

**А. Н. ВЕТРОВ, И. А. СУКОНКИН, А. Ю. КУЛИКОВ**

**АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ  
В ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМАХ  
МЕДИЦИНСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ**

**Тамбов  
◆ Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ» ◆  
2025**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тамбовский государственный технический университет»

**А. Н. ВЕТРОВ, И. А. СУКОНКИН, А. Ю. КУЛИКОВ**

# **АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМАХ МЕДИЦИНСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ**

Утверждено Ученым советом университета  
в качестве учебного пособия для студентов,  
обучающихся по направлениям подготовки бакалавров 12.03.04  
и магистрантов 12.04.04 «Биотехнические системы и технологии»,  
дневного и заочного отделений

*Учебное электронное мультимедийное издание*



---

Тамбов

◆ Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ» ◆

2025

УДК 621.37  
ББК 32.844  
В39

Рецензенты:

Кандидат технических наук, доцент,  
ведущий специалист ООО «Интертехмед»  
*В. Н. Щербинин*

Кандидат технических наук, доцент,  
доцент кафедры «Радиотехника» ФГБОУ ВО «ТГТУ»  
*Ю. Н. Панасюк*

**Ветров, А. Н.**

В39 Анализ периодических колебаний в электронных системах медицинского назначения [Электронный ресурс, мультимедиа] : учебное пособие / А. Н. Ветров, И. А. Суконкин, А. Ю. Куликов. – Тамбов : – 2025. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Системные требования : ПК не ниже класса Pentium IV ; RAM 512 Mb ; необходимое место на HDD 00,0 Mb ; Windows 7/8/10/11 ; дисковод CD-ROM , мышь. – Загл. с экрана.  
ISBN 978-5-8265-2965-2

Рассмотрены основы теории спектрального анализа управляющих колебаний, спектры некоторых импульсов и радиосигналов.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров 12.03.04 и магистрантов 12.04.04 Биотехнические системы и технологии, дневного и заочного отделений.

УДК 621.37  
ББК 32.844

*Все права на размножение и распространение в любой форме остаются за разработчиком.  
Нелегальное копирование и использование данного продукта запрещено.*

ISBN 978-5-8265-2965-2

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВО «ТГТУ»), 2025

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. Общие сведения о сигналах .....	6
1.1. Виды управляющих колебаний .....	6
1.2. Разложение колебаний по системам ортогональных функций .....	13
2. Спектральный анализ управляющих колебаний.....	18
2.1. Разложение периодических колебаний в ряд Фурье по системе .....	18
тригонометрических функций.....	18
2.2. Спектр непериодического сигнала.....	34
2.3. Основные свойства спектральных функций .....	39
2.3.1. Свойства симметрии спектральных функций.....	39
2.3.2. Линейность преобразований Фурье .....	40
2.3.3. Теорема запаздывания.....	41
2.3.4. Теорема масштабирования.....	42
2.3.5. Теорема смещения (переноса) спектра .....	44
2.3.6. Теорема о распределении энергии в спектре непериодического сигнала (теорема Релея).....	47
2.3.7. Спектральные функции производной и интеграла.....	49
2.3.8. Спектральная характеристика при различном характере функции $u(t)$ .....	51
2.4. Спектры некоторых импульсов .....	53
2.4.1. Видеоимпульс экспоненциальной формы .....	53
2.4.2. Единичная функция .....	56
2.4.3. Прямоугольный импульс .....	59
2.4.4. Единичный импульс (дельта-функция, функция Дирака) .....	61
2.4.5. Колокольный (гауссовый) импульс .....	65
2.4.6. Спектр пачки импульсов .....	67
3. Спектральный анализ радиосигналов .....	74
3.1. Спектры амплитудно-модулированных колебаний .....	74
3.2. Спектры сигналов с угловой модуляцией .....	88
3.3. Радиосигналы с расширенным спектром .....	110
3.3.1. Понятие о согласованном фильтре.....	110
3.3.2. Спектр радиосигнала с внутриимпульсной линейной частотной .....	116
модуляцией.....	116
4. Дискретные сигналы .....	125
4.1. Основные определения и классификация дискретных сигналов.....	126
Теорема Котельникова .....	126
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	138

## ВВЕДЕНИЕ

Становление специалиста в области радиотехники и электроники невозможно без изучения основ теории спектрального анализа. Целью данного учебного пособия является получение студентами знаний о разложении периодических колебаний в ряд Фурье, спектре различных импульсов и радиосигналов, о дискретных сигналах.

Успешное решение проблем, с которыми постоянно сталкивается инженер в своей практической деятельности по проектированию, обслуживанию и ремонту медицинского оборудования, предполагает не только наличие глубоких знаний теории радиотехнических цепей, сигналов и математики, но и умелое их применение.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов очной, заочной и дистанционной форм обучения, изучающих курсы «Биомедицинская электроника», «Электротехника и электроника», «Узлы и элементы биотехнических систем», и имеет целью повысить эффективность усвоения названных дисциплин, а также участвует в формировании компетенций: ПК-2. Способен к математическому моделированию элементов и процессов биотехнических систем, их исследованию на базе профессиональных пакетов автоматизированного проектирования и самостоятельно разработанных программных продуктов; ПК-3. Способен к анализу, расчету, проектированию и конструированию в соответствии с техническим заданием типовых систем, приборов, деталей и узлов медицинских изделий и биотехнических систем на схемотехническом и элементном уровнях, в том числе с использованием систем автоматизированного проектирования.

# 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИГНАЛАХ

## 1.1. ВИДЫ УПРАВЛЯЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

Как известно, для передачи сообщений на расстояние используется электрический сигнал, один из параметров которого изменяется во времени в соответствии с передаваемым сообщением. Электрический сигнал можно передать на расстояние по проводам так, как это делается в проводной связи, и по радио.

При передаче сообщений по радио в передающем устройстве под воздействием электрического сигнала, который в данном случае является управляющим (модулирующим) колебанием, высокочастотное колебание становится модулированным колебанием (радиосигналом). С помощью антенного устройства происходит преобразование модулированных колебаний в электромагнитные волны, излучаемые в заданных направлениях.

Как управляющий сигнал, так и соответствующий ему модулированный сигнал являются регулярными (детерминированными) колебаниями, если они могут быть заданы аналитически или другим способом, например, графически, поскольку точно известно передаваемое сообщение. К случайным сигналам относятся сигналы, которые заранее описать невозможно. Это электрические колебания, соответствующие передаваемой музыке и речи, последовательность знаков телеграфного кода при передаче неповторяющихся текстов, а также последовательность радиоимпульсов на входе приемника радиолокационной станции, так как амплитуда радиоимпульса и его фаза изменяются случайным образом из-за нестабильности условий распространения или изменений положения цели. Таким образом, любой сигнал, несущий в себе заранее неизвестную информацию, должен рассматриваться как случайный.

Кроме полезных сигналов, в радиотехнике приходится иметь дело со случайными колебаниями в виде помех радиоприему, вследствие чего усложняется обнаружение радиосигнала и определение его параметров, что в конечном итоге затрудняет восстановление информации, содержащейся в

радиосигнале. Помехи могут создаваться всякого рода промышленными электрическими установками (индустриальные помехи) вследствие атмосферных и космических явлений (например, грозовые разряды), а также преднамеренно для затруднения приема сигнала и его расшифровки.

Как полезный сигнал, так и помеха являются случайными функциями времени, для анализа которых необходим статистический подход, использующий вероятностные характеристики. Тем не менее, без изучения свойств различного рода регулярных сигналов невозможно перейти к анализу более сложных сигналов, имеющих характер случайных функций. Кроме того, регулярные сигналы различных видов находят широкое применение в практике измерений, при регулировке и наладке радиотехнических устройств, поэтому в дальнейшем будут исследоваться физические характеристики регулярных сигналов – вначале управляющих, а затем модулированных.

Регулярные сигналы можно подразделить на периодические и непериодические.

Периодическим называется сигнал, удовлетворяющий условию

$$f(t) = f(t + kT),$$

где  $t$  – любой момент времени на интервале  $-\infty \leq t \leq +\infty$ ;  $k$  – любое целое число;  $T$  – период колебания.

Простейшим периодическим колебанием являются гармонические колебания, определяемые выражением

$$f(t) = A \cos \left( \frac{2\pi}{T} t + \Theta \right) = A \cos(\omega t + \Theta), \quad -\infty \leq t \leq +\infty.$$

Периодический сигнал физически неосуществим, так как все реальные, сигналы имеют начало и конец. Однако абстрактный смысл периодического сигнала не исключает возможности его применения в различных теоретических исследованиях, результаты которых, при известных условиях, могут соответствовать процессам, наблюдаемым в действительности. При исследовании, например, установившихся режимов, которые не зависят от

начальных условий, воздействующие на цепь сигналы можно считать периодическими.

Непериодическим регулярным сигналом называется любой сигнал, для которого не выполняется условие  $f(t) = f(t + kT)$ .

Как правило, непериодические сигналы ограничены во времени. Примером таких сигналов могут служить различного рода импульсы, группы импульсов, «отрезки» гармонических колебаний и т.д.

В радиоэлектронике принято изображать гармоническое колебание в комплексной форме. Например, колебания  $a(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \psi)$  можно записать в виде

$$a(t) = \operatorname{Re}[A_0 e^{j\omega_0 t}] \text{ или } a(t) = \operatorname{Im}[A_0 e^{j\omega_0 t}],$$

где символы *Re* или *Im* обозначают действительную или мнимую часть этого выражения.

Комплексное представление гармонических колебаний является частным случаем комплексного представления негармонических колебаний, также широко применяемого в современной радиотехнике.

Если имеется физически существующий сигнал в виде действительной функции  $a(t)$ , то соответствующий ему комплексный сигнал представляется в форме  $Z(t) = a(t) + ja_1(t)$ , где  $a_1(t)$  – новая функция, связанная с исходной функцией  $a(t)$  на основании пары преобразований Гильберта.

$$a_1(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(\tau)}{\tau - t} d\tau \text{ и } a(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_1(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Нетрудно показать, используя преобразования Гильберта, что гармонической функции  $a_1(t) = \cos \omega_0 t$  соответствует сопряженная функция  $a(t) = \sin \omega_0 t$ .

Определенная указанным способом функция  $Z(t)$  называется комплексным или аналитическим сигналом, соответствующим физическому

сигналу  $a(t)$ . Таким образом, введение сопряженного колебания позволяет представить в комплексной форме любое негармоническое колебание.

Из всего многообразия управляющих сигналов, в котором вид каждого определяется характером передаваемого сообщения, рассмотрим телеграфный, телефонный, телевизионный и импульсный сигналы.

С помощью *телеграфных* сигналов передаются дискретные (не непрерывные) сообщения – буквы, цифры, знаки. Каждому из сообщений соответствует определенная кодовая комбинация импульсов напряжения (тока), получаемых в телеграфном устройстве. В свою очередь кодовая комбинация состоит из элементов кода. Число таких элементов неодинаково для различных кодов.

