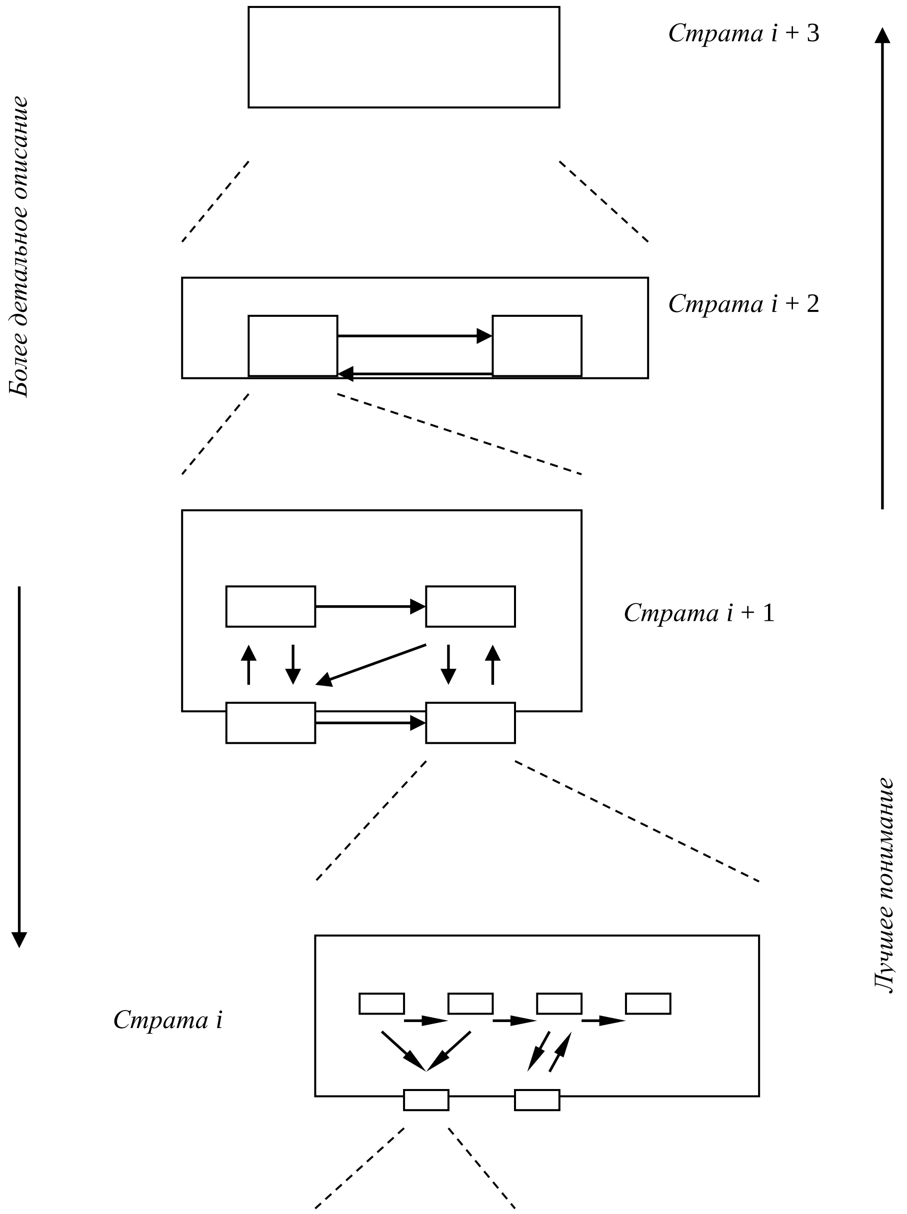

Рис. 4.14. Взаимосвязь между стратами: система для данной страты является подсистемой для следующей более высокой страты

Общие характеристики стратифицированного описания систем.

1. Выбор страт, в терминах которых описывается данная система, зависит от наблюдателя.

2. Аспекты описания функционирования системы на различных стратах в общем случае не связаны между собой, поэтому принципы и законы, используемые для характеристики системы на любой страте, в общем случае не могут быть выделены из принципов, используемых на других стратах.

3. Существует асимметричная зависимость между условиями функционирования системы на различных стратах. Требования, предъявляемые к работе

системы на любой страте, выступают как условия или ограничения деятельности на нижестоящих стратах. Ход реального процесса определяется требованиями к поведению системы на верхней страте; для надлежащего функционирования системы на данной страте все нижние страты должны работать правильно. Это означает также наличие в иерархических системах обратной связи с получаемыми результатами.

4. На каждой страте имеется свой собственный набор терминов, концепций и принципов.

5. Понимание системы возрастает при последовательном переходе от одной страты к другой: чем ниже мы спускаемся по иерархии, тем более детальным становится раскрытие системы, чем выше мы поднимаемся, тем яснее становится смысл и значение всей системы.

Слои. Уровни сложности принимаемого решения. Другое понятие иерархии относится к процессам принятия сложных решений. Особенности:

1. Когда приходит время принимать решения, принятие и выполнение решения нельзя откладывать;

2. Неясность относительно последствий различных альтернативных действий и отсутствие достаточных знаний о имеющихся связях препятствуют достаточно полному формализованному описанию ситуации, необходимому для рационального выбора действий.

Сложная проблема принятия решения разбивается на семейство последовательно расположенных более простых проблем, так что решение всех проблем позволяет решить и исходную проблему. Такую иерархию мы будем называть *иерархией слоев принятия решений*, а всю систему принятия решений (обозначенную на рис. 4.15 через D) – *многослойной системой* (*принятия решений*).

Рассмотрим теперь пример автоматизированной системы принятия решений, в которой слои иерархии выступают более отчетливо.

Пример представляет то, что мы называем функциональной иерархией принятия решений или управления.

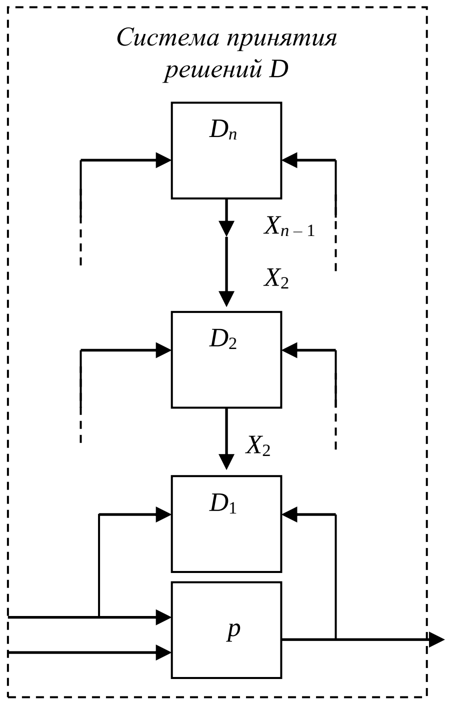

Рис. 4.15. Многослойная иерархия системы принятия решений

Эта иерархия возникает естественным образом в связи с тремя основными аспектами проблемы принятия решения в условиях полной неопределенности: 1) выбором стратегии, которая должна быть использована в процессе решения; 2) уменьшением или устранением неопределенности; 3) поиском предпочтительного или допустимого способа действий, удовлетворяющего заданным ограничениям.

Функциональная иерархия, изображенная на рис. 4.16, состоит из трех слоев:

1. *Слой выбора*: задача этого слоя – выбор способа действий m. Принимающий решение элемент на этом слое получает внешние данные (информацию) и, применяя тот или иной алгоритм (определяемый на верхних слоях), находит нужный способ действий. Алгоритм может быть определен непосредственно как функциональное отображение T, дающее решение для любого набора начальных данных, или косвенно, с помощью процесса поиска. Для примера предположим, что заданы выходная функция P и функция оценки G, а выбор действий, скажем $\hat{m}$, основан на применении функции оценки G и P. Используя теоретико-множественный подход (как это принято в общей теории систем), выходную функцию можно определить как отображение P:

$$M \times U \to Y,$$

где M – множество альтернативных действий; Y – множество возможных результатов на выходе (или «выходов»), а U – множество неопределенностей, адекватно отражающее отсутствие знаний о зависимости между действием m и выходом y. Аналогично функция оценки G есть отображение G:

$$M \times Y \to V,$$

где V – множество величин, которые могут быть связаны с характеристиками качества работы системы.

2. *Слой обучения, или адаптация*. Задача этого слоя – конкретизации множества неопределенностей U, с которым имеет дело слой выбора. Следует заметить, что множество неопределенностей U рассматривается здесь как множество, включающее в себя все незнание о поведении системы и отражающее все гипотезы о возможных источниках и типах таких неопределенностей. U получают, конечно, с помощью наблюдений и внешних источников информации.

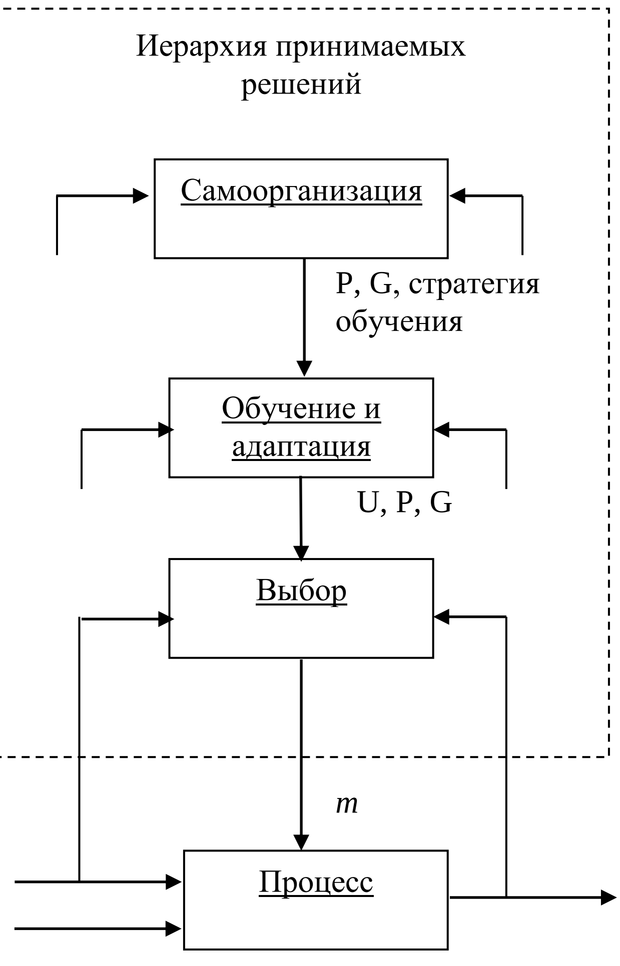

Рис. 4.16. Функциональная многослойная иерархия решений

Назначение второго слоя – сужение множества неопределенностей U. Если система и окружающая среда стационарны, то множество неопределенностей может быть предельно сужено (до единственного элемента), что соответствует идеальному обучению, как в эксперименте, проводимом в контролируемых условиях.

3. *Слой самоорганизации*. Этот слой должен выбирать структуру, функции и стратегии, используемые на нижележащих слоях, таким образом, чтобы по возможности приблизиться к глобальной цели (обычно определяемых в терминах, которые трудно сделать операционными). Если общая цель не достигается, этот слой может изменить функции P и G на первом слое или стратегию обучения на втором слое в случае неудовлетворительности оценки неопределенности.

Многоэшелонные системы: *организационные иерархии*. Это понятие иерархии подразумевает, что: 1) система состоит из семейства четко выделенных взаимодействующих подсистем; 2) некоторые из подсистем являются принимающими решения (решающими) элементами и 3) принимающие решения элементы располагаются иерархически в том смысле, что некоторые из них находятся под влиянием или управляются другими решающими элементами.

Блок-схема системы такого типа приведена на рис. 4.17. Уровень в такой системе называется эшелоном. Эти системы мы будем называть также многоэшелонными, многоуровневыми или многоцелевыми в связи с тем, что различные входящие в систему элементы, обладающие правом принятия решения, имеют обычно «конфликтные» (т.е. противоречащие одна другой) цели. Это противоречие целей является не только побочным результатом эволюции и объединения различных подсистем в одну систему; можно показать, что оно (в некотором смысле и до некоторой степени) даже необходимо для эффективного управления системой в целом.

Для *эффективного использования многоуровневой структуры существенно*, *чтобы элементам принятия решения была предоставлена некоторая свобода действий*; должно быть проведено распределение усилий по принятию решений между элементами различных уровней. Только при этом условии будет оправдано само существование иерархии.