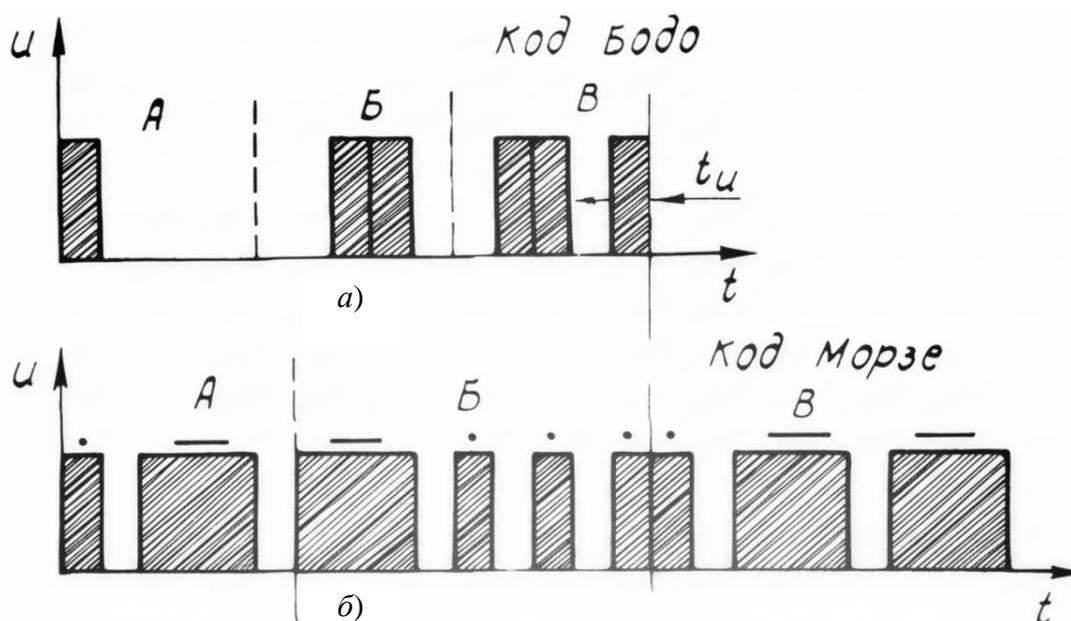


Рис. 1.1. Форма сигналов кода Бодо (а), и кода Морзе (б)

У кода Бодо (рис. 1.1, а) два элемента (посылка и отсутствие посылки или две посылки противоположной полярности). Код Бодо получил название двоичного кода. Такой код является равномерным, так как характеризуется постоянным числом знаков во всех комбинациях и состоит из пяти элементов – импульсов прямоугольной формы или пауз одинаковой длительности  $t_u$ . Длительность каждой комбинации равна  $5t_u$  (длительность импульса  $t_u$  порядка 1 мкс).

Код Морзе (рис. 1.1, б) – троичный (точка – короткая посылка, тире – более длинная посылка, пауза) является неравномерным, так как длительность кодовых комбинаций (с учетом пауз, которые отделяют одну комбинацию от другой) принимает значения от  $4t_{\text{И}}$  до  $22t_{\text{И}}$  (рис. 14.1, б). В телеграфии находят применение и другие виды кодов, которые здесь не рассматриваются.

Для передачи звуковых сообщений используется телефонный (звуковой) сигнал, получаемый с помощью электроакустического преобразователя – микрофона (ларингофона) (рис. 1.2, а). Сопротивление микрофона  $R_{\text{М}}$  зависит от звукового давления на мембрану. Если, например, увеличивается давление на микрофон, сопротивление микрофона уменьшается, ток в цепи возрастает, и напряжение на сопротивлении нагрузки микрофона  $R_{\text{Н}}$  также возрастает (рис. 1.2, б). Таким образом, изменение напряжения на сопротивлении  $R_{\text{Н}}$  повторяет (с некоторым приближением) закон изменения звукового давления  $P$ .

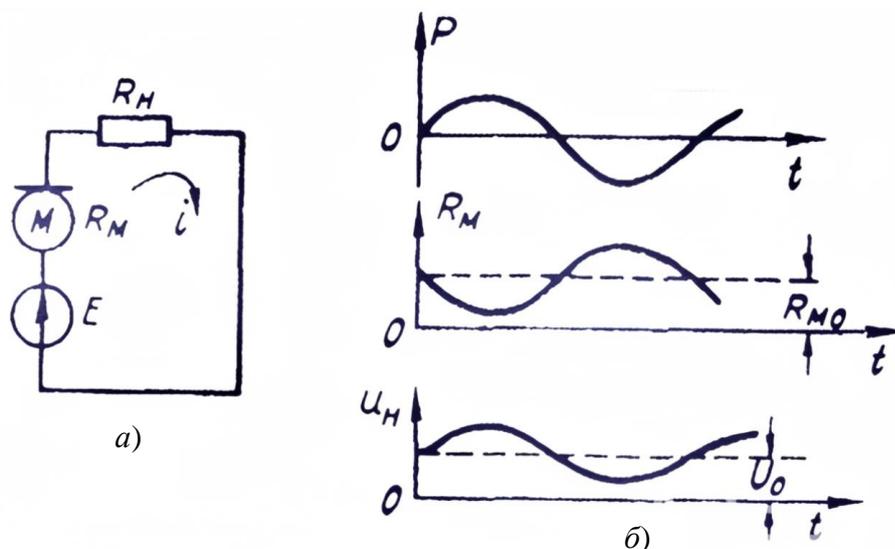


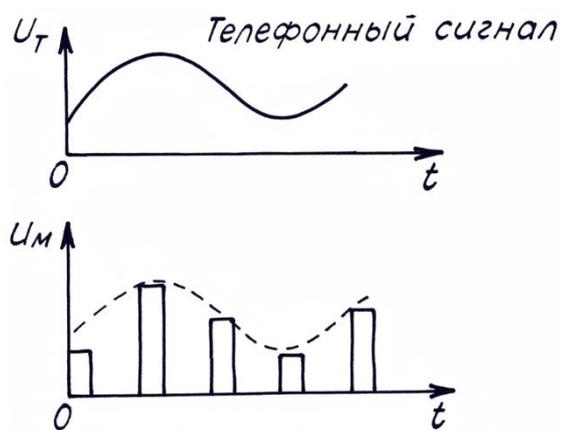
Рис. 1.2. Телефонный звуковой сигнал

Частота телефонных сигналов определяет высоту передаваемого тона. Значения частот, которые воспринимает человек, зависят от индивидуальных особенностей в строении его слухового аппарата. Обычно самые низкие воспринимаемые частоты – порядка  $10 \dots 20$  Гц, а самые высокие –  $10 \dots 15$  кГц.

Телевизионные сигналы, получаемые в передающем телевизионном устройстве, представляют собой напряжение (ток), величина которого пропорциональна освещенности передаваемого изображения. Преобразование света в электрические сигналы происходит в специальных электронно-лучевых приборах – передающих телевизионных трубках. Чем больше освещенность элемента изображения, тем больше импульс напряжения (тока), вызываемый им в электрической цепи передающего телевизионного устройства. В состав телевизионного сигнала входят также вспомогательные (синхронизирующие) импульсы, предназначенные для синхронизации изображений в телевизионном приемнике.

Импульсные управляющие сигналы представляют собой периодическую последовательность импульсов определенной (например, прямоугольной) форм. Импульсные управляющие сигналы широко используются в радиолокации, радионавигации, радиотелеуправлении, радиосвязи. Радиолокационные импульсные сигналы имеют длительность импульса  $t_{\text{и}}$  порядка микросекунды, частоту повторения импульсов  $F_{\text{и}} = \frac{1}{T_{\text{и}}}$  – порядка 1000 Гц.

В настоящее время широко применяется импульсный метод передачи телефонных непрерывных сигналов. В этом случае телефонный сигнал преобразуется (с помощью специальных устройств) в последовательность импульсов, у которых амплитуда  $A$ , длительность  $t_{\text{и}}$  или частота повторения  $F$  изменяются в соответствии с телефонным сигналом (на рис. 1.3 показано, что в соответствии с телефонным сигналом изменяется амплитуда).



**Рис. 1.3. Импульсный телефонный сигнал**

Импульсным методом передаются значения сигнала не для любого момента времени, а лишь дискретные его значения. На приемном устройстве по этим импульсам восстанавливается весь сигнал. Импульсный метод можно использовать при передаче и других сигналов. Этот метод, в частности, находит применение в телеметрии.

## 1.2. РАЗЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПО СИСТЕМАМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Краткий обзор видов управляющих сигналов, проведенный в предыдущем параграфе, показывает, что в большинстве случаев сигнал является сложной функцией времени, а это затрудняет анализ прохождения управляющих сигналов через различные электрические цепи. Чтобы решить эту задачу, желательно, сложный сигнал представить в виде суммы более простых составляющих.

Из курса математики известно, что колебание  $f(x)$  можно рассматривать как совокупность элементарных колебаний  $\varphi_k(x)$ , умноженных на коэффициенты  $a_k$ , т.е.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x). \quad (1.1)$$

Система функций  $\varphi_k(x)$  носит название базисной системы, а представление сигнала в виде суммы (1.1) называется разложением сигнала по системе базисных функций. Чтобы разложение можно было выполнить, базисная система должна удовлетворять ряду специальных требований, в частности, быть системой линейно независимых функций и упорядоченной. Базисные функции на интервале определения сигнала  $[a, b]$  должны удовлетворять условию

$$\int_a^b \varphi_k^2(x) dx < \infty. \quad (1.2)$$

Особенно удобно проводить разложение сигнала, если система функций  $\varphi_k(x)$  является ортогональной на интервале определения сигнала. Поэтому вся современная спектральная теория сигналов строится как теория разложения сигналов именно по таким системам.

Напомним основные свойства ортогональных функций. Пусть имеется система функций  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$ . Две функции –  $\varphi_k(x)$  и  $\varphi_n(x)$  – ортогональны на интервале  $[a, b]$ , если

$$\int_a^b \varphi(x) \varphi_n^*(x) dx = 0, \quad k \neq n. \quad (1.3)$$

При этом предполагается, что  $\int_a^b \varphi_k^2 dx \neq 0$ , т.е. никакая из функций рассматриваемой системы не равна тождественно нулю.

В данном случае выражение (1.3) записано для системы комплексных функций  $\varphi_k(x)$ , и  $\varphi_k^*(x)$  представляет собой функцию, комплексно сопряженную с  $\varphi_k(x)$ . Если же, кроме того,  $\int_a^b |\varphi_k|^2 dx = 1$ , то система функций  $\varphi_k(x)$  называется ортонормированной (ортонормальной).

Ортонормированными на интервале  $[0, 2\pi]$  являются, например, тригонометрические функции вида

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx$$

или функции

$$\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}, \quad \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sin(x-n\pi)}{x-n\pi},$$

называемые функциями отсчетов, которые ортонормированы на интервале  $[-\infty, +\infty]$ .

В ортогональности тригонометрических функций легко убедиться непосредственным вычислением интеграла (1.3).

На основании формулы (1.1) произвольную функцию  $f(x)$ , определенную на интервале  $[a, b]$ , можно разложить в конечный или бесконечный ряд по ортонормированным функциям  $\varphi_k(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , т.е. представить в виде

$$f(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_K \varphi_K(x) + \dots \quad (1.4)$$

Коэффициенты этого ряда определяются следующим образом. Умножим обе части равенства (1.4) на  $\varphi_k^*(x)$  и интегрируем в пределах  $[a, b]$ . Так как  $\varphi_k(x)$  ортогональна ко всем функциям, находящимся в правой части равенства, кроме одной, а  $\int_a^b |\varphi_k|^2 dx = 1$ , то после интегрирования правая часть будет равна  $a_k$ . Поэтому

$$a_k = \int_a^b \varphi_k^*(x) f(x) dx. \quad (1.5)$$

Этим равенством и определяются коэффициенты разложения.

Ряд (1.1), в котором коэффициенты  $a_k$  определены по формуле (1.5), называется обобщенным рядом Фурье по данной системе  $\varphi_k(x)$ . (В дальнейшем для краткости слово «обобщенный» будет опущено).

Ряд Фурье обладает следующим важным свойством: при заданной системе функций  $\varphi_k(x)$  и при фиксированном числе слагаемых ряда (1.4) он обеспечивает наилучшую аппроксимацию (в смысле минимума среднеквадратичной погрешности) данной функции  $f(x)$ . Это означает, что если вместо разложения ряда (1.4) взять конечную сумму

$$f_{\Pi}(x) = \sum_{k=0}^{\Pi} a_k \varphi_k(x), \quad (1.6)$$

то при соответствующем подборе коэффициентов  $a_k$  сумма  $f_{\Pi}(x)$  будет мало отличаться от суммы  $f(x)$ . За меру отличия одной функции от другой принимается среднеквадратичная погрешность  $\xi_{\Pi}$

$$\xi_{\Pi} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - f_{\Pi}(x)]^2 dx}.$$

Можно показать, что при значениях  $a_k$ , определяемых формулой (1.5), среднеквадратичная погрешность  $\xi_{\Pi}$  достигает минимума и принимает значение

$$\xi_{\Pi \min}^2 = \frac{1}{b-a} \left[ \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=0}^{\Pi} a_k^2 \right], \quad (1.7)$$

причем  $a_k$  не зависят от числа и членов суммы  $f_n(x)$ . При увеличении числа  $\Pi$

членов сумма  $\sum_{k=0}^{\Pi} a_k^2$  может только увеличиваться, а погрешность  $\xi_{\min}$

уменьшаться. Система функции  $\varphi_0(x)$ ,  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ , ... будет полной, если ряд

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$  сходится и сумма его равна  $\int_a^b f^2(x) dx$ , т.е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 = \int_a^b f^2(x) dx. \quad (1.8)$$

Это соотношение, как известно, получило название равенства Парсеваля. Таким образом, с помощью ортогональных функций можно приближенно представить заданную функцию  $f(x)$  линейной комбинацией ортонормированных функций

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_{\Pi}\varphi_{\Pi}(x).$$

Если коэффициенты  $a_k$  выбраны в соответствии с формулой (1.5), то это приближение – наилучшее в смысле минимума среднеквадратичной погрешности. Любая другая линейная комбинация ортогональных функций дает большую среднеквадратичную погрешность.

В том случае, когда представляемый сигнал является функцией времени  $f(t)$ , выражение (1.6) записывается в виде

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k. \quad (1.9)$$

Соотношение (1.8) приобретает при этом энергетический смысл. Если  $f(t)$ , например, есть напряжение или ток, то  $\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt$  представляет собой энергию сигнала на интервале  $[t_1, t_2]$  при условии, что эта энергия выделяется на сопротивлении  $R$ , равном 1 Ом

Предпочтение тригонометрическим функциям при разложении сигналов отдается еще и потому, что последние являются единственными функциями, сохраняющими свою форму при прохождении через любую линейную цепь (с постоянными параметрами). Поэтому в следующей главе будет рассмотрен очень важный, с точки зрения теории и практики, случай разложения периодических колебаний по системе тригонометрических функций.

## 2. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ УПРАВЛЯЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

### 2.1. РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В РЯД ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(видео 1)

В главе 1 указывалось, что для анализа прохождения сигналов через линейную цепь применяют ряд методов, в частности, спектральный (частотный), в основе которого лежит представление сигнала в виде конечной или бесконечной суммы гармонических составляющих равных частот (спектра).

В предыдущей главе было показано, каким образом сигнал сложной формы можно представить с помощью системы ортогональных функций. Настоящая глава посвящена рассмотрению спектров управляющих сигналов.

В этом случае в качестве базисной системы функций ряда (1.1) возьмем совокупность тригонометрических функций кратных аргументов с переменной  $t$ :

$$1; \sin \frac{2\pi}{T_1} t; \cos \frac{2\pi}{T_1} t; \dots; \sin \frac{2\pi}{T_1} kt; \cos \frac{2\pi}{T_1} kt; \dots; k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Интервал ортогональности этих функций совпадает с периодом функции

$$f(t): T_1 = \frac{2\pi}{\Omega_1}.$$

Действительно,

$$\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \cos k\Omega_1 t \sin n\Omega_1 t dt = 0, \quad k \neq n;$$

$$\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \cos k\Omega_1 t \cos n\Omega_1 t dt = 0, \quad k \neq n;$$

$$\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \sin k\Omega_1 t \sin n\Omega_1 t dt = 0, \quad k \neq n.$$

Однако эти функции не нормированы, так как

$$\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \cos^2 k\Omega_1 t dt = \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \frac{1 + \cos 2k\Omega_1 t}{2} dt = \begin{cases} \frac{T_1}{2}, & k \neq 0 \\ T_1, & k = 0; \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \sin^2 k\Omega_1 t dt = \frac{T_1}{2}, \quad k \neq 0.$$

Ортонормированными будут функции

$$\frac{1}{\sqrt{T_1}}; \sqrt{\frac{2}{T_1}} \cos \Omega_1 t; \sqrt{\frac{2}{T_1}} \sin \Omega_1 t; \dots; \sqrt{\frac{2}{T_1}} \cos 2\Omega_1 t; \sqrt{\frac{2}{T_1}} \sin 2\Omega_1 t; \dots$$

Таким образом, функцию  $f(t)$  можно записать в виде

$$f(t) = a_0 \frac{1}{\sqrt{T_1}} + a_1 \sqrt{\frac{2}{T_1}} \cos \Omega_1 t + a_2 \sqrt{\frac{2}{T_1}} \cos 2\Omega_1 t + \dots + b_1 \sqrt{\frac{2}{T_1}} \sin \Omega_1 t + \dots \quad (2.1)$$

Коэффициенты разложения  $a_k$  и  $b_k$  определяются на основании формулы (1.5):

$$a_0 = \sqrt{\frac{1}{T_1}} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt; \quad a_k = \sqrt{\frac{2}{T_1}} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos k\Omega_1 t dt; \quad b_k = \sqrt{\frac{2}{T_1}} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin k\Omega_1 t dt.$$

Обозначив

$$C_k = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos k\Omega_1 t dt; \quad S_k = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin k\Omega_1 t dt, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (2.2)$$

получим  $f(t)$  в виде

$$f(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos k\Omega_1 t + \sum_{k=1}^{\infty} S_k \sin k\Omega_1 t. \quad (2.3)$$

Ряд (2.3) представляет колебание  $f(t)$  в виде суммы постоянной составляющей  $\frac{C_0}{2}$  и косинусоидальных и синусоидальных составляющих с амплитудами  $C_k$  и  $S_k$ . Самая низшая частота колебаний равна  $\Omega_1$ . Эти составляющие называют первой, второй и так далее гармониками. Если  $f(t)$  – четная функция, то все коэффициенты  $S_k$  равны нулю, а если  $f(t)$  – нечетная функция, то все коэффициенты  $C_k$  равны нулю.

Ряд (2.3) можно также записать в виде

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Omega_1 t + \psi_k), \quad (2.4)$$

где  $\psi_k$  – начальная фаза гармоник.

Раскрывая скобки во втором слагаемом выражения (2.4) и приравнявая коэффициенты при синусах и косинусах в формулах (2.3) и (2.4), получаем

$$C_k = A_k \cos \psi_k; S_k = -A_k \sin \psi_k, \quad (2.5)$$

а также

$$A_k = \sqrt{C_k^2 + S_k^2}; \operatorname{tg} \psi_k = -\frac{S_k}{C_k}; A_0 = C_0.$$

Таким образом, с помощью формул (2.2) и (2.3) периодическая функция  $f(t)$  может быть представлена суммой гармонических колебаний (гармоник) с частотами, кратными основной частоте  $\Omega_1$ , и надлежащим образом подобранными амплитудами  $A_k$  (или  $C_k$  и  $S_k$ ) и начальными фазами  $\psi_k$ .

Постоянная составляющая  $\frac{A_0}{2} = \frac{C_0}{2} = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt$  представляет собой

среднее значение функции  $f(t)$ .

Совокупность гармонических составляющих функции  $f(t)$  называется спектром этой функций (сигнала). Гармонические составляющие, входящие в состав спектра, в общем случае могут иметь различные амплитуды и начальные фазы. Чтобы получить более наглядное представление о спектре, целесообразно воспользоваться графиками, называемыми спектральными диаграммами. Различают два вида диаграмм: амплитудно-частотные и фазочастотные. При построении этих диаграмм по оси ординат откладывают соответственно значение амплитуды или начальной фазы, по оси абсцисс – дискретные частоты гармонических колебаний  $0, \Omega_1, 2\Omega_1, 3\Omega_1$  и т.д.

Спектры периодических колебаний получили название дискретных или линейчатых, так как состоят из отдельных линий, длины которых пропорциональны амплитудам (фазам) соответствующих гармоник. Чаще всего интересуются спектром амплитуд и называют его сокращенно «спектром». Если речь идет о фазах, то это специально оговаривают.

Ряд (2.4) можно представить в комплексной форме, которая более удобна при теоретических исследованиях. Для этого ряд (2.4) запишем в виде

$$f(t) = \frac{1}{2} \left[ A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2A_k \cos(k\Omega_1 t + \psi_k) \right].$$

Под знаком суммы ряда находится слагаемое  $2A_k \cos(k\Omega_1 t + \psi_k)$ , которое можно считать суммой проекций на вещественную ось двух векторов длиной  $A_k$ , вращающихся с угловой скоростью  $k\Omega_1$  в противоположных направлениях. Вектор, вращающийся против часовой стрелки, соответствует положительной частоте  $k\Omega_1$ , а вектор, вращающийся против часовой стрелки, – отрицательной частоте  $k\Omega_1$ .

Таким образом, можно записать

$$2A_k \cos(k\Omega_1 t + \psi_k) = \dot{A}_k e^{jk\Omega_1 t} + \dot{A}_{-k} e^{-jk\Omega_1 t}, \quad (2.6)$$

где  $\dot{A}_k = A_k e^{j\psi_k t}$  и  $\dot{A}_{-k} = A_k e^{-j\psi_k t}$ .

На основании формулы (2.6) ряд Фурье (2.4) примет

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \dot{A}_k e^{jk\Omega_1 t} . \quad (2.7)$$

Это и есть комплексная форма ряда Фурье.

Комплексная амплитуда  $k$ -й гармоники с учетом формул (2.5) равна

$$\dot{A}_K = A_K e^{j\psi_K} = A_K \cos \psi_K + jA_K \sin \psi_K = C_K - jS_K .$$

Подставив в последнее выражение для  $A_k$  значения  $C_k$  и  $S_k$  из формул (2.2) и заменив обозначение  $f(t)$  на  $u(t)$ , получим

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} u(t) \cos k\Omega_1 t dt - j \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} u(t) \sin k\Omega_1 t dt = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} u(t) e^{-jk\Omega_1 t} dt . \quad (2.8)$$

Следует отметить, что при  $k = 0$  из формулы (2.8) получаем выражение для постоянной составляющей  $A_0$ .