Изложенные соображения приводят к концептуально важной классификации систем принятия решений; по характеру иерархического расположения образующих систему элементов (рис. 4.18) можно указать следующие категории систем принятия решений: а) одноуровневые одноцелевые системы, б) одноуровневые многоцелевые системы, в) многоуровневые многоцелевые системы.

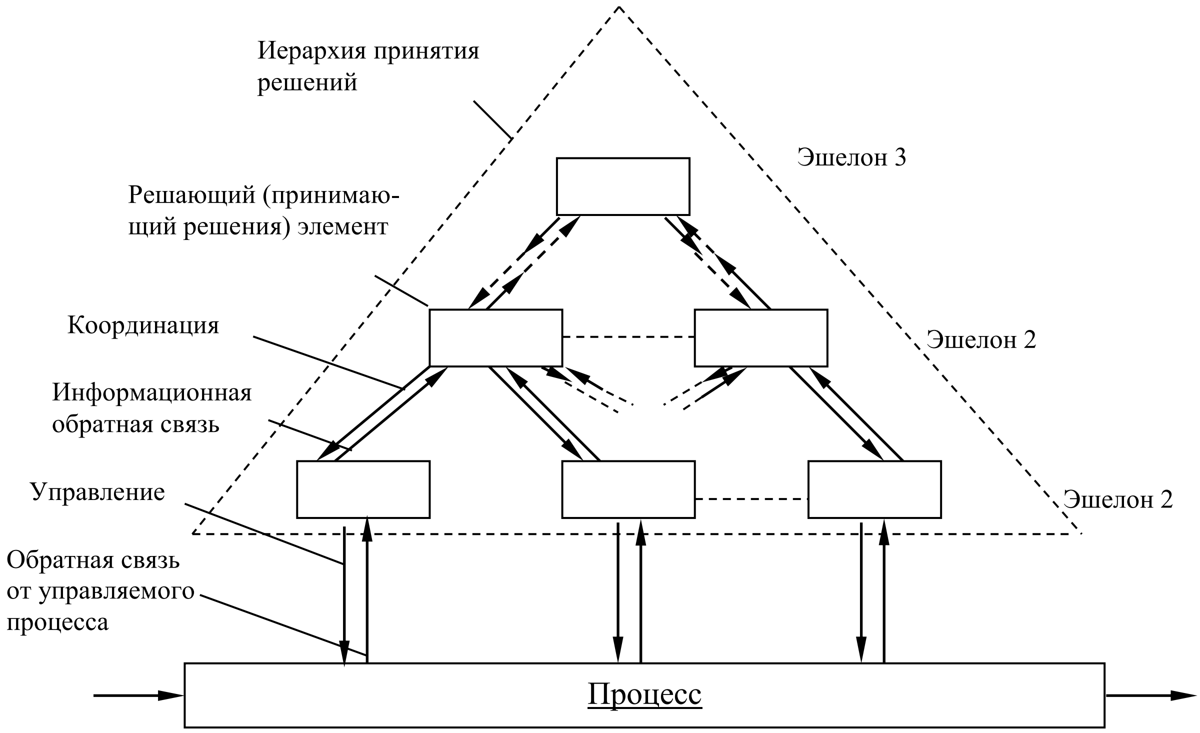

Рис. 4.17. Многоуровневая организационная иерархия; многоэшелонная система

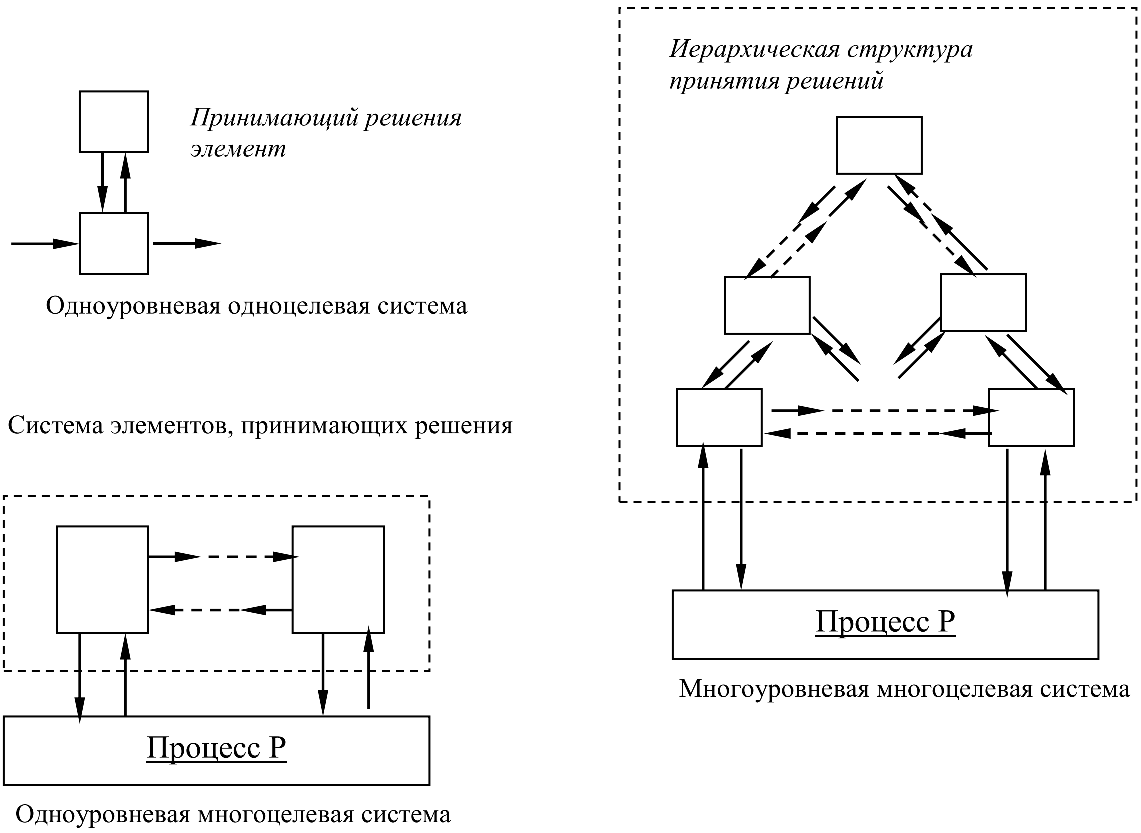

Рис. 4.18. Классификация систем принятия решений (управления)

В первом случае цель определяется для всей системы, и все переменные выбираются так, чтобы обеспечить достижение этой цели.

Класс многоуровневых многоцелевых систем характеризуется наличием иерархических отношений между принимающими решения элементами этой системы. Существование какого-то высшего командного элемента – принципиальная отличительная особенность таких систем; проблема принятия решений на уровне этого элемента является основной проблемой в теории многоуровневых систем.

Связь между различными понятиями уровня. Следует четко определить, какое понятие уровня используется при описании иерархической системы, так как три введенных выше понятия имеют каждое свою область применения, а именно: концепция страт введена для целей моделирования, концепция слоев – для вертикальной декомпозиции решаемой проблемы на подпроблемы, концепция же эшелонов относится к взаимной связи между образующими систему элементами принятия решения. Различие этих трех понятий, пожалуй, лучше всего можно проиллюстрировать, рассмотрев взаимодействие этих концепций при описании многоуровневых систем. Мы рассмотрим три случая.

Проектирование многоэшелонной системы. Предположим, что мы строим многоэшелонную (организационного типа) систему. Первая возникающая проблема – распределение задач или ролей, которые должны выполняться различными уровнями или отдельными элементами.

Используются иерархические концепции страты и слоя. С одной стороны, происходит стратификация модели всей системы, а с другой – совершается декомпозиция стоящей перед системой задачи на слои. Задания элементам, образующим многоэшелонную систему, в этом случае определяют по отношению к моделям и решаемым проблемам, проявляющимся на соответствующей страте или слое (рис. 4.19).

В этой связи следует опять напомнить, что не существует однозначного соотношения между стратами, эшелонами и слоями. Задания для нескольких эшелонов могут быть определены из модели одной и той же страты, в то время как решаемая проблема на данном слое может быть распределена между рядом эшелонов, более того, задание для эшелона может содержать элементы проблем, принадлежащих не одному, а ряду слоев решаемой проблемы.

Многослойные элементы в многоэшелонной системе. Концепция многослойной системы была введена применительно к некоторой решаемой проблеме, а вовсе не обязательно для проблемы, стоящей перед всей системой. Следовательно, она может быть и решаемой проблемой, стоящей перед отдельным элементом, являющимся членом большой системы.

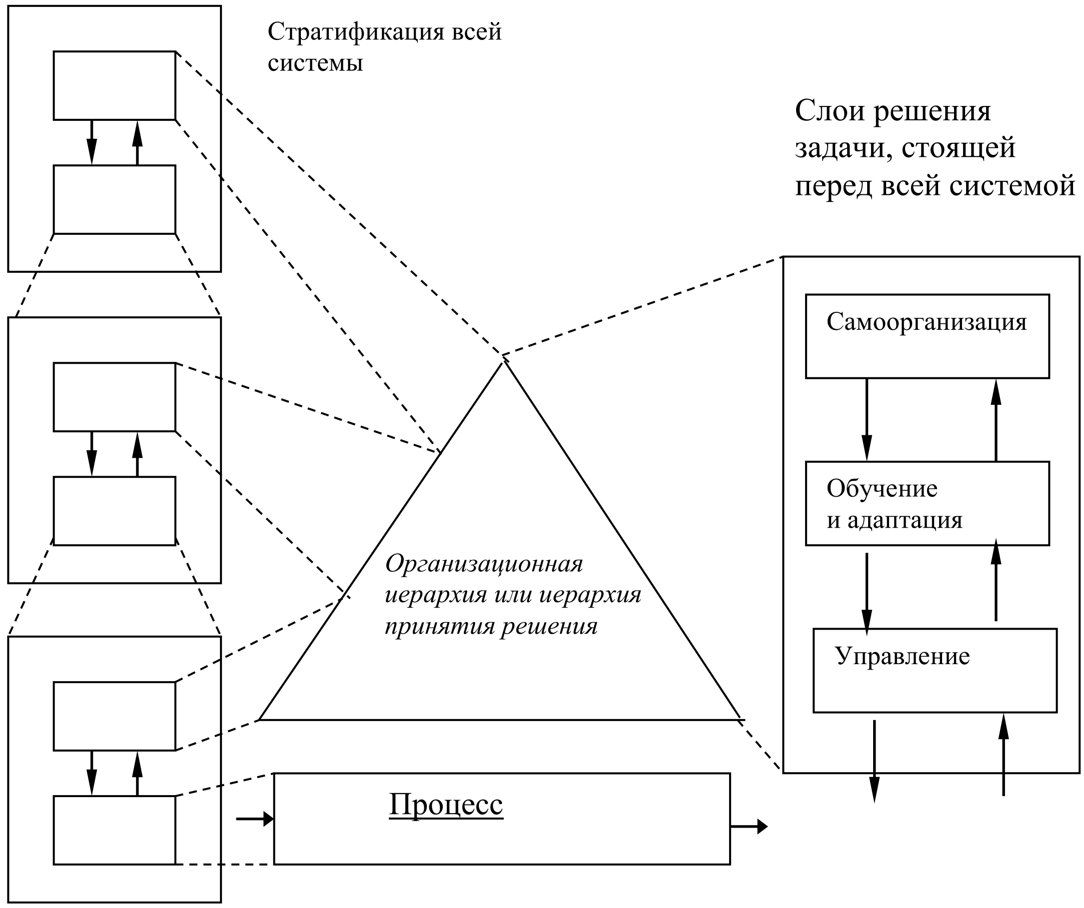

Рис. 4.19. Вертикальное распределение задач для организационной иерархии

Так, в примере двухуровневой системы, показанной на рис. 4.20, каждый принимающий решения элемент использует многослойный подход для решения своих собственных, локальных подпроблем. В этом случае говорят, что многослойная иерархия вложена в многоэшелонную систему.

Сложные решающие элементы в многослойной системе. Рассмотрим многослойную систему принятия решений применительно к семейству подпроблем, разрешение которых дает решение исходной проблемы. Каждая из подпроблем может быть достаточно сложной, так что может оказаться целесообразным использовать для ее решения многослойный подход (скажем функциональную иерархию) или даже сформировать отдельную многоэшелонную систему (если, конечно, ресурсы и время позволяют это сделать), которой и будет поручено решение этой конкретной подпроблемы. Рисунок 4.21 иллюстрирует сказанное.