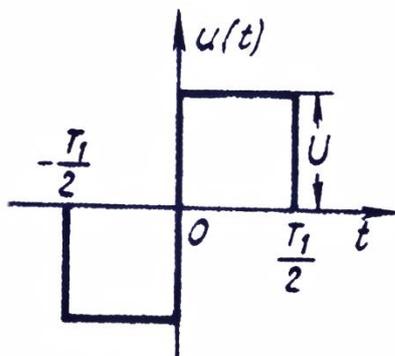
В ряде (2.7) суммирование происходит как по положительным, так и по отрицательным  $k$ . Это означает, что комплексная форма записи ряда Фурье содержит гармоники не только с положительными, но и с отрицательными, частотами, так как всегда  $\Omega_1 > 0$ . Отрицательные частоты не имеют физического смысла и их появление объясняется формальным представлением тригонометрической функции  $2A_K \cos(k\Omega_1 t + \psi_K)$  в виде двух векторов, вращающихся в противоположные стороны с угловыми скоростями  $k\Omega_1$  и  $-k\Omega_1$ .

В общем случае суммы (2.4) и (2.7) являются бесконечными рядами. Но в действительности для всех сигналов число членов суммы, а, следовательно, и число спектральных линий конечно, так как амплитуды гармоник, начиная с некоторого номера  $k$ , уже настолько малы, что ими можно пренебречь. Так же конечен будет спектр сигнала, проходящего через линейные цепи, так как последние имеют ограниченную полосу пропускания. Таким образом, сигналы фактически являются функциями с ограниченным спектром.

Диапазон частот, соответствующий ограниченному спектру, называется шириной спектра.

В дальнейшем на конкретных примерах будет показано, как определить ширину спектра, а также уточнено понятие ширины спектра сигнала.

*Пример 2.1.* Необходимо разложить функцию  $u(t)$ , показанную на рис. 2.1.



**Рис. 2.1.** Биполярный прямоугольный импульс

Как видно из рис. 2.1,  $u(t)$  – нечетная функция, поэтому косинусоидальные члены в ряде (2.3) исчезают ( $C_k = 0$ ) и

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k \sin k\Omega_1 t,$$

$$\text{где } S_k = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} u(t) \sin k\Omega_1 t dt = \frac{4}{T_1} \int_{\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} U \sin k\Omega_1 t dt = 2 \frac{1 - (-1)^k}{k\pi} U.$$

При четных  $k$   $S_k = 0$ , а при  $k = 2m - 1$ , т.е. нечетных, так как  $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ ,

$$S_{2m-1} = \frac{4U}{\pi} \frac{1}{2m-1}.$$

$$\text{Следовательно, } u(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4U}{\pi(2m-1)} \sin(2m-1)\Omega_1 t.$$

Из сравнения рядов (2.4) и (2.1) находим соотношение между  $b_k$  и  $S_k$ :

$$b_k = S_k \sqrt{\frac{T_1}{2}}.$$

Тогда из равенства Парсеваля получим

$$\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} u^2(t) dt = U^2 T_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \sqrt{\frac{T_1}{2}} \frac{4U}{\pi(2m-1)} \right]^2.$$

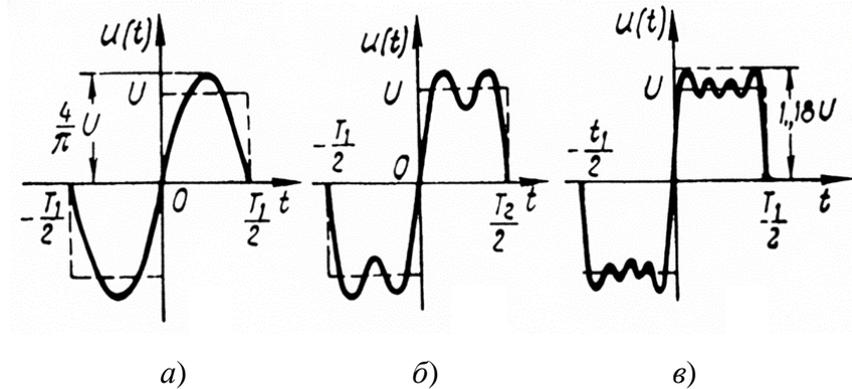


Рис. 2.2. Результат наложения гармонических составляющих

При аппроксимации  $u(t)$  первым членом ряда (рис. 2.2, а)

$$u(t) \approx \frac{4U}{\pi} \sin \Omega_1 t$$

погрешность имеет значение

$$\xi_1^2 = U^2 - \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{4U}{\pi} \right)^2 = U^2 \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \approx 0,2U^2.$$

При аппроксимации  $u(t)$  двумя членами (рис. 2.2, б)

погрешность  $\xi_2^2$  равна

$$\xi_2^2 = U^2 - \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{4U}{\pi} \right)^2 - \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{4}{3\pi} \right)^2 = U^2 \left( 1 - \frac{80}{\pi^2} \right) \approx 0,1U^2.$$

Как и следовало ожидать, величина погрешности зависит от числа аппроксимирующих членов. Расчеты показывают, что вначале при увеличении числа членов погрешность резко падает. При большом числе членов их дальнейшее увеличение практически не изменяет величины погрешности, поэтому нецелесообразно аппроксимировать функцию очень большим числом членов.

Рассмотрим, как конечная сумма

$$u_n(t) = \frac{4U}{\pi} \sum_{m=1}^n \frac{\sin(2m-1)\Omega_1 t}{2m-1}$$

аппроксимирует функцию  $u(t)$  при увеличении  $n$ . Казалось бы, увеличение  $n$  должно привести к уменьшению первого максимума функции  $u_n(t)$ , который должен стремиться к  $U$ . В действительности этого не происходит. Найдем значение  $u_n(t)$  в первом максимуме:

$$\frac{du_n(t)}{dt} = \frac{4U}{\pi} \Omega_1 \sum_{m=1}^n \cos(2m-1)\Omega_1 t = \frac{4\Omega_1 U}{2\pi} \frac{\sin 2n\Omega_1 t}{\sin \Omega_1 t}.$$

Отсюда определяем значение  $\Omega_1 t$ , при котором  $u_n(t)$  достигает максимального значения:

$$\sin 2n\Omega_1 t = 0; \quad 2n\Omega_1 t = \pi; \quad \Omega_1 t = \frac{\pi}{2n}.$$

Тогда

$$u_n(t)_{\max} = \frac{4U}{\pi} \sum_{m=1}^n \frac{\sin(2m-1) \frac{\pi}{2n}}{2m-1}$$

При различных  $n$  получим следующие значения  $u_{n\max}$ :

$$u_{1\max} = \frac{4U}{\pi} = 1,27U; \quad u_{2\max} = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} U = 1,2U; \quad u_{3\max} = \frac{56}{15\pi} = 1,19U.$$

Из полученных данных видно, что  $u_{n\max}$  медленно уменьшается с ростом  $n$ .

Можно показать, что предел, к которому стремится  $u_{n\max}$  (при  $n \rightarrow \infty$ ) будет равен 1,18 (рис. 2.2, в). Таким образом, при увеличении  $n$  значения пика напряжения остаются почти неизменными. Уменьшается только площадь, занимаемая выбросами, и среднеквадратичная погрешность стремится к нулю. Это явление называется явлением Гиббса. Кроме того, увеличение аппроксимирующих членов сопровождается возрастанием крутизны подъема и спада результирующей кривой, аппроксимирующей периодическую последовательность прямоугольных импульсов. Явление Гиббса – общее для

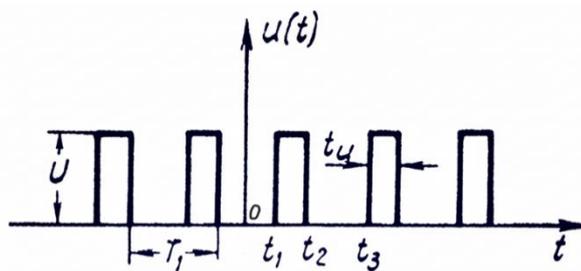
всех сигналов, имеющих разрывы, как, например, рассмотренная функция  $u(t)$ , а также для одиночных импульсов.

*Пример 2.2.* Определить спектр периодической последовательности прямоугольных однополярных видеоимпульсов напряжения, имеющих амплитуду  $U$ , длительность  $t_{и}$  и следующих с частотой повторения  $F_1 = \frac{1}{T_1}$  (рис. 2.3).

Положение импульсов относительно начала отсчета  $t = 0$  выбрано произвольно. Функцию  $u(t)$  в этом случае можно задать следующим образом:

$$u(t) = \begin{cases} U & \text{при } t_1 \leq t \leq t_2 = t_1 + t_{и}; \\ 0 & \text{при } t_2 < t < t_1, \end{cases}$$

где  $t_1$  – момент времени, определяющий положение импульса относительно начала отсчета  $t = 0$ .



**Рис. 2.3.** Периодическая последовательность прямоугольных импульсов напряжения

Комплексные амплитуды гармонических составляющих определяются с помощью выражения (2.8) и в данном случае примут вид

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T_1} \int_{t_1}^{t_2} U e^{-jk\Omega_1 t} dt = \frac{2U \left( e^{-jk\Omega_1 t_1} - e^{-jk\Omega_1 t_2} \right)}{T_1 jk\Omega_1}.$$

После подстановки  $t_2 = t_1 + t_{и}$  и несложных преобразований получим  $\dot{A}_k$  в виде

$$\dot{A}_k = A_k e^{j\psi_k} = \frac{2Ut_{и}}{T_1} \frac{\sin \frac{k\Omega_1 t_{и}}{2}}{\frac{k\Omega_1 t_{и}}{2}} e^{-jk\Omega_1 \left( t_1 + \frac{t_{и}}{2} \right)}. \quad (2.9)$$

Из формулы (2.9) можно определить амплитуды гармоник

$$A_k = \frac{2Ut_{\text{и}}}{T_1} \left| \frac{\sin \frac{k\Omega_1 t_{\text{и}}}{2}}{\frac{k\Omega_1 t_{\text{и}}}{2}} \right| = \frac{2U}{q} \left| \frac{\sin \frac{k\pi}{q}}{\frac{k\pi}{q}} \right|, \quad (2.10)$$

где отношение  $q = \frac{T_1}{t_{\text{и}}}$  носит название «скважность». Выражение для

постоянной составляющей  $\frac{A_0}{2}$  также может быть получено из формулы (2.9)

при  $k = 0$

$$\frac{A_0}{2} = \frac{Ut_{\text{и}}}{T_1} = \frac{U}{q}. \quad (2.11)$$

Из выражений (2.10) и (2.11) следует, что амплитуды гармоник и величина постоянной составляющей не зависят от выбора начала отсчета времени.