Несмотря на эти различия, существуют и общие для всех трех понятий черты. Некоторые наиболее существенные из них уже были приведены ранее. В основном это были структурные взаимоотношения между подсистемами.

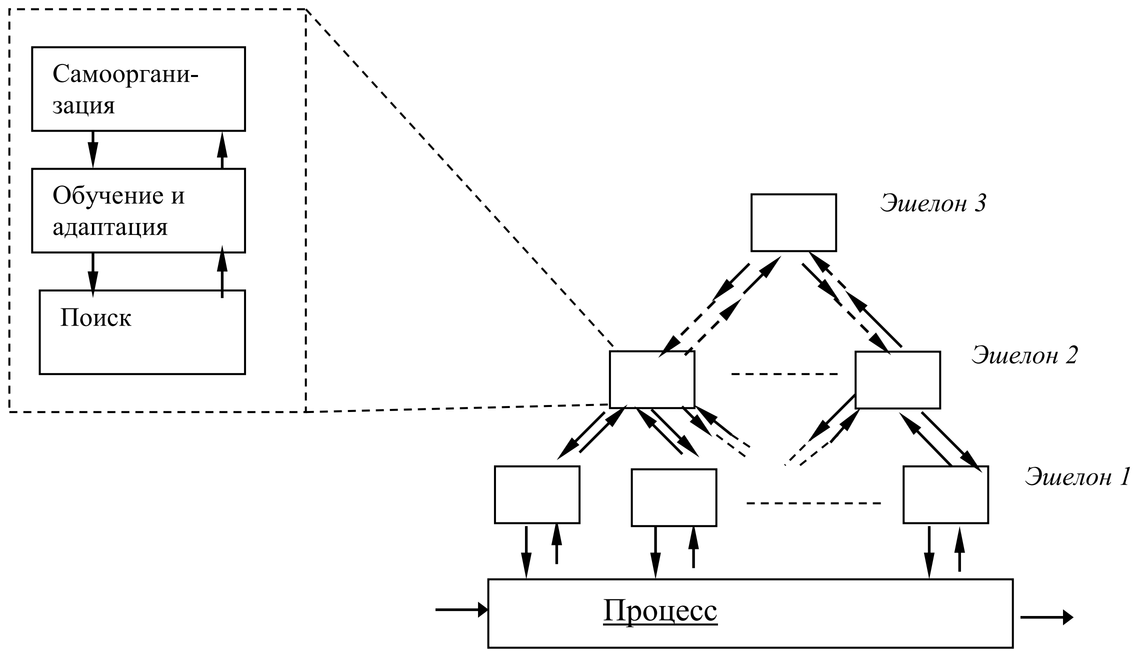

Рис. 4.20. Многослойное представление функционирования решающих элементов многоэшелонной системы

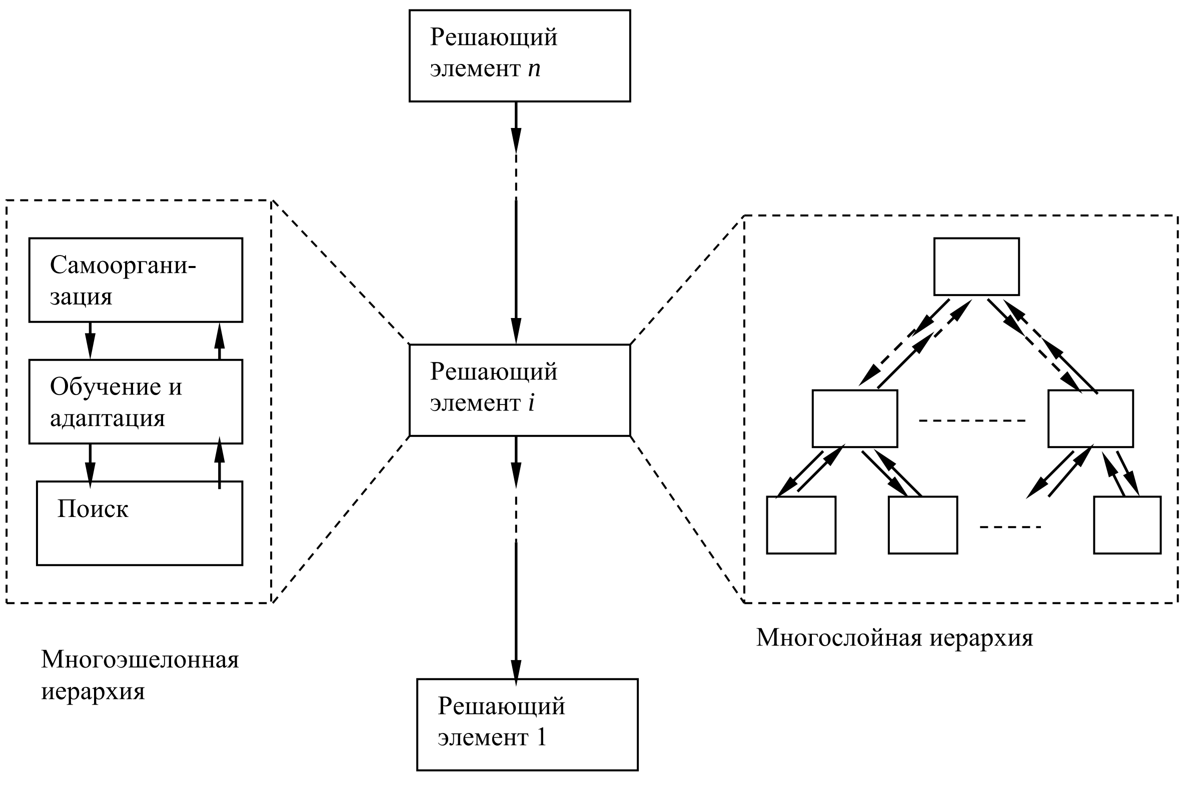

Рис. 4.21. Представление решающих элементов, образующих многослойную иерархию, в виде многослойных и многоэшелонных иерархий

1. *Элемент верхнего уровня имеет дело с более крупными подсистемами или с более широкими аспектами поведения системы в целом*. При многоэшелонной иерархии элемент верхнего уровня является «командным» по отно-

шению к двум или более элементам, и принимаемое им решение координирует их действия в соответствии с целью, определенной для совокупности всех подчиненных ему элементов. Для концепции слоев это следует из ответственности элементов верхнего уровня за поведением системы в течение более длительных промежутков времени. Чтобы собрать информацию, необходимую для сужения множества неопределенностей, слой обучения должен проводить наблюдения в течение ряда периодов принятия решения на первом слое. Чтобы изменить структуру стратегии принятия решений, третий слой (слой самоорганизации) должен наблюдать за действиями нижележащих слоев в течение еще большего периода времени, так как для оценки качества стратегии обучения ее следует испытывать по крайней мере несколько раз. Аналогично и для концепции страт: система на любом уровне образуется из подсистем нижних уровней, и, следовательно, более высокая страта имеет дело с более общим аспектом поведения всей системы.

2. *Период принятия решения для элемента верхнего уровня больше, чем для элементов нижних уровней*. Для концепций слоя и страты это очевидно. Однако это утверждение остается верным и для концепции эшелона. А именно: управляющие воздействия, исходящие из вышестоящего элемента, не могут следовать чаще воздействий, подаваемых нижестоящими элементами, поведение которых он координирует; в противном случае он не сможет оценивать достигаемый эффект (координации).

3. *Элемент верхнего уровня имеет дело с более медленными аспектами поведения всей системы*. Это справедливо для всех трех типов уровней и почти непосредственно вытекает из того, что элемент верхнего уровня имеет дело с более широкими аспектами поведения всей системы и имеет большие периоды принятия решений. Верхние уровни не могут реагировать на такие изменения в окружающей среде или самом процессе, которые происходят быстрее изменений, с которыми имеют дело нижние уровни, так как последние реагируют быстрее и имеют дело с более частными, локальными изменениями.

4. *Описания и проблемы на верхних уровнях менее структурированы, содержат больше неопределенностей и более трудны для количественной*

формализации. Проблема принятия решений на верхних уровнях может рассматриваться как более сложная. Конечно, для решения задачи на верхнем уровне могут использоваться приближенные методы, но тогда точность понижается, и следует соблюдать осторожность при интерпретации результатов. В общем случае для любого уровня существует специфический набор средств для решения соответствующих задач. Например, в многослойной иерархии у каждого слоя существует свой собственный набор методов и алгоритмов: на слое выбора – это управление с обратной связью и численные методы оптимизации; на слое адаптации преобладают статистические методы или методы распознавания образов; на слое самоорганизации используются эвристические методы. Задачи верхнего слоя не удается поставить так, чтобы они имели простое численное решение. Поэтому на практике обычно прибегают к «вмешательству в практических ситуациях», т.е. оценивают общую характеристику и вносят структурные изменения лишь в случае, когда характеристики ухудшаются до такой степени, что изменение становятся необходимым. В общем случае, однако, нет априорной гарантии, что изменение приведет к действительному улучшению характеристики.

Рассмотрим двухуровневую систему принятия решений (рис. 4.22), имеющую один вышестоящий (координирующий) элемент и n подчиненных ему (нижестоящих) элементов. Такая система представляет специфический интерес для теории многоуровневых систем по следующим причинам:

а) это простейший тип систем, в котором проявляются все наиболее существенные характеристики многоуровневой системы;

б) более сложные многоуровневые системы могут быть построены из двухуровневых подсистем, как из модулей. Итак, мы будем исследовать взаимоотношения между уровнями на примере двухуровневой системы.

Взаимная зависимость уровней. Взаимодействие между вышестоящим элементом и каждым из нижестоящих элементов таково, что действия (и успех) одного из них зависит от действий другого, как это показано на рис. 4.23.

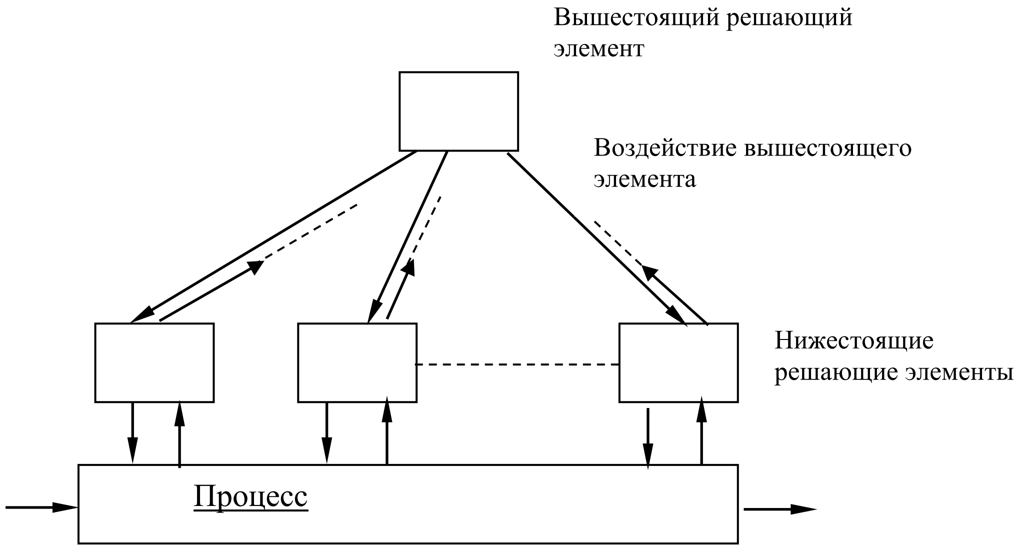

Рис. 4.22. Двухуровневая организационная иерархия

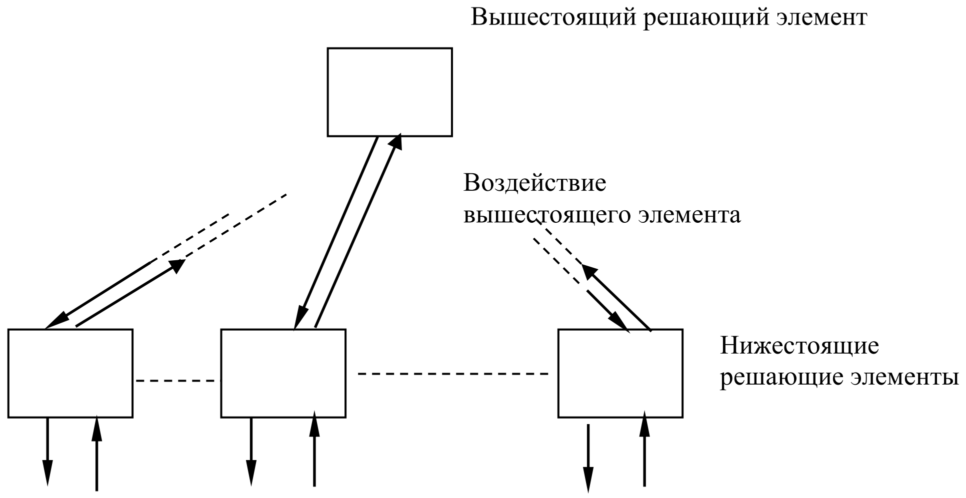

Рис. 4.23. Взаимодействие между вышестоящим и нижестоящими решающими элементами

Так как оба являются элементами, вырабатывающими решения, это означает, что в общем случае проблема, решаемая элементом нижестоящего уровня, зависит от действия вышестоящего элемента, заключающегося в выработке значений определенного параметра; наоборот, проблема, решаемая вышестоящим элементом, зависит от действий (или отклика!) элементов нижестоящего уровня. Очевидно, что получается тупик. Эта дилемма разрешается путем введения приоритета действий вышестоящего элемента. Однако в общем случае следует учитывать динамику: взаимоотношения между вышестоящими и нижестоящими элементами являются динамическими и изменяются во времени.

Времена вмешательства. Вышестоящий элемент может сообщить свое координирующее решение нижестоящим элементам в один из двух моментов времени. Вышестоящий элемент может попытаться скоординировать действия нижестоящих элементов до того, как они примут свои решения. Мы называем такой род действий *вмешательством до принятия решения*. Это основной способ координации, ибо в связи с установленным приоритетом действий задачи, подлежащие решению на уровне нижестоящих элементов, не вполне определены до тех пор, пока не получены конкретизирующие их указания. Вмешательство до принятия решения основано на прогнозировании поведения как самой системы, так и окружающей среды. Более того, вышестоящий элемент в ходе вмешательства до принятия решения определяет функции качества для оценки деятельности элементов нижестоящего уровня и, таким образом, определяет долю участия каждого из них в деятельности ради достижения успеха всей системы.

Через некоторое время после того, как элементы нижестоящего уровня примут и применят свои решения (например, в конце так называемого периода принятия решения), вышестоящий элемент должен снова связаться с нижестоящими. Вышестоящий элемент должен исправить посланные ранее элементам нижестоящего уровня инструкции, если окажется, что допущения, на основе которых эти инструкции были выработаны, стали неверными. Более того, в конце периода принятия решения вышестоящий элемент должен либо подтвердить, либо изменить сообщенные им в ходе вмешательства до принятия решения планы распределения ролей подсистем в обеспечении успеха всей системы. Эти действия координирующего элемента называют *вмешательством после принятия решения*, *корректирующим* или *поощряющим вмешательством*.

При рассмотрении «вмешательства после принятия решения» следует помнить, что оно вызывается не стремлением упростить работу нижестоящих элементов, а стремлением к достижению целей вышестоящего элемента. Основная цель вмешательства после принятия решения состоит не в уточнении имеющихся у нижестоящих элементов представлений о поведении остальной части системы и не в том, чтобы предоставить им большую роль в достижении цели, как при вмешательстве до принятия решения, а в том, чтобы оказать на нижестоящие элементы такое влияние, которое приведет к улучшению (с точки зрения вышестоящего элемента) поведения системы в целом.

Вмешательство. В связи с приоритетом действий вышестоящий элемент имеет широкие обязанности: во-первых, он указывает нижестоящим элементам, как им следует действовать, а во-вторых, воздействует на них с одной целью побудить их, если это необходимо, изменить свои действия.

Моделирование информационных систем.

1. *Обобщение понятия информации*. В основе анализа явно или неявно лежит трехзвенная схема форматирования информации: источник – канал – приемник. Такая схема вполне приемлема для анализа технических компонент систем связи и сравнительно простых систем автоматического управления; для вычислительной техники она имеет ограниченное значение, а для инженерной психологии и системотехники – практически не годится.

Анализ исследований понятия информации позволяет сделать вывод, что информация является основным содержанием отображения; образы могут быть различны, но содержание их остается неизменным. То, что извлекается из образа, – это, на наш взгляд, информация об отражаемом объекте. Поэтому понятие информации можно определить следующим образом: информация есть то, что извлекается из образа в процессе его «осознания» и соотнесения с отображаемым объектом.

Общая схема процесса отображения приведена на рис. 4.24. Некоторый образ $Y = F(X)$ в отражающей подсистеме Y системы S возникает лишь тогда, когда оригинал X (объект, явление и т.п.) оказывает соответствующее воздействие на систему S. Для того чтобы извлечь информацию о X, содержащуюся в Y, необходимо сопоставить полученные впечатления с ранее накопленными, выяснить, в чем сходство и в чем отличие образа данного объекта от образов иных объектов, наблюдающихся в прошлом. Это предполагает наличие в составе системы S специальной подсистемы анализа и решения Z, находящейся в теснейшем взаимодействии с отображающими (чувственными) структурами Y. Подсистема Z должна обладать способностью накапливать впечатления как непосредственные (чувственные), так и вторичные, образующиеся в процессе сопоставления и анализа текущего образа. Можно предположить, что подсистема Z является вторичной отображающей системой, осуществляющей обратное преобразование Y в $\widetilde{X} = f^{-1}(Y)$ – идеальный прообраз.

Формирование идеального прообраза, иными словами преобразование $\widetilde{X} = f^{-1}(Y)$, и есть процесс получения субъективной информации γ в ее общем виде.

Наличие информации в отображении и позволяет, вообще говоря, оттуда ее извлекать, а затем и оперировать с ней, как с любой объективной реальностью, в частности обмениваться содержанием отображений.

На рисунке 4.24. условность содержания информации в оригинале и чувственном образе передана штриховой обводкой γ_0 и $\gamma_Д$.

Характеристики информации определяются особенностями отдельных процессов и операций ее образования.

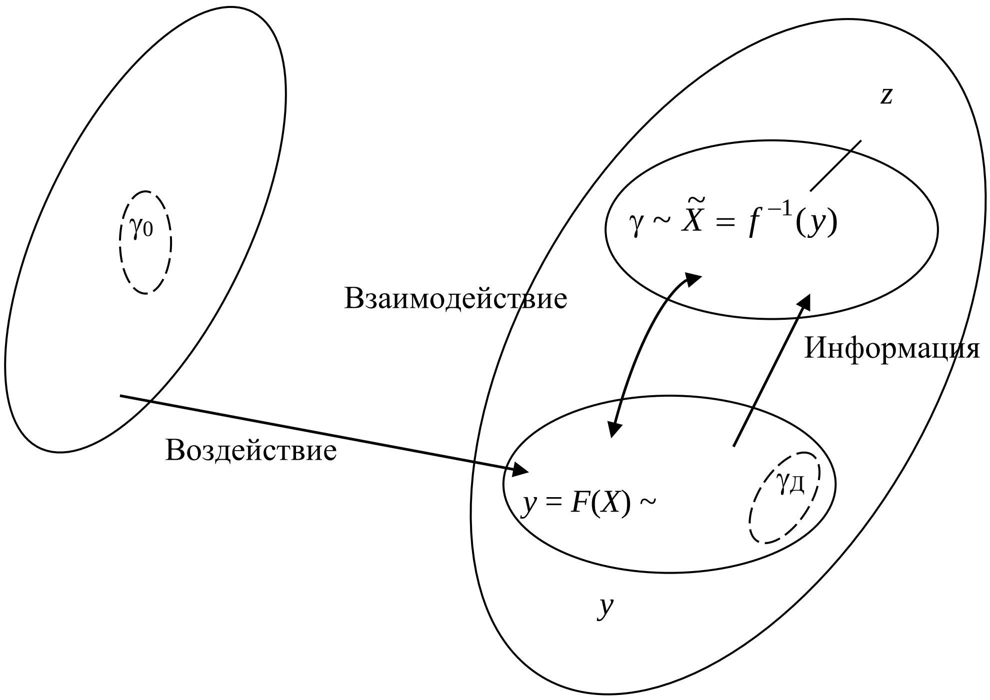

Рис. 4.24. Схема формирования информации

1. Особенности формирования чувственного образа Y, степень его адекватности оригиналу определяют достижимую полноту общей информации $\gamma_Д$. Так, если воздействия со стороны оригинала ослабляются или искажаются посторонними мешающими факторами, то нет никакой возможности получить более адекватный образ, кроме как устранить мешающие причины. «Нечеткость» образа возможна из-за снижения отражательных способностей системы S (например, в силу нарушения специфических участков коры головного мозга, ухудшения функциональных свойств органов чувств и т.п.).

2. Процесс сравнения, поиска подходящего анализа существенно определяет выбор преобразования f^{-1}. К числу важнейших факторов, влияющих на течение данного процесса, помимо возможного распада структуры системы S (потеря памяти, способности к анализу и т.п.) относятся: объем впечатлений и знаний, которыми располагают система, «аналитическая мощность» $\tilde{I}_z$ подсистемы Z, сложившаяся структура взаимодействий и степень ее «консерватизма», время контакта с оригиналом X и существования образа Y. Все эти факторы в конечном счете определяют степень понимания информации $\gamma_Д$, содержащей в образе Y, и задают характер информации γ, представляемой формируемым идеальным прообразом $\tilde{X}$.

3. Информация γ, в свою очередь, анализируется и оценивается подсистемой Z с точки зрения целей и задач системы S. В составе информации γ выделяются релевантная I и иррелевантная $\bar{I}$ (относящаяся и не относящаяся к стоящим задачам) ее части. Релевантная информация дифференцируется по важности (ценности) в зависимости от того, насколько та или иная часть релевантной информации способствует эффективности достижения стоящих целей.

4. Информация γ, отделенная от своего носителя – первичного образа, в дальнейшем может быть зафиксирована в памяти подсистемы Z, а также представлена вне ее с помощью различных систем сигналов или знаков.

5. Извлечение информации, заключенной в образе, осуществляется, по-видимому, в определенной последовательности: сначала дается информация о самых общих особенностях образа, а затем о все более детальных и глубоких его характеристиках.

Содержание любого образа всегда реализовано через способы своего существования, т.е. через форму.

По отношению к форме представления информации имеет смысл говорить о ее информативности, т.е. о ее способности содержать то или иное количество информации, о ее информационной вместимости (емкости), а также об информационной эффективности. Основными формами существования информации являются сигнал и знак.

Сигнал можно определить как материальный процесс, распространяющийся в пространстве и во времени и переносящий (или только хранящий) информацию об отражаемом объекте. Сигнал в основе своей безразличен к смысловой стороне содержащей в нем информации.

Знак есть способ замещения объекта в какой-либо информационном отношении. Знак имеет смысл лишь тогда, когда он поставлен в соответствие как отражаемому объекту, так и самому отражению (как результату). Таким образом, знак чаще всего тесно связан с семантической стороной заключенной в нем информации.

Количество информации. Обращаясь к свойствам информации, следует заменить, что основное внимание уделяется характеристике «количество информации». Основными методами определения количества информации являются: комбинаторный, статистический и метрический. Все эти методы так или иначе исходят из принципа разнообразия. Считается, что количество информации, получаемое об объекте X тем больше, чем выше разнообразие его характеристик X и чем полнее и точнее определяются эти характеристики системой S. При комбинаторном методе используют разнообразие множества X по признакам его элементов x, при статическом методе – по вероятности наступления некоторого состояния $x \in X$ и, наконец, при метрическом – возможные значения x некоторой измеримой величины X. Единство подходов позволяет переходить от одной меры информации к другой. При этом всегда возможен переход от метрической информации к вероятностной и от последней к комбинаторной. Обратный переход возможен не всегда, так как требуется учитывать ограничения по измеримости.

В качестве меры разнообразия (неопределенности) применяется энтропия, и общее выражение для количества информации I, если принять $\widetilde{X} \sim Y$, имеет вид

$$I(Y, X) = H(X) - H_{\gamma}(X), \qquad (4.6)$$

где $H(X)$ – энтропия определяемой характеристики объекта; $H_{\gamma}(X)$ – средняя условная энтропия остаточной неопределенности (невыявленного разнообразия) при всех образцах $y \in Y$.