На основании выражений (2.4), (2.7) и (2.9) рассматриваемую функцию запишем в виде ряда Фурье для данного случая в комплексной форме

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{2Ut_{\text{и}}}{T_1} \frac{\sin \frac{k\Omega_1 t_{\text{и}}}{2}}{\frac{k\Omega_1 t_{\text{и}}}{2}} e^{jk\Omega_1 \left( t - t_1 - \frac{t_{\text{и}}}{2} \right)} \quad (2.12)$$

и в вещественной форме

$$u(t) = \frac{Ut_{\text{и}}}{T_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2Ut_{\text{и}}}{T_1} \frac{\sin \frac{k\Omega_1 t_{\text{и}}}{2}}{\frac{k\Omega_1 t_{\text{и}}}{2}} \cos \left[ k\Omega_1 \left( t - t_1 - \frac{t_{\text{и}}}{2} \right) \right]. \quad (2.13)$$

Чтобы получить графическое изображение спектра, необходимо на ось абсцисс нанести частоты  $k\Omega_1$ , а на ось ординат – величины, соответствующие амплитудам или фазам. В целях облегчения построения спектральных диаграмм вначале обычно наносят огибающую спектра амплитуд. Кроме того, с помощью огибающей можно наглядно показать характер изменения амплитуд в широком диапазоне частот.

Огибающая спектра амплитуд определяется из формулы (2.10) при замене  $k\Omega_1$  на  $\omega$ :

$$A_k(\omega) = \frac{2Ut_{и}}{T_1} \left| \frac{\sin \frac{\omega t_{и}}{2}}{\frac{\omega t_{и}}{2}} \right|. \quad (2.14)$$

Как следует из формулы (2.14), форма огибающей определяется кривой, описываемой функцией вида  $\left| \frac{\sin x}{x} \right|$  при  $x = \frac{\omega t_{и}}{2}$ . При  $x \rightarrow 0$   $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \rightarrow 1$ , при  $\omega = \frac{2\pi}{t_{и}}; \frac{4\pi}{t_{и}}; \frac{6\pi}{t_{и}}$  и т.д. кривая  $\left| \frac{\sin x}{x} \right| = 0$ . Восстановив перпендикуляры из точек, соответствующих значениям частот гармоник до пересечения с огибающей, получим график спектра амплитуд. На рисунке 2.4 изображен спектр амплитуд для значения скважности  $q = 4$ . В данном случае амплитуды 4-й, 8-й и т.д. гармоник (что нетрудно показать) будут равны нулю.

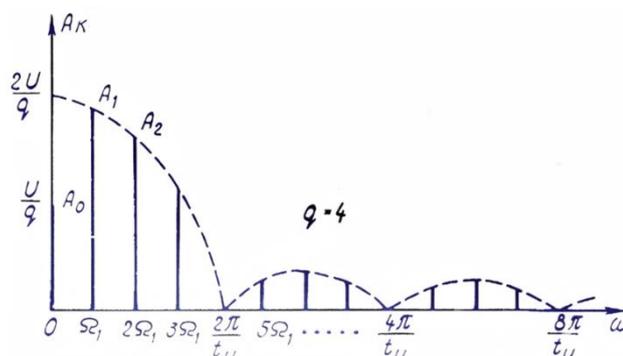


Рис. 2.4. Спектр амплитуд для значения скважности  $q = 4$

Число составляющих спектра бесконечно, спектр бесконечно широк, однако с увеличением частоты амплитуды спектральных составляющих, хотя и не монотонно, но убывают, что позволяет ограничить ширину спектра, учитывая только составляющие, в которых содержится основная энергия импульса. Часто за ширину спектра принимают диапазон частот, наивысшая частота которого определяется первым нулем огибающей спектра амплитуд. Первый нуль огибающей получим из уравнения

$$\frac{\sin \frac{\omega t_{\text{и}}}{2}}{\frac{\omega t_{\text{и}}}{2}} = 0,$$

откуда  $\frac{\omega t_{\text{и}}}{2} = \pi$  и  $\omega = \frac{2\pi}{t_{\text{и}}}$ . Таким образом, ширина спектра будет равна

$$\Delta\omega_{\text{сп}} = \frac{2\pi}{t_{\text{и}}}. \quad (2.15)$$

Как следует из формулы (2.15), чем короче импульс, тем шире спектр, и наоборот. Уменьшение (увеличение) длительности импульса при постоянном периоде следования  $T_1$  ведет также к уменьшению (увеличению) амплитуд составляющих спектра, что следует из выражения для  $A_k$  и объясняется физически уменьшением (увеличением) энергии в импульсе. При увеличении длительности импульса происходит «сжатие» спектра: основные гармонические составляющие, имеющие наибольшие амплитуды, сосредоточиваются в области низких частот.

Ширина спектра  $\Delta\omega_{\text{сп}}$ , определяемая из формулы (2.15), не зависит от периода следования  $T_1$ . При уменьшении (увеличении) периода следования и неизменной длительности импульса  $t_{\text{и}}$  увеличивается (уменьшается) частотный интервал между спектральными составляющими и растут (уменьшаются) амплитуды, что следует из формулы для  $A_k$  и объясняется соответствующим изменением энергии сигнала.

Выражения для начальных фаз гармоник  $\psi_k$  можно получить с помощью вещественной формы ряда Фурье (2.13). Учитывая также то обстоятельство, что функция вида  $\frac{\sin x}{x}$ , входящая в формулу для  $A_k$  (2.9), меняет знак на обратный

при изменении частоты на величину  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{t_{\text{и}}}$ , что соответствует изменению

фазы на  $\pi$ , выражение начальных фаз гармоник запишем в виде

$$\psi_k = -\left[ k\Omega_1 \left( t_1 + \frac{t_{\text{и}}}{2} \right) - \pi(n-1) \right],$$

где  $n$  – порядковый номер интервала  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{t_{\text{и}}}$  на шкале частот, отсчитываемый от  $\omega = 0$ .

Фазочастотный спектр (рис. 2.5), представляющий собой совокупность начальных фаз гармонических составляющих, изображается в виде спектральной диаграммы таким же образом, как и спектр амплитуд.

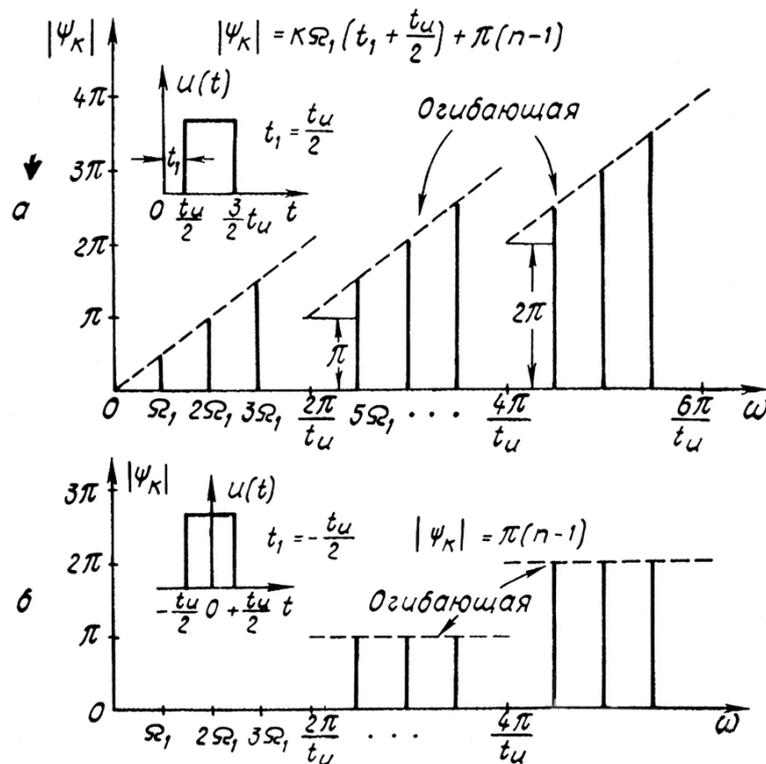


Рис. 2.5. Фазочастотный спектр

Огибающая начальных фаз определяется из выражения (2.16) путем замены  $k\Omega_1$  на  $\omega$ :

$$\psi_k(\omega) = -\omega \left( t_1 + \frac{t_{\text{и}}}{2} \right) + \pi(n-1). \quad (2.16)$$

На рисунке 2.5 показаны фазочастотные спектры при различных положениях импульсов относительно начала отсчетов  $\left( t_1 = \frac{t_{\text{и}}}{2}; t_1 = -\frac{t_{\text{и}}}{2} \right)$ .

Из формулы (2.16) следует, что спектр фаз, в отличие от спектра амплитуд, зависит от выбора положения начала отсчетов (рис. 2.5, а, б).

Если выбрать начало отсчетов таким образом, чтобы функция  $u(t)$  оказалась четной, то ее представление в виде ряда Фурье и фазовый спектр (рис. 2.5, б) будут иметь более простой вид. Коэффициенты  $S_k$ , определяемые формулой (2.2), будут равны нулю (подынтегральное выражение является четной функцией), следовательно,  $A_k = C_k$  и ряд (2.3) примет вид

$$u(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_K \cos k\Omega_1 t = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} C_K \cos k\Omega_1 t. \quad (2.17)$$

Если подставить в формулу (15.17) выражение для  $A_k$ , то

$$u(t) = \frac{U_{тн}}{T_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2U_{тн}}{T_1} \left| \frac{\sin \frac{k\Omega_1 t_{тн}}{2}}{\frac{k\Omega_1 t_{тн}}{2}} \right| \cos[k\Omega_1 + \pi(n-1)],$$

и начальная фаза гармоник  $\psi_k = \pi(n-1)$ .

О характере распределения мощности в спектре периодического сигнала можно судить уже на основании так называемую энергетического спектра. Допустим, что ток  $i(t)$ , протекающий через сопротивление  $R$ , является периодической функцией времени с периодом  $T_1$  и определяется выражением (1.9). Тогда средняя за период мощность, которая (рассеивается в этом сопротивлении, на основании выражения (1.8) будет равна

$$P_{cp} = \frac{RA_0^2}{4} + \frac{R}{2} \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k^2. \quad (2.18)$$

Первое слагаемое формулы (2.18) соответствует мощности постоянной составляющей, второе – средней мощности всех гармоник. Умножив левую и правую части формулы (2.18) за период  $T_1$ , получим зависимость, выражающую распределение энергии по частотам и позволяющую построить энергетический спектр

$$W_3 = P_{cp} T_1 = RT_1 \left( \frac{A_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k^2}{2} \right). \quad (2.19)$$

Спектральная диаграмма энергетического спектра строится так же, как и спектральная диаграмма амплитудно-частотного спектра, но по вертикали

откладывают уже величины энергии составляющих спектра или величины, им пропорциональные. Здесь также удобно воспользоваться огибающей спектра, получаемой путем замены в выражениях для  $A_k^2$   $k\Omega_1$  на  $\omega$ .

Ранее было дано определение ширины спектра на основе амплитудного критерия, т.е. когда пренебрегают гармониками с малой амплитудой и тем самым ограничивают ширину спектра.