Количество информации при определении некоторых значений непрерывной величины X с погрешностью $0 \le |\delta| \le \lambda$ с учетом краевого эффекта при произвольных распределениях $f(\delta)$ и $p(x)$ определяется из соотношения

$$I_{\lambda}(X) = I(\overset{\circ}{X}, X) = -\int_{x_1}^{x_n} p(x) \ln p(x)\, dx + \int_{0}^{\lambda} f(\delta)\, d\delta \int_{x_1}^{x_n} p(x_i)\, dx_i \times \int_{x_i - \alpha_i\delta}^{x_i + \beta_i\delta} \frac{p(x)}{A_i(\delta)} \ln \frac{p(x)}{A_i(\delta)}\, dx, \qquad (4.7)$$

где X – измеряемая величина; $\overset{\circ}{X} \in x_i \ (i = \overline{1, n})$ – помеченные значения измеряемой величины; $x_n = x_{\max}$ и $x_1 = x_{\min}$; β_i и α_i – коэффициенты, учитывающие краевой эффект, $\beta_i = (x_n - x_i)/\delta$ при $\delta > x_n - x_i$; $\alpha_i = (x_i - x_1)/\delta$ при $\delta > x_i - x_1$ и $\beta_i = 1$, $\alpha_i = 1$ соответственно при $\delta \le x_n - x_i$ и $\delta \le x_i - x_1$;

$$A_i(\delta) = \int_{x_i - \alpha_i\delta}^{x_i + \beta_i\delta} p(x) dx.$$

Точное определение $I(\overset{\circ}{X}, X)$ по формуле (4.7) часто затруднено.

Приближенно $I_{\lambda}(X)$ можно найти по формуле

$$I_{\lambda}(X) = \ln \frac{\sigma_x}{2\lambda} \rho,$$

где σ_x – среднее квадратичное отклонение X.

В простейшем случае при $f(\delta) = 1/\lambda$ и $p(x) = 1/(x_{\max} - x_{\min})$ значения $I_{\lambda}(X)$ определяются по формулам:

при $\gamma \ge 2$ $\quad I_{\lambda} = \ln \frac{\gamma e}{2} + \frac{1}{\gamma} \ln \frac{e}{2};$

при $2 \ge \gamma \ge 1$ $\quad I_{\lambda} = 2 - \frac{1{,}5}{\gamma} + 0{,}125\gamma - \frac{1}{\gamma} \ln \gamma;$

при $\gamma \le 1$ $\quad I_{\lambda} = 0{,}625\gamma,$

где $\gamma = (x_{\max} - x_{\min})/\lambda$.

В приложениях важными являются частная информация $I(y,\ X) = H(X) - H_y(X)$, где $H_y(X) = -\Sigma p_y(x) \ln p_y(x)$ и индивидуальная информация $I(x) = -\ln P(x)$.

2. *Прагматические характеристики*. К этим характеристикам принято относить широкий круг показателей качества информации, связанных, главным образом, с отношением субъекта к получаемой информации как к специфическому продукту.

Прагматические качества информации можно подразделить на три основные группы: по отношению к информации ее получателя (потребителя); по ее связи с источником; собственное (внутреннее) качество информации.

В первую группу входят полезность информации для получателя, степень ее влияния на состояние приемника (получателя), например, интенсивность поступления и т.п.; во вторую группу – существенность формируемой информации для функционирования источника и интенсивность генерации; в третью – количество информации, выступающее как качественная характеристика, истинность, действительное количество информации, полнота и степень обобщенности.

Полезность информации определяется тем, в какой степени она обеспечивает получателю достижение его целей. Данная характеристика теснейшим образом связана с количественной мерой, поскольку чем выше снятая неопределенность, тем больше вероятность правильного решения и, следовательно, достижения цели. Естественно, что полезность информации определяется ее истинностью: ложная информация будет уводить от цели, и тем самым ее полезность окажется отрицательной.

К полезности информации близко понятие ее значимости (важности), поэтому в литературе они часто отождествляются. В то же время понятие значимости более широкое: оно включает всю информацию, которая оказывает то или иное влияние на состояние получателя.

Значимость информации оценивают обычно по двум факторам: количеству информации, которое содержится в определении некоторого состояния $x \in X$, и значению некоторой функции $u(x)$. В общем случае

$$J(Y,X) = -\sum_x u(x)\, p(x) \ln p(x) + \sum_y p(y) \sum_x u(x)\, p_y(x) \ln p_y(x).$$

Функции $u(x)$ могут быть различными, и поэтому показатель значимости J в отличие от I не может служить мерой нагрузки системы. Одновременно значимость информации играет существенную роль при описании систем человек–техника, во многом определяя поведение человека (его эмоциональное состояние, мотивацию и т.п.).

Интенсивность поступающей информации также может выступать как одна из ее прагматических характеристик. При прочих равных условиях слишком редкие сообщения могут потерять всякую ценность или расстроить «настройку» приемника и стать неинтересными. Могут стать помехой и слишком частое поступление сообщений, поскольку приемник не в состоянии будет их воспринимать. В общем случае при умеренной интенсивности потока информации (0,2…5,0 бит/с) человек обычно определяет как более важную ту информацию, которая поступает чаще.

Существенность информации для функционирования источника связана с отмечавшимся различием в состоянии системы (например, исправностью или неисправностью ее элементов). Отсюда естественно стремление в одних случаях выдать наиболее важную информацию или, наоборот, всячески препятствовать ее получению посторонним наблюдателем.

Останавливаясь на показателях третьей группы, отметим, что количество информации может выступать и как качественная характеристика, поскольку при всех оценках качественных характеристик информации приходится учитывать и ее количество. Очевидно, что если количество информации равно нулю, то любые качественные ее показатели теряют смысл. Более того, во многих из предложенных до настоящего времени оценок прагматических характеристик количественная мера участвует непосредственным образом.

Истинность информации. Истинность (верность) информации, получаемой системой S, зависит прежде всего от соответствия состояния приемника (его образа) $y \in Y$ состоянию источника $x \in X$ и от правильного формирования идеального прообраза $\bar{x}$. При этом на втором этапе правильное формирование не всегда означает его соответствие состоянию приемника.

В приведенной четырехзвенной схеме решающая подсистема Z может «верить» или «не верить» сигналам (образам). И если она имеет «соответствующие инструкции», то действительно при перепутывании сигналов может их «распутать» и правильно определить состояние объекта X.

Под этим углом зрения рассмотрим оценку Г истинности информации в случае, когда возможно использование статистической меры. Тогда количество передаваемой информации

$$\gamma_0 = -\sum_x p(x) \ln p(x) + \sum_y p(y) \sum_x p_y(x) \ln p_y(x) = I(Y, X),$$

тождественно количеству статистической информации.

Оценивая информацию $\gamma_Д$, учтем приведенное выше условие ее истинности. Тогда оценку $Г_Д$ можем записать в виде

$$Г_Д = -\sum_y p(y)\, p_y^*(x) \ln p(y) + \sum_x p(x) \sum_y p_x(y)\, p_y^*(y) \ln p_x(y),$$

где $p_y^*(x)$ – условная вероятность того, что наблюдаемый образ y соответствует своему прообразу x.

Если матрицу условных вероятностей $p_y(x)$ упорядочить, например, пронумеровав в одной и той же последовательности x и соответствующие им y, то вероятности $p_y^*(x)$ будут диагональными элементами. В процессе функционирования подсистемы Z, как отмечалось, формируется субъективная информация, истинность которой в данном случае определяется выражением

$$Г = -\sum_{\tilde{x}} p(\tilde{x})\, p_{\tilde{x}}^*(y) \ln p(\tilde{x}) + \sum_y p(y) \sum_{\tilde{x}} p_y(\tilde{x})\, p_{\tilde{x}}^*(y) \ln p_y(\tilde{x}),$$

где $p_{\tilde{x}}^*(y)$ – вероятность соответствия идеального прообраза $\tilde{x}$ образу y.

Определим теперь истинную информацию, образующуюся в системе

$$Г_S = -\sum_{\tilde{x}} p(\tilde{x})\, p_{\tilde{x}}^*(x) \ln p(\tilde{x}) + \sum_x p(x) \sum_{\tilde{x}} p_x(\tilde{x})\, p_{\tilde{x}}^*(y) \ln p_x(\tilde{x}). \qquad (4.8)$$

С учетом предыдущих замечаний о «механизме» отношений к сигналам определим $p_{\tilde{x}}^*(x)$, используя схему связей с $p_y^*(x)$ и $p_{\tilde{x}}^*(y)$, приведенную в табл. 4.3, получим

$$p_{\tilde{x}}^*(x) = 1 - p_y^*(x) - p_{\tilde{x}}^*(y) + 2\, p_y^*(x)\, p_{\tilde{x}}^*(y).$$

Таблица 4.3

$p_y^*(x)$	$p_{\tilde{x}}^*(y)$	$p_{\tilde{x}}^*(x)$
0 – «Ложно»	0 – «Недоверие»	1 – «Истинно»
0 – «Ложно»	1 – «Доверие»	0 – «Ложно»
1 – «Истинно»	0 – «Недоверие»	0 – «Ложно»
1 – «Истинно»	1 – «Доверие»	1 – «Истинно»

Если распределения $p_y(x)$, $p_{\tilde{x}}(y)$, $p_{\tilde{x}}(x)$ одинаковы, то с учетом формулы (4.3) имеем

$$\Gamma_S = I(X,\, \tilde{X}) - \Gamma_{\text{Д}} - \Gamma + 2\Gamma',$$

где $\Gamma' = -\sum_{\tilde{x}} p(\tilde{x})\, p_y^*(x)\, p_{\tilde{x}}^*(y) \ln p(\tilde{x}) + \sum_{y} p(y) \sum_{\tilde{x}} p_y(\tilde{x}) p_y^*(x) p_{\tilde{x}}^*(y) \ln p_y(\tilde{x})$. Аналогично можно ввести и меру ложной информации. При этом целесообразно придать ей отрицательный знак. Тогда, например количество ложной информации, образующейся в системе $\overline{\Gamma_S}$, будет выражаться соотношением

$$\overline{\Gamma}_S = -\sum_{\tilde{x}} p(\tilde{x})[\, p_{\tilde{x}}^*(y) - 1] \ln p(\tilde{x}) + \sum_{x} p(x) \sum_{\tilde{x}} p_x(\tilde{x})[p_{\tilde{x}}^*(x) - 1] \ln p_x(\tilde{x}).$$

При изложенном подходе действительная информация I^* системы есть сумма истинной и ложной информации

$$I^*(X,\, \tilde{X}) = \Gamma_S + \overline{\Gamma_S} = 2\Gamma_S - I(X,\, \tilde{X}) - I(X,\, \tilde{X}) \le I^*(X,\, \tilde{X}) \le I(X,\, \tilde{X}). \qquad (4.9)$$

Информационная загрузка системы определяется количеством информации $I(X,\, \tilde{X})$. Роль $I^*(X,\, \tilde{X})$ в ином. Это количество информации определяет действительную эффективность информации в процессах организации и управления. Должно быть ясно, что только истинная информация повышает организацию и обеспечивает необходимое управление. Ложная информация дезорганизует и тот, и другой процессы. Только I^* определяет прирост негэнтропии, а никак не I.

Для оценки действительной информации измерения при предельной погрешности λ, учитывая (4.2) – (4.4), можно использовать формулу

$$I_\lambda^*(X) = \ln \frac{\sigma_x}{2\lambda} \rho^*.$$

Понятие полноты информации тесно связано с таким свойством, как ее наблюдаемость. Если объект X характеризуется параметрами X_1, ..., X_n, а в процессе наблюдения формируются образы Y_1, ..., Y_m, то полнота получаемой информации может быть определена отношением

$$\xi = \frac{\Gamma(X_1, ..., X_n;\ Y_1, ..., Y_m)}{H(X_1, ..., X_n)},$$

где

$$\xi = \Gamma(X_1, ..., X_n;\ Y_1, ..., Y_m) = -\sum_{(y_1, ..., y_m)} p(y_1, ..., y_m) p^*_{y_1, ..., y_m}(x_1, ..., x_n) \times$$
$$\times \ln p(y_1, ..., y_m) + \sum_{(x_1, ..., x_m)} p(x_1, ..., x_m) \sum_{(y_1, ..., y_m)} p_{(x_1, ..., x_m)} p(y_1, ..., y_m) \times$$
$$\times p^*_{y_1, ..., y_m}(x_1, ..., x_n) \ln p_{(x_1, ..., x_m)}(y_1, ..., y_m);$$

$H(X_1, ..., X_n)$ – энтропия всего набора параметров объекта.

Обобщение информации связано с агрегированием и укрупнением показателей. Агрегирование представляет собой переход от функции (или совокупности взаимосвязанных функций) многих переменных к функции (или совокупности взаимосвязанных функций) меньшего числа переменных.

В формализованном виде это означает, что если множество параметров объекта X_1, ..., X_n можно разбить на G непересекающихся подмножеств $U_k = \{X_{1_k}, ..., X_{r_k}\} \left(\sum_{k=1}^{G} r_k = n \right),$, то представление каждого подмножества U_k одним показателем $Y_k = \varphi_k(U_k)$ $(k = \overline{1, G})$ и есть агрегирование информации. Основные проблемы агрегирования связаны с определением условий, при которых можно избежать потери информации, т.е. обеспечить совместимость решений $V_x = f(X_1, ..., X_n) \equiv \psi[\varphi_1(U_1), \dots, \varphi_G(U_G)]$, а в случае, когда невозможно избежать потерь, найти метод, снижающий ошибки агрегирования (макроподход) или ошибки упрощения (микроподход).

Ошибка агрегирования определяется как разность между правой и левой частями условия совместимости. Ошибки упрощения связаны с несоответствием некоторой упрощенной зависимости, например $f_1(X_1, ..., X_i, \dots, X_{i+a}, ..., X_n)$, где исключены a параметров, исходному полному соотношению $f(X_1, ..., X_n)$.

Укрупнение показателей используется для однородных, непосредственно соизмеримых объектов. Основными видами укрупнения являются изменение масштабов измерения, объединение и калькулирование.

Процесс обобщения информации связан с построением общесистемных показателей.

Степень сжатия информации можно определить отношением

$$\zeta = \sum_{i=1}^{n} I_{\lambda_{x_i}}(X_i) / \sum_{k=1}^{G} I_{\lambda_{Y_k}}(Y_k),$$

где $I_{\lambda_{x_i}}$ – количество информации, получаемое при определении значения X_i-го показателя с погрешностью λ_{X_i}; $I_{\lambda_{Y_k}}(Y_k)$ – то же при определении значений агрегированного или укрупненного показателя Y_k с погрешностью λ_{Y_k}.

Степень верности обобщенной информации определяется отношением

$$\gamma = \Gamma(Y_1, ..., Y_G; V_x / \Gamma(X_1, ..., X_n; V_x).$$

3. *Семантические характеристики.* Эти характеристики выражают отношение (связи) между элементами отображения, его структурно-логические свойства, процесс формирования и отмирания соответствующих им понятий и определений. Процесс тесно связывает семантические характеристики с гносеологическими.

В процессе формирования информации семантические характеристики не играют какой-либо роли. Лишь в процессах информационного обмена система S, как и приемник, помимо способности воспринимать «кодирующие» изменения в носителе должна обладать определенным базовым объемом информации о семантических характеристиках $\tilde{I}$. Кроме того, подсистема Z системы S должна иметь какой-то уровень аналитических и эвристических способностей. Нижний предел $\tilde{I}$ имеет место, когда система S выполняет лишь роль ретранслятора. В этих условиях достаточно знания алфавита языка поступающей информации $\gamma_Д$, а аналитические операции сводятся к элементарной дизъюнкции «передать – не передавать». Таким образом, объем $\tilde{I}$ в любой системе класса S при использовании статистической или комбинаторной меры должен быть не менее $\tilde{I}$ = ln 2m, где m – объем алфавита языка, на котором передается информация (коэффициентом 2 учитывается минимальный набор действий системы).

Для углубления «понимания» $\gamma_Д$ необходимо увеличение $\tilde{I}$ в памяти системы и соответственно повышение аналитических и эвристических возможностей.

Методы оценки $\tilde{I}$ лишь только начинают разрабатываться.

Обычный прием оценки семантической информации состоит в том, что по известной части текста определяют изменение энтропии оставшейся неизвестной части. Формально этот процесс описывается выражением

$$\tilde{I}(I^*, I_H) = I_H - \beta I_H, \tag{4.10}$$

где $\tilde{I}(I^*, I_H)$ – семантическая информация, содержащаяся в известной части текста о неизвестной его части; I^* – действительное количество информации, получаемое при чтении текста; $I_H = H_H$ – статистическая информация в неизвестной части текста, равная энтропии этого текста; β – коэффициент, учитывающий снижение энтропии H_H при получении информации I^*. Коэффициент $0 \le \beta \le 1$, очевидно, зависит от той семантической информации, которую содержит часть текста, и чем больше $\tilde{I}(I^*)$, тем меньше β. Если β = 0, то $\tilde{I}(I^*, I_H) = I_H$. Если же β = 1, то $\tilde{I}(I^*, I_H) = 0$.

При данной постановке вопроса семантическая информация измеряется той же мерой, что и информация I_H. Однако если речь вести о семантике текста, то прием, отражаемый формулами (4.5, *а*) и (4.5, *б*) не позволяет получать необходимую оценку. Действительно,

$$\tilde{I}(I^*, I_H) = (I_\Pi - I)(1 - \beta), \tag{4.5, а}$$

где $I = H$ – статистическая информация известной части текста; $I_\Pi = H_\Pi$ – статистическая информация всего текста; $I_H = I_\Pi - I$. Зная весь текст, получим количество семантической информации, близкое к нулю, если даже β = 1. И это естественно, так как $\tilde{I}(I^*, I_H)$ – семантическая информация об оставшейся части, а не семантическая информация текста. Не спасает положение в ведения инверсии, при которой можно считать семантической информацией текста величину

$$\tilde{I}_0 = I_\Pi(1 - \beta) = \tilde{i}_0 \ge 0, \tag{4.5, б}$$

при $I \to 0$, так как, если $I \to 0$, то и $I^* \to 0$, а $\beta(\tilde{I}) \to 1$. Эти формулы дают лишь ту семантическую информацию, которой мы располагаем, еще не ознакомившись с текстом.

Рассмотрим оценку семантической информации при некоторых предположениях о законах изменения $\gamma = 1 - \beta$. С этой целью разобьем весь текст на n частей с приблизительно равной энтропией каждой k-й части ($k = 1, n$). Тогда статистическая информация текста $I_n = n_i$.

Предположим также, что при чтении каждой k-й части получаем количество семантической информации $\tilde{i}_k$. Так же, как и ранее, будем полагать, что количество семантической информации $\tilde{i}_k$ равно тем изменениям энтропии последующих частей, которые возникают, если известна k-я часть текста. Тогда иметь место соотношения:

$$\tilde{i}_{(k+1)/k} = \gamma_{(k+1)/k}(\tilde{i}_k)i; \quad \tilde{i}_{(k+2)/k} = \gamma_{(k+2)/k}(\tilde{i}_k)i; \ ..., \ \tilde{i}_{n/k} = \gamma_{n/k}(\tilde{i}_k)i.$$

Очевидно, что имеет место последовательность $1 \geq \gamma_{(k+1)/k} \geq ... \geq \gamma_{n/k} \geq 0$.

Таким образом, $\tilde{i}_k = i\sum_{r=k+1}^{n}\gamma_{r/k} = i(n-k)\gamma_k$, где γ_k – среднее значение $\gamma_{r/k}$ ($r = k + 1, n$). Теперь, если известны не только k-я часть, но все части текста до k-й включительно, то $\tilde{i}_{k/1,k} = i(n-k)\gamma_k\prod_{k+1}^{k-1}(1-\gamma_{k/s})$, так как извлечение семантической информации осуществляется на фоне уже имеющихся сведений, что и проявляется в снижении энтропии последующего текста $\sum_{r=k+1}^{n} i_r = i(n-k)\prod_{k+1}^{k-1}(1-\gamma_{k/s})$. Сомножитель $(n-k)\gamma_k\prod_{k+1}^{k-1}(1-\gamma_{k/s})$ в выражении для $\tilde{i}_{k/1,k}$ хорошо аппроксимируется экспонентой вида $\exp[-(d + aki)/(1 + bki)]$. При этом значения коэффициентов d, a, b такие, что уже на 3-м и 4-м участках текста (примерно при 10 – 20 известных словах) $\exp[-(d + aki) / (1 + bki) \approx$ $\approx \exp(-a/b)$ и количество семантической информации в дальнейшем на каждом участке становится практически одинаковым. В то же время в зависимости от типа текста показатели экспонент a/b существенно различаются. Сравнение текстов приводит к зависимости

$$a/b = -\ln[(i-\alpha\tilde{i}_0)/i] + (i-\alpha\tilde{i}_0)/\tilde{I}_z,$$

где $\tilde{i}_0$ – удельная семантическая информация (семантическая информация, отнесенная к одному знаку текста), отражающая степень знакомства (знания) данной области техники, производства, науки и т.п.; i – удельная статистическая информация (для русского языка $i \approx 0{,}95$ нит или 1,37 бита); α – показатель, характеризующий знакомство с данным конкретным вопросом. При первичном ознакомлении $\alpha = 1$. Значения α определяются процессами запоминания (забывания), условиями получения информации и могут быть как положительными, так и отрицательными; $\tilde{I}_z$ – показатель (видимо, некоторая семантическая информация), характеризующий общий уровень знания (аналитическая мощность).

Значения $\tilde{I}_z$ оказались достаточно стабильными для широкого круга испытуемых. Так, если вариация $\tilde{i}_0$ составляла более 130%, то вариация $\tilde{I}_z$ – не более 43% (табл. 4.4).

Таблица 4.4

Тип языков и текстов	Объем алфавита m	Удельная статистическая информация i, нит	Удельная семантическая информация i_0, нит	Показатель $\tilde{I}_z$, нит	Коэффициент семантической сложности K_c, %	Показатель квалификации $К_к$
Алгол-60	64	1,11	$\frac{0,69}{0,77}$	$\frac{1,14}{1,26}$	29	$\frac{0,27}{0,29}$
Фортран	47	0,80	$\frac{0,30}{0,38}$	$\frac{1,00}{1,10}$	17	$\frac{0,16}{0,17}$
Машинные команды	65	0,40	$\frac{0,16}{0,21}$	$\frac{1,29}{1,56}$	8	$\frac{0,115}{0,123}$
Русский язык	32	0,95	0,51	1,12	18	0,18
Профессиональный язык	32	0,95	0,72	1,37	22	0,23
Технический текст	32	0,95	0,58	1,17	19	0,20
Общенаучный текст	32	0,95	0,56	1,52	19	0,21
Математический текст	70	1,10	$\frac{0,58}{0,80}$	$\frac{1,40}{1,52}$	28	$\frac{0,27}{0,32}$
Общественный политический текст	32	0,95	0,67	1,38	21	0,22
Художественный текст (проза)	32	0,95	0,35	1,42	16	0,18
Художественный текст (стихи)	32	0,95	$\frac{0,12}{0,84}$	$\frac{1,09}{1,44}$	20	$\frac{0,13}{0,25}$

Примечание. Под чертой приведены данные для лиц, хорошо знающих рассматриваемую область.

Отсюда количество семантической информации может быть представлено следующим выражением:

$$\widetilde{I} = (I - I_0)\exp[-(i - \widetilde{i}_0)/\widetilde{I}_z]. \qquad (4.11)$$

Интересно отметить, что при $\widetilde{i}_0 = i$ $\widetilde{I} = 0,$ так как $\widetilde{I} = n\widetilde{i}_0$. Факт несомненный, поскольку при известном содержании дополнительной семантической информации нет.

Соотношение (4.11) позволяет подойти к оценке важной в практическом приложении характеристики – коэффициенту сложности текста (вопроса) K_c. Полагая, что основной сложности текста является остаточная его неопределенность и уровень подготовленности к восприятию, выражение для K_c запишем в виде

$$K_c = \frac{i_m}{i_0^2}\{i - (i - \widetilde{i}_0)\exp[-(i - \widetilde{i}_0)/\widetilde{I}_z]\},$$

где $i_m = \ln m$ (m – число знаков алфавита соответствующего языка); $i_0 = \ln 32$ – нормирующий множитель, взятый по объему алфавита русского языка.

Для практической оценки K_c осуществляется осреднение данных, полученных как для лиц, слабо понимающих текст, так и для лиц, хорошо в нем разбирающихся.

Возможность представляет показатель квалификации специалиста в соответствующей области

$$K_K = \frac{i_m i}{i_0^2}\exp\left(-\frac{i - \widetilde{i}_0}{\widetilde{I}_z}\right).$$

Значения предлагаемых характеристик, рассчитанные для различных условий, приведены в таблице.

Замечания о других характеристиках информации. Разнообразие свойств информации не исчерпывается теми, которые рассматривались в предыдущих пунктах и чаще всего являются предметом анализа в работах по информологии. В настоящее время еще недостаточно исследованы такие группы свойств информации, как гносеологические, временные, специальные, социальные и экономические характеристики.

С точки зрения временных характеристик информации подразделяются: 1) по времени протекания тех событий, свидетельством которых она является и 2) по «возрасту» самой информации. Характеристики первого вида в основном являются специфическими для социальной и экономической информации.