*Пример 2.3.* В качестве примера необходимо определить ширину спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов, рассмотренной в предыдущем примере, причем ширину спектра не будем ограничивать нулем огибающей спектра амплитуд. В спектре учтем все гармонические составляющие, амплитуды которых более 0,24 от амплитуды первой гармоники, т.е.  $\frac{A_k}{A_1} \geq 0,24$ . Определяя значение величины гармоник из выражения (2.10) и находя их отношение, получаем (при  $q = 4$ )

$$\frac{A_k}{A_1} = \frac{\sin \frac{k\pi}{q}}{k \sin \frac{\pi}{q}} = \frac{\sin \frac{k\pi}{q}}{k \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0,24.$$

Представив полученное отношение гармоник в виде функции  $\frac{\sin x}{x}$  и найдя величину  $x = \frac{k\pi}{q}$ , определим с помощью таблицы функции  $\frac{\sin x}{x}$  значение  $k = 6$ . Таким образом, ширина спектра  $\Delta\omega_{\text{сп}} = 6\Omega_1$ . В найденном диапазоне частот имеется шесть гармоник и постоянная составляющая.

Определим среднюю мощность, приходящуюся на составляющие найденной ширины спектра (для упрощения расчетов считаем, что эта мощность рассеивается на сопротивлении  $R = 1$ ). С учетом формул (2.13) и (2.18) определяем

$$P_{\text{ср}} = \frac{U^2}{16} + \frac{U^2}{2\pi^2} \left( 4 \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{2} + \frac{4}{9} \sin^2 \frac{3}{4} \pi + \frac{4}{0,25} \sin^2 \frac{5}{4} \pi + \frac{1}{9} \sin^2 \frac{3}{2} \pi \right) = 0,234U^2.$$

Средняя мощность, выделяемая на этом же сопротивлении всеми гармониками сигнала,

$$P_{\text{ср}\Sigma} = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} u^2(t) dt = \frac{1}{T_1} \int_0^{t_u} u^2(t) dt = \frac{U^2}{q} = 0,25U^2.$$

Таким образом,  $\frac{P_{\text{ср}}}{P_{\text{ср}\Sigma}} = 93,5\%$ , т.е. составляющие, входящие в состав спектра  $\Delta\omega_{\text{сн}}$  периодической последовательности прямоугольных импульсов, выделяют на активном сопротивлении 93,5% всей мощности сигнала.

Очевидно, что увеличение ширины спектра путем учета большего количества составляющих (более  $6\Omega_1$ ) с энергетической точки зрения нецелесообразно. При расчете величины  $\Delta\omega_{\text{сн}}$  необходимо принять во внимание также следующее обстоятельство. Ограничение спектра сигнала, которое может происходить вследствие ограниченной полосы пропускания реального устройства, через которое проходит сигнал, приводит к искажению формы сигнала (см. пример 2.1). Таким образом, при выборе ширины спектра необходимо учитывать как энергетические требования, так и требования к наименьшим искажениям формы сигнала.

## 2.2. СПЕКТР НЕПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА

В тех случаях, когда на цепь воздействует непериодическая последовательность импульсов, у которой период повторения  $T_1$  велик по сравнению с  $t_{и}$  и по времени значительно превосходит процессы установления колебаний в цепи после воздействия каждого импульса, можно считать, что на цепь в данном случае воздействуют отдельные, независимые друг от друга импульсы. Если для периодической последовательности  $u(t)$  период  $T_1$ , устремить к бесконечности, то получим одиночный импульс, а, следовательно, непериодическую функцию, представленную одним импульсом периодической последовательности (рис. 2.6). Полученный таким образом непериодический сигнал можно рассматривать как периодический сигнал с периодом  $T_1$ , стремящимся к бесконечности, который описывается соотношениями (2.7) и (2.8). Однако при  $T_1 \rightarrow \infty$  частота  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$  по мере увеличения  $T_1$  уменьшается и в пределе стремится к  $d\omega$ , а  $k\Omega_1$  – к значению текущей частоты  $\omega$ , поскольку  $k\Omega_1$  принимает все значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Изменится также и вид спектральных диаграмм, показанных на рис. 2.6 и 2.7.

Так как частотный интервал между составляющими  $\Omega_1 \rightarrow 0$ , спектр становится *сплошным*, т.е. будет содержать все возможные частоты от нуля до бесконечности и вместо совокупности дискретных значений должен изображаться непрерывной последовательностью точек – непрерывной кривой.

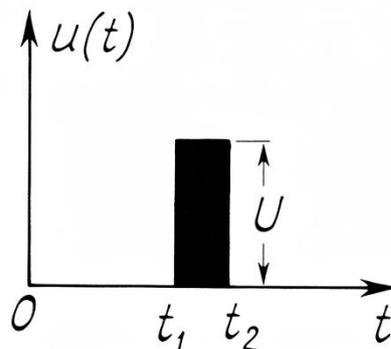


Рис. 2.6. Одиночный импульс

Сплошной спектр в любом конечном интервале частот имеет бесконечно большое количество составляющих. При конечных амплитудах составляющих сплошного спектра в этом интервале заключалась бы бесконечно большая энергия, чего быть не может. Поэтому комплексная амплитуда  $\dot{A}_k$ , определяемая из формулы (2.8) и равная

$$\dot{A}_k = \frac{\Omega_1}{\pi} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} u(t) e^{-jk\Omega_1 t} dt,$$

при  $T_1 \rightarrow \infty$  становится бесконечно малой и принимает значение

$$\dot{A}_k \rightarrow d\dot{A}_k = \frac{d\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.20)$$

Заменяя в ряде Фурье (1.7) операцию суммирования операцией интегрирования (так как уже суммируется бесконечно большое число бесконечно малых амплитуд  $d\dot{A}_k$ ), а  $k\Omega_1$  – значением текущей частоты  $\omega$ , получим

$$u(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\dot{A} e^{j\omega t}, \quad (2.21)$$

где бесконечно малая амплитуда  $d\dot{A}_k$  определяется из выражения (2.20).

Из формулы (2.21) следует, что непериодическую функцию  $u(t)$  можно записать в виде суммы бесконечного множества гармонических составляющих с бесконечно малыми амплитудами  $d\dot{A}$ , частота которых отличается на бесконечно малую величину  $d\omega$ .

Выражение (2.21) получило название интеграла Фурье. Как видно, сплошной спектр имеет свои особенности, вследствие которых описание его с помощью рядов Фурье уже не имеет смысла. Математически сплошной спектр описывается уже с помощью интеграла Фурье. При подстановке в интеграл Фурье выражения для  $d\dot{A}$  из формулы (15.20) получим

$$u(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{G}(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.22)$$

где функция  $\dot{G}(\omega)$  определяется как

$$\dot{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.23)$$

На основании выражений (2.21) и (2.22) бесконечно малая амплитуда  $d\dot{A}$  может быть выражена через функцию  $\dot{G}(\omega)$ :

$$d\dot{A} = \frac{1}{\pi} \dot{G}(\omega) d\omega,$$

откуда

$$\dot{G}(\omega) = \pi \frac{d\dot{A}}{d\omega}. \quad (2.24)$$

Функцию  $\dot{G}(\omega)$ , пропорциональную отношению  $\frac{d\dot{A}}{d\omega}$ , модуль которого характеризует интенсивность спектральных составляющих, приходящихся на частотный интервал  $d\omega$ , называют спектральной плотностью или спектральной функцией. Часто для сокращения модуль  $\dot{G}(\omega)$  называют спектром.

Для одиночного импульса, длительность которого определяется временным интервалом от  $t_1$  до  $t_2$ , спектральная плотность  $\dot{G}(\omega)$  может быть выражена формулой

$$\dot{G}(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} u(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.25)$$

В случае *периодической* последовательности импульсов такого же вида выражение  $\dot{A}_k$  из формулы (2.8) при замене  $k\Omega_1$  на  $\omega$  примет вид

$$\dot{A}(k\Omega_1) = \dot{A}_k(\omega) = A_k e^{j\psi(\omega)} = \frac{2}{T_1} \int_{t_1}^{t_2} u(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2.26)$$

где  $A_k$  и  $\psi(\omega)$  – соответственно модуль и аргумент  $\dot{A}_k(\omega)$ .

Из сравнения формул (2.25) и (2.26) следует, что

$$\dot{A}_k(\omega) = \dot{A}_k(k\Omega_1) = \frac{2}{T_1} \dot{G}(k\Omega_1). \quad (2.27)$$

Для постоянной составляющей

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{T_1} \int_{t_1}^{t_2} u(t) dt = \frac{\Omega_1}{2\pi} G(0). \quad (2.28)$$

Таким образом, используя зависимости (2.27) и (2.28), можно определить спектр периодической последовательности видеоимпульсов по известной спектральной плотности  $\dot{G}(\omega)$  для одного импульса этой последовательности. Из соотношений (2.27) и (2.28) следует также, что огибающая сплошного спектра (модуль спектральной плотности  $\dot{G}(\omega)$ ) и огибающая линейчатого спектра  $\dot{A}_k(\omega)$  периодической функции  $u(t)$  совпадают по форме и отличаются только масштабом:

$$A_k(\omega) = \frac{\Omega_1}{\pi} G(\omega). \quad (2.29)$$

Аргумент  $\psi(\omega)$  спектральной функции  $\dot{G}(\omega) = G(\omega)e^{j\psi(\omega)}$  представляет собой огибающую фазочастотного спектра периодической последовательности импульсов того же вида. Формулы (2.23) и (2.22) называются соответственно прямым и обратным преобразованиями Фурье.

В курсе математики доказывается, что эти преобразования имеют смысл при условии, что функция  $u(t)$  абсолютно интегрируема, т.е. интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) dt \leq M,$$

где  $M$  – конечная величина, а  $u(t)$  на интервале  $-\infty < t < +\infty$  удовлетворяет условиям Дирихле.

Преобразования Фурье играют огромную роль в различных научных исследованиях, в теории сигналов и электрических цепей, теории антенн, оптике и других областях. Прежде чем непосредственно приступить к определению спектральных функций различных сигналов, рассмотрим ряд

основных свойств и теорем преобразования Фурье. Спектры сигналов могут определяться путем непосредственного применения прямого преобразования Фурье. Однако использование некоторых свойств преобразования Фурье позволяет значительно упростить математические выкладки, тем самым существенно облегчает решение конкретных задач, а также дает возможность составить качественное представление об ожидаемом результате.

## 2.3. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

### 2.3.1. Свойства симметрии спектральных функций

Спектральную функцию  $\dot{G}(\omega)$ , как и другую комплексную величину, можно представить в виде

$$\dot{G}(\omega) = a(\omega) - jb(\omega) = G(\omega)e^{j\psi(\omega)}. \quad (2.30)$$

На основании формулы (2.23) получим

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cos \omega t dt; \quad b(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \sin \omega t dt. \quad (2.31)$$

Таким образом, модуль и аргумент спектральной характеристики будут соответственно равны:

$$G(\omega) = \sqrt{[a(\omega)]^2 - [b(\omega)]^2}; \quad \psi(\omega) = -\arctg \frac{b(\omega)}{a(\omega)}. \quad (2.32)$$

Из выражений (2.32) следует, что модуль спектральной функции четная, а аргумент – нечетная функции частоты. Следовательно, можно записать

$$G(\omega) = G(-\omega); \quad \psi(-\omega) = -\psi(\omega). \quad (2.33)$$

Примерный вид графиков  $G(\omega)$  и  $\psi(\omega)$  показан на рис. 2.7, а и б.