Специальные характеристики информации связаны с той областью, где она используется (в быту, в производстве, в обществе), и с методами использования (печать, радио, телевидение, театральное искусство).

Представляется, что мера количества информации будет адекватна свойствам информации лишь тогда, когда эта мера будет учитывать способность информации сохраняться неизменной при ее использовании и тиражировании. Одним из возможных путей решения данной задачи могла бы служить специальная алгебра множественнозначных величин. Общая идея М-алгебры состоит в следующем.

Вводится понятие множественнозначной величины таким образом:

$$<a>_\alpha, <b>_\beta = \left.\begin{matrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{matrix}\right\} \alpha \text{ раз}, \left.\begin{matrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \end{matrix}\right\} \beta \text{ раз},$$

где a и b – соответственно одинаковые значения величин $<a>_\alpha = <b>_\beta$, повторяемые α и β раз, α и β – тиражные числа – целые положительные числа.

Таким образом, при α = 1 и β = 1 $<a>_1, <b>_1 = a; b$ имеем простую последовательность величин со значениями a и b и т.д. В общем случае множественнозначная величина может состоять из блоков значений

$$<a,\ b,\ c>_\alpha = \left.\begin{matrix} a, b, c \\ \dots \\ a, b, c \end{matrix}\right\} \alpha \text{ раз}.$$

Мощностью величин предлагается называть выражение $<a^*>_\alpha = \alpha a$. Для блочной множественнозначной величины имеет место набор мощностей в соответствии с составляющими $<a^*,\ b^*,\ c^*>_\alpha = (\alpha a,\ \alpha b,\ \alpha c)$.

Постулируются следующие свойства $<a>_{\alpha}$:

1) $<a>_{\alpha}=0$, если α=0 или a = 0;

2) непосредственное сравнение величин возможно лишь тогда, когда тиражные числа сравниваемых величин равны; $<a>_{\alpha}=<b>_{\beta}$, если α = β и $a=b$; $<a>_{\alpha} \le <b>_{\beta}$, если α = β и $a \le b$.

Основные правила операций над множественными величинами следующие. **Сложение** $<a>_{\alpha}+<b>_{\beta}=<a+b>_{\gamma}<u>_{\zeta}$:

$u = a$, γ = β, ζ = α – β, если α > β;

$u = b$, γ = α, ζ = β – α, если α < β;

1) переместительный закон: $<a>_{\alpha}+<b>_{\beta}=<b>_{\beta}+<a>_{\alpha}$;

2) сочетательный закон: в общем случае множественнозначные величины не удовлетворяют величины не удовлетворяют этому закону, поскольку нет никаких ограничений на комбинации слагаемых при разных тиражных числах.

При одинаковых тиражных числах сочетательный закон полностью выполняется. При разных тиражных числах сочетательный закон выполняется для главного значения суммы.

Главным значением суммы назовем ту упорядоченную совокупность величин, которая начинается с величины, содержащей значения слагаемого с наибольшим тиражным числом; далее идет величина, значениями которой являются суммы значений слагаемого с наибольшим тиражным числом и слагаемого со следующим по значению тиражным числом; следующая величина имеет значения в виде суммы трех слагаемых с наибольшими тиражными числами и т.д.

Вычитание: сложение некоторой величины $<a>_{\alpha}$ с величиной $<b>_{\beta}$ определим как вычитание $<a>_{\alpha}-<b>_{\beta}=<a-b>_{\gamma},<u>_{\zeta}$.

Отсюда следует, что $-<b>_{\beta}=<-b>_{\beta}$.

Операция вычитания позволяет расширить область сравнения множественнозначных величин и для некоторых случаев, когда не равны их тиражных числа.

Так, если $a - b < 0$ и $u = -b$ или $u = 0$, то $<b>_\beta > <a>_\alpha$.

Таким образом, $<a>_\alpha < <b>_\beta$ в следующих случаях:

1) если $\alpha = \beta$ и $b > a$;
2) если $\alpha < \beta$ и $b \geq a$.

В случае, если $\alpha < \beta$ и $b < a$, эти две величины несравнимы.

Умножение: $<a>_\alpha \cdot <b>_\beta = <ab>_{\alpha\beta}$.

Если $\alpha = \beta = 1$, то

$$<a>_1 \cdot <b>_1 = <ab>_1 = ab.$$

Деление определяется как операция, обратная умножению:

$$<a>_\alpha : <b>_\beta = \left\langle \frac{a}{b} \right\rangle_{\alpha\beta} = <a>_\alpha \cdot \left\langle \frac{1}{b} \right\rangle_\beta .$$

Степени $<a>_\alpha$:

1) возведение в степень $n \geq 1$

$$\langle a \rangle_\alpha^n = \left\langle a^n \right\rangle_{\alpha^n},$$

откуда $\langle a \rangle_1^n = \left\langle a^n \right\rangle_1 = a^n$;

2) возведение в степень $\upsilon < 1$

$$\langle a \rangle_\alpha^\upsilon = \left\langle a^\upsilon \right\rangle_{\alpha^\upsilon} = \left\langle a^\upsilon \right\rangle_k, \left\langle a^\upsilon \right\rangle_u,$$

где k – ближайшее целое число с недостатком для a^υ; u – остаток («ложное» тиражное число), равный разности $a^\upsilon - k$.

Из условий 1 и 2: $\left\langle a^\upsilon \right\rangle_u < \left\langle a^\upsilon \right\rangle_1$, так как $u < 1$, то тиражное число может быть лишь целым. Для устранения возникшего несоответствия необходимо заменить величину $\left\langle a^\upsilon \right\rangle_u$ с «ложным» тиражным числом эквивалентной по мощности величиной с тиражным числом 1.

Мощность величины $\left\langle a^\upsilon \right\rangle_u$ есть ua^υ, и, следовательно, $\left\langle ua^\upsilon \right\rangle_1 \approx \left\langle a^\upsilon \right\rangle_u$.

Отсюда $\langle a \rangle_\alpha^\upsilon = \left\langle a^\upsilon \right\rangle_k, \left\langle ua^\upsilon \right\rangle_1 = \left\langle a^\upsilon \right\rangle_k, \left\langle (a^\upsilon - k)a^\upsilon \right\rangle_1$.

Специальные операции включения и выключения обеспечивают формирование составного значения величины (блочной величины), где за каждым показателем закрепляется присвоенное ему место. Для обозначения операции включения используем знак $\vee$, а для операции выключения – знак $\wedge$. Тогда

$$\langle a\rangle_{\alpha} \vee \langle b\rangle_{\beta} = \langle a,0\rangle_{\alpha} \quad \vee \langle 0,b\rangle_{\beta} = \langle a,b\rangle_{\gamma}, \langle \upsilon,u\rangle_{\zeta},$$

где $\langle a,\, b\rangle_{\gamma} = \left.\begin{matrix} a,b \\ \ldots \\ a,b \end{matrix}\right\}$ γ раз.

При $\alpha < \beta$ имеем: $\gamma = \alpha$, $\upsilon = 0$, $u = b$ и $\zeta = \beta - \alpha$, при $\alpha > \beta$: $\gamma = \beta$, $\upsilon = a$, $u = 0$ и $\zeta = \alpha - \beta$. Такого же рода операции проводятся над величинами с составными значениями.

4. Организация

Основные понятия и характеристики. Понятия *организации и системы* связаны весьма тесто. Однако организация охватывает только такие свойства элементов, которые связаны с процессами сохранения и развития целостности, т.е. существования системы.

Организация возникает в том случае, когда между некоторыми исходными объектами (явлениями) возникают закономерные, устойчивые на определенном временном отрезке связи или(и) отношения, актуализирующие какие-то свойства элементов и ограничивающие иные их свойства.

Организация связана с упорядоченностью и согласованностью функционирования более или менее дифференцированных и автономных частей системы и проявляется прежде всего в снижении энтропии по сравнению с энтропией системоформирующих факторов. Однако изменение энтропии является лишь частной, хотя в значительной мере и ведущей, характеристикой организованности. Организация проявляется в структурной особенностях, характере функционирования, сложности, способности сохранения системы и ее развития и т.п.

Степень организованности обычно связывают с негэнтропией системы. Считается, что чем выше негэнтропия системы (ниже ее энтропия), тем выше степень организованности – предсказуемости поведения системы. Однако такое определение недостаточно конструктивно, поскольку не позволяет сравнивать различные по сложности системы. Действительно, при одном и том же уровне энтропии более сложная система будет иметь большую степень организованности, чем менее сложная.

Для устранения данного противоречия следует учитывать относительное изменение энтропии

$$R = 1 - H(S) / H(F),$$

где $H(S)$ и $H(F)$ – соответственно энтропия системы и системоформирующих факторов.

Однако и эта характеристика (ее целесообразно именовать показателем упорядоченности системы) отражает лишь одну сторону организованности – снижение многообразия возможных связей и отношений, свойств элементов и их пространственно-временных характеристик.

Можно подобрать системы, имеющие идентичные по своим свойствам элементы и связи и одинаковые показатели упорядоченности, но в тоже время отличающиеся связностью элементов

$$\omega = \frac{1}{n} \sum_{\gamma', \omega} P(\omega_{\gamma'}) \omega_{\gamma'},$$

где $\omega_{\gamma'}$ – мощность γ'-й внутренней связи; $P(\omega_{\gamma'})$ – вероятность ω уровня (мощности) γ'-й связи; n – число элементов системы.

В настоящее время нет еще надежных данных о характере зависимости организованности $\prod_S$ системы от рассмотренных показателей. В качестве одного из возможных вариантов оценки организованности можно было бы использовать показатель

$$\prod_S = R[2\omega / (n-1)\omega_{\max}]^{1/n},$$

где $0{,}5 \cdot (n - 1)\ \omega_{\max} = \omega_{\max}$ – максимальная связанность системы.

Нетрудно видеть, что $0 \le \prod_S \le 1$. При $\prod_S = 0$ система фактически не существует – полностью дезорганизована: связи либо отсутствуют, либо их свойства не могут быть установлены. Одновременно $R \to 0$, так как энтропия системы стремится к энтропии системоформирующих факторов.

При $\prod_S = 1$ система имеет максимальную степень организованности. В этом случае система также прекращает функционирование (неготропийная «смерть» системы).

Сложность системы. Данная характеристика является одной из важнейших в рамках информационного страта. Проблема сложности в природе, технике и обществе требует всесторонних и интенсивных исследований. Результаты этих исследований составляют важную предпосылку решения многих теоретических и практических вопросов и могут принести значительный эффект.

Среди основных факторов, влияющих на сложность системы, обычно выделяют: число элементов, число связей, разнообразие элементов и связей и число уровней иерархии системы.

Очевидно, что эти факторы определяют сложность лишь со «статической» стороны. В то же время понятие сложности связывают и с условиями создания и использования объекта, в частности, с условиями поддержания его в работоспособном состоянии.

Разнообразие элементов и связей может быть охарактеризовани степенью дифференциации системы D, а изменчивость – ее лабильностью La.

Влияние условий создания и использования системы можно, по-видимому, связать с объемом информации, заключенном в конструкции системы, I_0.

Степень дифференциации. Этот показатель связывается с неоднородностью компонентного состава системы. Одним из направлений дифференциации, способствующим созданию структур, устойчивых к внешним воздействиям, является взаимно дополнительное соотношение, которое обеспечивает такие изменения отдельных частей системы, когда они взаимно дополняют друг друга (согласованы по формам, свойствам и т.п.). Другое направление ведет к возрастанию различий и несоответствий между частями системы. Части целого становятся слишком разными и различаются, в частности, по силе их относительного сопротивления внешним воздействиям, что приводит в конце концов к разрушению системы.

Двойственный характер дифференциации, повышение устойчивости структуры при соответствии и гармонии частей системы и ее разрушение при их несоответствии и дисгармонии – существенная особенность организации системы.

Возможный метод оценки степени дифференциации сводится к расчету следующего показателя:

$$D = 1 - \frac{1}{H(n\gamma)} \sum_{k=0}^{L} \left(\frac{1}{p_k} \sum_{i_k=1}^{d_k} p_{i_k} \ln p_{i_k} + \frac{1}{g_k} \sum_{j_k=1}^{d_k} g_{j_k} \ln g_{j_k} \right),$$

где d_k, g_k – число различных свойств соответственно элементов и связей k-го уровня ($k = 0, L$); p_{ik} – число элементов (компонент), обладающих i_k-м свойством; $p_k = \sum_{i_k=1}^{d_k} p_{i_k} \geq n_k$ (n_k – число компонент k-го уровня); g_{ik} – число связей, обладающих j_k –м свойством; $H(n\gamma) = \sum_{k=0}^{L} \ln n_k \gamma_k$; $g_k = \sum_{j_k=1}^{g} g_{j_k} \geq \gamma_k$ (γ_k – число связей k-го уровня; к этому уровню относятся и межуровневые связи с k-1-м уровнем).

Лабильность системы. Устойчивость структуры в сочетании с подвижностью ее функций часто выдвигается в качестве ведущего признака сложности и высоты организации. Однако такой акцент представляется недостаточно обоснованным. Соотношение устойчивости структуры и подвижности ее функций отражает степень лабильности системы

$$\mathrm{La} = \Delta S''/(1 + \Delta S'),$$

где $\Delta S'$ и $\Delta S''$ – показатели изменчивости структуры и функций.

Проблема «тезауруса системы». Следует отметить, что в настоящее время не существует универсального и надежного способа вычисления или оценки внутренней информации системы. Предложение считать емкость тезауруса Θ эквивалентоной энтропии системы $H(S)$ не дает положительных результатов. Дело в том, что тезаурус содержит не просто какое-то количество информации, а информацию с определенными качественными характеристиками (прагматическими, семантическими, гносеологическими и т.п.). И лишь в совокупности количественные и качественные характеристики информации могут дать представление о «мощности» тезауруса Θ.

При оценке информации, содержащейся в конструкции того или иного технического устройства, в первом приближении можно основываться на помощью коэффициента использования энергии η. Поскольку любое техническое устройство есть либо результат использования энергии, либо и результат использования энергии, и метод организации получения энергии. Таким образом, следует полагать, что чем совершеннее использование энергии, тем большей мощностью Θ обладает тезаурус.

Оценку количества информации I_Θ можно осуществить исходя из того, что любой компонент технического устройства выполнен из некоторых материалов и реализован с использованием известных химических и физических процессов.

Отсюда максимальное количество информации, которым должен располагать «конструктор» при формировании i-й компоненты системы, определяется выражением

$$I_i = k\sum_{M_i} \ln\left(\frac{N_i!}{M_i!(N_i - M_i)!} M_i! y_{M_i}! \prod_{h_i=1}^{M_i} x_{h_i}\right),$$

где N_i – число элементов, которые могут быть использованы в комбинации из M_i элементов при числе одних и тех же элементов в комбинации x_{hi}; y_{Mi} – число операций, обеспечивающих формирование свойств i-й компоненты системы (элемента, связи, структурной организации и т.п.) при использовании M_i комбинации исходных элементов.

При формировании компонент, а затем и системы и при их ликвидации могут быть выбраны различные технологические схемы (наборы операций y). Используемая в этом случае информация I_Θ равна

$$I_\theta = \left[H(F) - H(S) + \frac{1}{n^*} \sum_{i=1}^{n^*} I_i \right] \sum_{i=1}^{n^*} y_{M_i}.$$

где n^* – число компонент системы.

Вариант определения показателя сложности системы. Если ориентироваться на приведенные выражения для степени организованности, дифференциации и лабильности систем, то одним из возможных вариантов оценки сложности может служить соотношение

$$C_S = (1 + La)[I_\theta + n^* y D k (L+1) \ln \overline{n\gamma}] \big/ (1 + \prod_S),$$

где L – число иерархических уровней системы; $\bar{y}$ – среднее число технологических операций, приходящихся на один компонент системы (элемент, связь, структурные образования и т.п.) при ее создании; $\overline{n\gamma} = \left(\prod_{k=0}^{L} n_k \gamma_k \right)^{1/(L+1)}$ – среднегеометрическое произведение числа компонент и связей по иерархическим уровням системы; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ эрг К$^{-1}$ – постоянная Больцмана.

Сомножитель $\ln n\gamma$ данного показателя в определенном отношении учитывает и характеристику сложности структуры.

Совершенство организации. Иногда эту характеристику называют высотой уровня организации. Совершенство организации H_i по сути своей так или иначе зависит от всех рассмотренных ранее характеристик, а также от степени открытости системы O_p.

Так, в сложных системах, состоящих из относительно автономных компонент, совершенство организации в целом зависит от совершенства организации. Например, при организации научно-производственного объединения значения H_i включаемых в НПО подразделений часто существенно различаются. Это и приводит к серьезной организационной перестройке, цель которой выровнять уровни организации и сделать организацию в целом более совершенной.

На совершенство организации, естественно, оказывает влияние степень ее организованности $\prod_S$. Однако оптимальный уровень этой характеристики определить пока трудно. Можно лишь отметить, что при значениях $\prod_S$, близких к единице («заорганизованная» система), компоненты системы не обладают нужной для эффективного функционирования свободой воли. При этом чем проще система, тем, по-видимому, выше значение показателя $\prod_S$, соответствующее оптимальной степени организованности.

Степень интеграции определяет уровень целостности системы, упрочнения связей и соподчинения ее компонент. Сущность интеграции состоит в том, что усиливаются или возникают такие связи, которые направлены на ослабление системных противоречий и на сохранение функциональной целостности системы.

Разрешая системные противоречия, интеграция создает условия для новой дифференциации на более высоком уровне.

Свойство трубы в трубчатом магазине – ограничивать пространственное положение элементов – может служить примером «жесткой» (статической) интеграции. Примером динамической интеграции является централизация. Простейший ее тип – моноцентрическая система; наиболее сложный и совершенный – иерархическая централизация.

На степень интеграции систем, по-видимому, влияет и мощность связей, и их значение в комплексе внутренних связей системы. Отсюда в первом приближении

$$U_S = L^{-1}\sum_{k=1}^{L}\left(\sum_{j_k=1}^{r_k}\alpha_{j_k}\omega_{j_k} \Bigg/ \sum_{j_k=1}^{\gamma_k}\alpha_{j_k}\omega_{j_k}\right),$$

где r_k – число интегрирующих связей на k-м иерархическом уровне ($r_k \le \gamma_k$); γ_k – общее число связей на k-м уровне; α_{j_k}, ω_{j_k} – соответственно значимость j_k -й связи.

Степень «открытости» системы – относительная связанность и относительное разнообразие связей системы со средой

$$O_p = \omega''\left(\sum_{k=0}^{L}\ln\gamma''_k \Bigg/ \sum_{k=0}^{L}\ln\gamma'_k\gamma''_k \Bigg/ (\omega' + \omega'')\right),$$

где ω′ и ω″ – показатели соответственно «внутренний» и «внешней» связанности системы; γ'_k и γ''_k – число связей k-го иерархического уровня соответственно внутрисистемных и внешних (со средой).

Если оценки рассматриваемых показателей осуществлять по приведенным формулам, то один из возможных приемов расчета показателя H_i может быть представлен следующими выражениями:

Уровень организации j_k-й компоненты $(j_k = \overline{1, n_k})$

$$Hi_{j_k} = \left[(1 + \prod_S - \prod_S^2)(D + U_S + La)(1 + O_p)k_0 C_S \big/ (1 + DU_S La)\right]_{j_k};$$

уровень организации системы

$$Hi = \left[\prod_{k=0}^{L}\left(\prod_{j_k=!}^{n_k} Hi_{j_k}\right)^{1/n_k}\right]^{1//(L+!)}$$

где n_k – число компонент k-го членения ($k = \overline{(0, L}$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены разные аспекты общей теории систем, представлены и обобщены различные понимания сложных и весьма неоднозначных вопросов теории систем.

Системный анализ применяется в тех случаях, когда у исследователя нет достаточных сведений о системе, которые позволили бы формализовать процесс ее исследования, включающий постановку и решение возникшей проблемы. Специфической особенностью методики системного анализа является то, что она должна опираться на понятие системы и использовать закономерности построения, функционирования и развития систем.

Общим для всех методик системного анализа является определение закона функционирования системы, формирование вариантов структуры системы (нескольких альтернативных алгоритмов, реализующих заданный закон функционирования) и выбор наилучшего варианта, осуществляемого путем решения задач декомпозиции, анализа исследуемой системы и синтез системы, снимающей проблему практики. Основой построения методики анализа и синтеза систем в конкретных условиях является соблюдение принципов системного анализа.

Полученные вами знания о системах после прочтения пособия только тогда будут эффективны, когда они найдут применение в вашей практической деятельности.

Системное знание и системные методы вполне справедливо считаются универсальными. Однако их универсальность не гарантирует успешность применения, ибо применение универсального к конкретному и реальному всегда предполагает творческий поиск и обоснование.

В области проектирования современных информационных систем (наиболее перспективной сфере приложения умений и навыков системного мышления) можно только тогда достигнуть успеха, когда системные знания дополняются способностью их инструментального применения, а также глубокой эрудицией в целом комплексе наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нечипоренко, В. И. Структурный анализ систем / В. И. Нечипоренко. – М. : Советское радио, 1977.
2. Дружнин, В. В. Системотехника / В. В. Дружнин, Д. С. Конторов. – М. : Радио и связь, 1985.
3. Месарович, М. Общая теория систем: математические основы / М. Месарович, Я. Такахара. – М. : Мир, 1978.
4. Месарович, М. Теория иерархических многоуровневых систем / М. Месарович, Д. Мако, И. Такахара. – 1973.
5. Садовский, В. Н. Основания общей теории систем: логико-методологический анализ / В. Н. Садовский. – 1974.
6. Гиг, Дж. ван. Прикладная общая теория систем, 1978.
7. Уемов, А. И. Системный подход и общая теория систем, 1978.
8. Урманцев, Ю. А. Общая теория систем: состояние, приложения и перспективы развития.
9. Новосельцев, В. Н. Теория управления и биосистемы, 1978.
10. Винер, Н. Кибернетика, или управление и связь.
11. Шеннон, К. Теория информации.
12. Эшби, У. Р. Введение в кибернетику.
13. Бир, С. Кибернетика и менеджмент.
14. Акофф, Р., Эмери Ф. О целеустремленных системах, 1972.
15. Матурана, У. Р., Варела Ф. Х. Древо познания, 2001.
16. Холл, А. Опыт методологии для системотехники, 1975.
17. Теоретические основы системного анализа / В. И. Новосельцев и др. – 2006.
18. Орловский, С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С. А. Орловский. – М. : Наука, 1981.
19. Оуэн, Г. Теория игр / Г. Оуэн. – М. : Мир, 1971.

20. Фишберн, П. Теория полезности для принятия решений / П. Фишберн. – М. : Наука, 1978.

21. Веников, В. А. Теория подобия и моделирования / В. А. Веников. – М. : Высшая школа, 1976.

22. Пешель, М. Моделирование сигналов и систем / М. Пешель. – М. : Мир, 1977.

23. Теоретические основы исследования сложных систем с учетом надежности : учебное пособие / Ю. Л. Муромцев, Л. Н. Ляпин, В. Н. Грошев В. Н., Шамкин. – М. : МИХМ, 1987.

24. Левин, Б. Р. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления / Б. Р. Левин, В. Шварц. – М. : Радио и связь, 1985.

25. Фудзисава, Т. Математика для радиоинженеров. Теория дискретных структур / Т. Фудзисава, Т. Касами. – М. : Радио и связь, 1984.

26. Острейковский, В. А. Теория систем / В. А. Острейковский. – М. : Высшая школа, 1997.

27. Тарасов, В. Г. Основы теории автоматизированных систем управления / В. Г. Тарасов. – М. : ВВАИ им. проф. Н. Е. Жуковского, 1988.

28. Методы анализа информационных систем : монография / Ю. Ю. Громов, В. Е. Дидрих, М. А. Ивановский и др. – Тамбов ; М. ; СПб. ; Баку ; Вена ; Гамбург : Изд-во МИНЦ «Нобелистика». – 2012.

29. Моделирование слабоструктурированных систем / М. А. Ивановский, Ю. В. Минин, М. А. Бакушкина, С. В. Ковалев // Техника и безопасность объектов уголовно-исполнительной системы : сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф. – 2018.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное электронное издание

ИВАНОВСКИЙ Михаил Андреевич
ГЛАЗКОВА Инга Александровна

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ СИСТЕМ

Учебное пособие

Редактирование Е. С. Мордасовой
Графический и мультимедийный дизайнер Н. И. Кужильная
Обложка, тиражирование, упаковка Е. С. Мордасовой

ISBN 978-5-8265-2954-6

Подписано к использованию 07.11.2025.
Тираж 50 экз. Заказ № 113

Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106/5,
помещение 2, к. 14
Тел. 8(4752) 63-81-08;
E-mail: izdatelstvo@tstu.ru