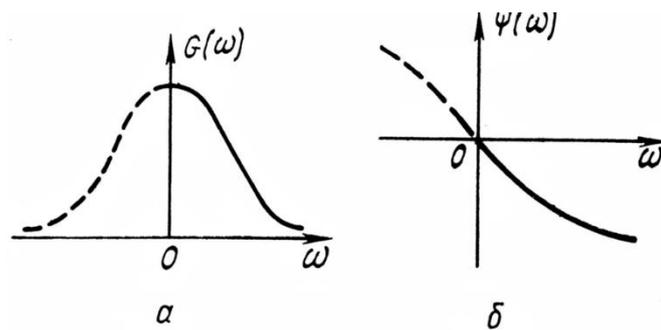


Рис. 2.7. Модуль (а) и аргумент (б) спектральной функции

Обратное преобразование Фурье (2.22), которое было получено из комплексной формы ряда Фурье, требует задания спектральной характеристики как в области положительных, так и в области отрицательных частот. Но на основании соотношений (2.33) участки кривых, лежащих в области

отрицательных частот, обычно вообще не изображаются или изображаются пунктирными линиями.

Отрицательные частоты можно исключить из рассмотрения, если воспользоваться тригонометрической (вещественной) формой обратного преобразования Фурье. Из выражений (2.22) и (2.30) следует, что

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{j(\omega t + \psi)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \cos(\omega t + \psi) d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \sin(\omega t + \psi) d\omega.$$

В первом слагаемом подынтегральное выражение – четная функция, во втором – нечетная, следовательно, второй интеграл равен нулю. Это очевидно также и потому, что мнимой составляющей у функции  $u(t)$  нет. Поэтому тригонометрическая форма обратного преобразования Фурье (2.22) примет вид

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \cos(\omega t + \psi) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) \cos(\omega t + \psi) d\omega = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \dot{G}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.34)$$

Таким образом, согласно формуле (2.34) сигнал  $u(t)$ , а следовательно, и все его свойства полностью определяются спектральной функцией, задаваемой в области положительных частот.

Обычно все основные выкладки с применением интеграла Фурье удобнее и проще производить, используя комплексную форму. Переход к тригонометрической форме интеграла Фурье (2.34) целесообразен в конце анализа, так как желательно конечный результат оценить не только с количественной, но и с физической точек зрения.

### 2.3.2. Линейность преобразований Фурье

Допустим, что дана сумма функций

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + \dots \quad (2.35)$$

Применяя прямое преобразование Фурье к левой и правой частям равенства (2.35), получим

$$\dot{G}(\omega) = \dot{G}_1(\omega) + G_2(\omega) + G_3(\omega) + \dots, \quad (2.36)$$

где  $\dot{G}_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t)e^{-j\omega t} dt$ ;  $\dot{G}_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_2(t)e^{-j\omega t} dt$  и т.д.

Из формулы (2.36) следует: спектр суммы функций равен сумме спектров отдельных функций, что указывает на линейность обратного преобразования Фурье. Аналогично, если  $u_1(t) = au(t)$ , где  $a$  – постоянная, то  $\dot{G}_1(\omega) = a\dot{G}(\omega)$ . Здесь  $\dot{G}_1(\omega)$  и  $\dot{G}(\omega)$  – спектральные функции для  $u_1(t)$  и  $u(t)$  соответственно.

### 2.3.3. Теорема запаздывания

Сущность теоремы запаздывания заключается в том, что модуль спектра не зависит от выбора начала отсчета времени. Пусть некоторой функции  $u(t)$  соответствует спектральная функция  $\dot{G}(\omega)$ . Необходимо определить спектральную функцию, соответствующую  $u(t-t_0)$ , где  $t_0$  – постоянная величина. Если  $t_0 > 0$ , то функция  $u(t-t_0)$  является запаздывающей по отношению к функции  $u(t)$ ; при  $t_0 < 0$  – опережающей.

Обозначим искомую спектральную функцию  $\dot{G}_{\text{зап}}(\omega)$ . По определению

$$\dot{G}_{\text{зап}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-t_0)e^{-j\omega t} dt.$$

Произведя замену переменной  $t$  новой переменной  $x = t - t_0$  и  $dx = dt$ , получим

$$\dot{G}_{\text{зап}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-j\omega(x+t_0)} dx = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-j\omega x} dx.$$

Так как значение определенного интервала не зависит от обозначения независимой переменной, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-j\omega x} dx = \dot{G}(\omega),$$

следовательно,  $\dot{G}_{\text{зап}}(\omega) = e^{-j\omega t_0} \dot{G}(\omega)$  и модули этих функций равны между собой, что и доказывает теорему  $|\dot{G}_{\text{зап}}(\omega)| = |\dot{G}(\omega)|$ .

Спектральная плотность запаздывающей функции  $u(t-t_0)$ , как это видно из теоремы, отличается от спектральной плотности функции  $u(t)$  только фазовым множителем  $e^{-j\omega t_0}$ , не влияющим на модуль. Этот множитель изменяет лишь фазовые соотношения компонент. Действительно,

$$\dot{G}_{\text{зап}}(\omega) = \dot{G}(\omega)e^{-j\omega t_0} = G(\omega)e^{j[\psi(\omega)-\omega t_0]} = G(\omega)e^{\psi_{\text{зап}}(\omega)},$$

где  $\psi_{\text{зап}}(\omega) = [\psi(\omega) - \omega t_0]$  – аргумент спектральной функции.

Угол  $\omega t_0$  называется фазовым запаздыванием гармонической составляющей с частотой  $\omega$ . Запаздывание сигнала  $u(t)$  на время  $t_0$  означает запаздывание на то же время каждой из гармонических составляющих, которое не сопровождается изменением амплитуды, в результате чего модуль остается неизменным. Полученные выводы совпадают с установленным ранее положением о том, что амплитудный спектр периодического сигнала не зависит от выбора начала отсчета времени. Таким образом, теорема запаздывания позволяет произвольно выбирать начало отсчета при вычислении модулей спектральных функций.

#### 2.3.4. Теорема масштабов

(Видео Масштаб 01)

При неизменной форме импульсов импульсу меньшей длительности соответствует более широкий спектр и, наоборот, импульсу большей длительности – более узкий спектр.

Пусть некоторой функции  $u(t)$  соответствует спектральная функция  $\dot{G}(\omega)$ . Необходимо определить спектр, соответствующий функции времени  $u(at)$ , где  $a$  – вещественная положительная постоянная. Обозначим искомую спектральную плотность  $\dot{G}_a(\omega)$ . Тогда, согласно формуле (2.23),

$$\dot{G}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(at)e^{-j\omega t} dt.$$

Вводя новую переменную  $x=at$  и производя замену переменной в выражении для  $\dot{G}_a(\omega)$ , получаем

$$\dot{G}_a(\omega) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-j\frac{\omega}{a}x} dx.$$

Поскольку в подынтегральном выражении вместо  $\omega$  фигурирует величина  $\frac{\omega}{a}$ , интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-j\frac{\omega}{a}x} dx$  согласно формуле (3.23) можно обозначить как

$\dot{G}_a\left(\frac{\omega}{a}\right)$ . Тогда искомая спектральная функция будет равна

$$\dot{G}_a(\omega) = \frac{1}{a} \dot{G}\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (2.37)$$

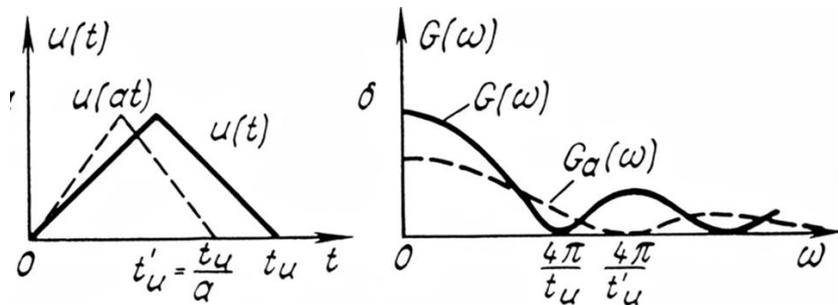


Рис. 2.8. Графики функций (а) и модули спектральных функций (б)

На рисунке 2.8, а показаны две (функции:  $u(t)$  – сплошной кривой и  $u(at)$  – пунктирной. Поскольку выбран случай, когда  $a > 1$ , кривой  $u(t)$ , имеющей вид треугольного импульса, соответствует большая длительность  $t_u$ , чем импульсу  $u(at)$  с длительностью  $t'_u$ . Обе функции равны нулю при значении времени, равном длительности импульса, следовательно,  $u(t_u) = u(at'_u) = 0$ .

Отсюда  $at'_u = t_u$  и  $t'_u = \frac{t_u}{a}$ .

Импульсу  $u(at)$  соответствует спектральная функция  $\dot{G}_a(\omega)$ , модуль которой на рисунке 2.8 показан пунктирной кривой. На основании предыдущих выводов график модуля  $\dot{G}_a(\omega)$  будет растянут по сравнению с графиком модуля  $\dot{G}(\omega)$  в  $a$  раз, а ординаты будут уменьшены в  $\frac{1}{a}$  раз согласно формуле (2.37). При  $a < 1$  наблюдалось бы обратное – спектр  $\dot{G}_a(\omega)$  сузился бы относительно  $\dot{G}(\omega)$  в  $a$  раз. Таким образом, для импульса неизменной формы чем меньше его длительность, тем более широкий и равномерный спектр он имеет, чем больше его длительность, тем уже и неравномернее его спектр.

Из теоремы масштабов следует также, что для импульса неизменной формы произведение длительности импульса  $t_n$  на ширину его спектра  $\Delta\omega_{\text{сп}}$  – величина постоянная, т.е.  $\Delta\omega_{\text{сп}}t_n = \text{const}$ .

Аналогичные соотношения между длительностью импульса и шириной спектра  $\Delta\omega_{\text{сп}}$  были получены при анализе амплитудного спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов.

Полученные результаты имеют большое практическое значение, так как позволяют правильно рассчитать полосы пропускания различных радиотехнических устройств при прохождении через них импульсов.

### 2.3.5. Теорема смещения (переноса) спектра

Умножение  $u(t)$  на гармоническую функцию сдвигает спектр  $u(t)$  на величину частоты гармонической функции. Допустим, функции  $u(t)$  соответствует спектральная плотность  $\dot{G}(\omega)$ . Необходимо определить спектральную функцию для  $u(t)\cos(\omega_1 t + \psi_1)$ , где  $\omega_1, \psi_1$  – постоянные величины. Обозначим искомую спектральную функцию  $\dot{G}_c(\omega)$ , которая согласно формуле (2.23) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{G}_c(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cos(\omega_1 t + \psi_1) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \frac{e^{j(\omega_1 t + \psi_1)} + e^{-j(\omega_1 t + \psi_1)}}{2} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{e^{j\psi_1}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j(\omega - \omega_1)t} dt + \frac{e^{-j\psi_1}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j(\omega + \omega_1)t} dt.\end{aligned}$$

Первый интеграл отличается от спектральной функции

$$\dot{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt$$

тем, что у него в показателе степени вместо  $\omega$  записана разность  $\omega - \omega_1$ , поэтому его обозначают как  $\dot{G}(\omega - \omega_1)$ . Второй интеграл соответственно записывается как  $\dot{G}(\omega + \omega_1)$ . Таким образом, окончательное выражение для  $\dot{G}_c(\omega)$  может быть записано в виде двух спектральных функций

$$\dot{G}_c(\omega) = \frac{1}{2} \left[ e^{j\psi_1} \dot{G}(\omega - \omega_1) + e^{-j\psi_1} \dot{G}(\omega + \omega_1) \right]. \quad (2.38)$$

Вследствие того, что энергия импульса  $u(t)$  конечна, (что справедливо для всех реальных сигналов), модуль спектральной функции  $\dot{G}(\omega)$  должен уменьшаться с ростом частоты. Например, в рассмотренном ранее примере для периодической последовательности прямоугольных импульсов огибающая спектра (она же спектральная функция одиночного импульса) уменьшается (хотя и не монотонно) по закону  $\frac{\sin x}{x}$ .

На рисунке 2.9, а показан график модуля спектральной функции  $\dot{G}(\omega)$  для произвольно взятой функции  $u(t)$ . Форма кривой  $G(\omega)$  – произвольна, так как вид функции  $u(t)$  не конкретизирован.

Для построения модуля спектра  $\dot{G}(\omega)$  необходимо на основании формулы (2.38) кривую  $\dot{G}(\omega)$ , взятую из рис. 2.9, а, сместить в область как положительных, так и отрицательных частот на величину  $\omega_1$ , а ординаты кривых уменьшить вдвое. В области положительных частот ординаты кривой

$\frac{1}{2}G(\omega + \omega_1)$  малы и их значения будут тем меньше, чем выше значения частоты  $\omega_1$ . Это дает право для области положительных частот пренебречь в выражении (2.38) для  $\dot{G}_c(\omega)$  вторым слагаемым и считать

$$\dot{G}_c(\omega) \approx \frac{e^{j\psi_1}}{2} \dot{G}(\omega - \omega_1), \quad (2.39)$$

что и требовалось доказать.

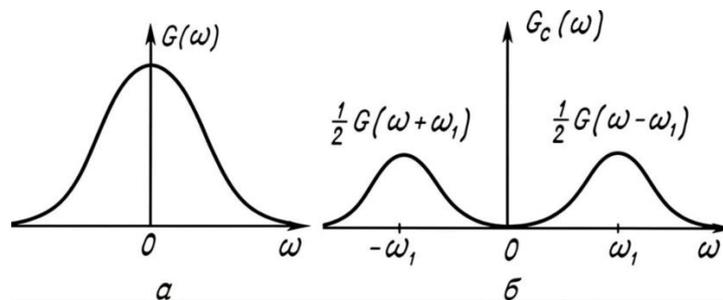


Рис. 2.9. Спектральные функции

Практическая ценность теоремы смещения заключается в том, что с ее помощью можно определить спектр радиоимпульса, если известен спектр видеоимпульса. Действительно, если  $\dot{G}(\omega)$  – спектральная плотность видеоимпульса, то спектр радиоимпульса аналогичной формы отыскивается как спектр функции времени  $u(t)\cos(\omega_1 t + \psi_1)$ , что выполняется с помощью формулы (2.39). Следует отметить, что обратное преобразование Фурье требует применения только полной формулы для  $\dot{G}_c(\omega)$ , а именно выражения (2.38). При использовании в обратном преобразовании Фурье приближенной формулы (2.39) полученная функций времени будет иметь комплексный характер и отличаться на постоянный коэффициент, равный  $\frac{1}{2}$ :  $\dot{u}_1(t) = \frac{1}{2}u(t)e^{j(\omega_1 t + \psi_1)}$ .

Учитывая, что приближенная формула для  $\dot{G}_c(\omega)$  справедлива в области положительных частот, функцию времени можно определить по формуле (2.34):

$$u(t) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \dot{G}_c(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_c(\omega) \cos\{\omega t - [\psi(\omega) + \psi_1]\}, \quad (2.40)$$

где  $G_c(\omega)$  – модуль спектральной функции, определяемый из выражения (2.39).

### 2.3.6. Теорема о распределении энергии в спектре непериодического сигнала (теорема Релея)

С помощью соотношения (2.18) (равенство Парсеваля) можно определить мощность за период периодического сигнала при известных амплитудах гармоник и постоянной составляющей. Желательно получить подобное соотношение и для непериодического сигнала  $u(t)$ . Для этого в обратном преобразовании Фурье, определяющем  $u(t)$  по известной спектральной плотности  $\dot{G}(\omega)$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{G}(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

умножим левую и правую части на  $u(t)$  и, интегрируя его в пределах  $\pm\infty$ , получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Изменим порядок интегрирования в правой части:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{G}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{G}(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{j\omega t} dt.$$

Но интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{j\omega t} dt = \dot{G}(-\omega) \text{ или } G^*(\omega),$$

потому что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = G^*(\omega).$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{G}(\omega) G^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega,$$

так как произведение двух сопряженных комплексных величин равно квадрату их модуля.

Учитывая, что модуль спектральной функции является четной функцией частоты, получим окончательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.41)$$

Так как  $u(t)$  является мгновенным напряжением непериодического сигнала, интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt$  определяет энергию сигнала, выделяемую на

активном сопротивлении в 1 Ом (предполагается, что функция  $u(t)$  абсолютно интегрируема, следовательно, интеграл сходится). Равенство (2.41) выражает теорему Релея, которая указывает, что полную энергию непериодического сигнала можно вычислить как интегрированием квадрата мгновенных значений напряжения (тока), так и интегрированием энергии бесконечно малых слагаемых вида  $\frac{1}{\pi} |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega$ , представляющих собой энергию, выделяемую спектральными составляющими сигнала, расположенными в полосе частот  $d\omega$  в окрестностях частоты  $\omega$ . Необходимо заметить, что речь идет о распределении энергии в области положительных частот, ибо, как указывалось ранее, только они имеют физический смысл.

Величина  $\frac{1}{\pi} |\dot{G}(\omega)|^2$ , называемая энергетической спектральной плотностью, характеризует распределение энергии по спектру, обозначается  $F(\omega)$  и равна

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi} |\dot{G}(\omega)|^2.$$

На рисунке 2.10, *a*, *б*, *в* соответственно показаны графики спектральной плотности одного импульса произвольно взятой периодической функции  $u(t)$ , энергетической спектральной плотности  $F(\omega)$ , а также, для сравнения, амплитудно-частотный спектр функции  $u(t)$ .

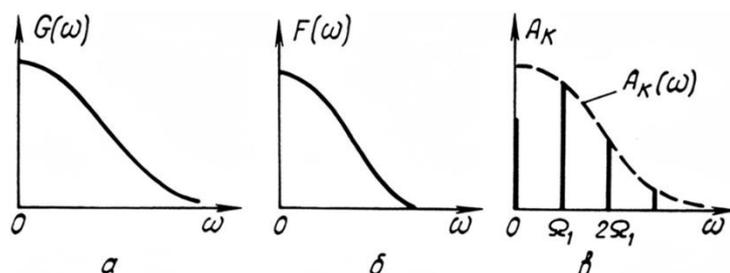


Рис. 2.10. Графики спектральной плотности одного импульса

В отличие от графика рисунка 2.9, *a*, в качестве огибающей амплитудно-частотного спектра  $A_k(\omega)$  взята спектральная плотность  $G(\omega)$  на основании формулы (2.29), т.е. спектр  $u(t)$  показан в другом масштабе.

Формула (2.41) в дальнейшем будет использована при уточнении определений длительности импульса, ширины спектра для некоторых видов сигналов, а также при доказательстве теоремы отсчетов.

### 2.3.7. Спектральные функции производной и интеграла

Пусть сигналу  $u(t)$  соответствует спектральная плотность  $\dot{G}(\omega)$ . Необходимо определить спектральную плотность  $\dot{G}_{\text{пр}}(\omega)$  производной  $\frac{du(t)}{dt}$ , которая находится обычным способом:

$$\dot{G}_{\text{пр}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Интегрировав это выражение по частям, получим

$$\dot{G}_{\text{пр}}(\omega) = u(t)e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Так как преобразования Фурье применимы только к абсолютно интегрируемым функциям, то  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u(t) = 0$ . Следовательно, первое слагаемое в выражении для  $\dot{G}_{\text{пр}}(\omega)$  обращается в нуль и

$$\dot{G}_{\text{пр}}(\omega) = j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt = j\omega \dot{G}(\omega). \quad (2.42)$$

Таким образом, дифференцированию сигнала соответствует умножение спектральной плотности на  $j\omega$ . Проведя аналогичные действия для  $n$ -й производной, получим

$$\dot{G}_{\text{пр}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n[u(t)]}{dt^n} e^{-j\omega t} dt = (j\omega)^n \dot{G}(\omega). \quad (2.43)$$

Последняя формула имеет место, если для всех производных до  $(n - 1)$ -го порядка включительно выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{d^k u(t)}{dt^k} = 0.$$

При определении спектральной плотности интеграла  $\dot{G}_{\text{и}}(\omega)$  будем считать, что сигналу  $u(t)$  соответствует спектральная плотность  $\dot{G}(\omega)$ . Возьмем производную от интеграла

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) d\tau = u(t),$$

которой на основании теоремы о производной будет соответствовать спектральная плотность  $j\omega \dot{G}_{\text{и}}(\omega)$ , и на основании принятого выше условия  $\dot{G}(\omega)$  в результате придем к равенству  $\dot{G}(\omega) = j\omega \dot{G}_{\text{и}}(\omega)$ . Следовательно,

$$\dot{G}_{\text{и}}(\omega) = \frac{\dot{G}(\omega)}{j\omega}. \quad (2.44)$$

Таким образом, интегрирование сигнала приводит к делению спектральной плотности на  $j\omega$ .

### 2.3.8. Спектральная характеристика при различном характере функции $u(t)$

1. Функция  $u(t)$  – четная относительно  $t$ . Спектральную плотность в данном случае определим следующим образом:

$$\dot{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\cos\omega t dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\sin\omega t dt.$$

Так как произведение  $u(t)\sin\omega t$  является нечетной функцией, то второй интеграл равен нулю.

Следовательно,

$$\dot{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\cos\omega t dt = 2 \int_0^{\infty} u(t)\cos\omega t dt. \quad (2.45)$$

Как следует из формулы (2.45), спектральная функция является четной относительно  $\omega$  и вещественной, что дает право в выражении (2.23) произвольно менять знак перед  $\omega$ .

В данном случае прямое и обратное преобразования по своей форме совершенно подобны:

$$\dot{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{j\omega t} dt; \quad u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Это дает возможность в отдельных случаях без дополнительных вычислений определить вид спектральной характеристики или, наоборот, форму сигнала по известной спектральной плотности. Если, например, функция  $u(t)$  имеет вид прямоугольного импульса (рис. 2.11, а) и ей соответствует спектральная характеристика, изображенная на рис. 2.11, б, то спектральной характеристике  $G(\omega)$  с прямоугольной огибающей (рис. 2.11, в) должна соответствовать функция времени  $u(t)$ , изображенная на рис. 2.11, г.

2. Функция  $u(t)$  – нечетная относительно  $t$ . В этом случае произведение  $u(t)\cos\omega t$  является нечетной функцией, интеграл от этого произведения будет равен нулю, и спектральная плотность  $\dot{G}(\omega)$  примет вид

$$\dot{G}(\omega) = -j \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \sin \omega t dt.$$

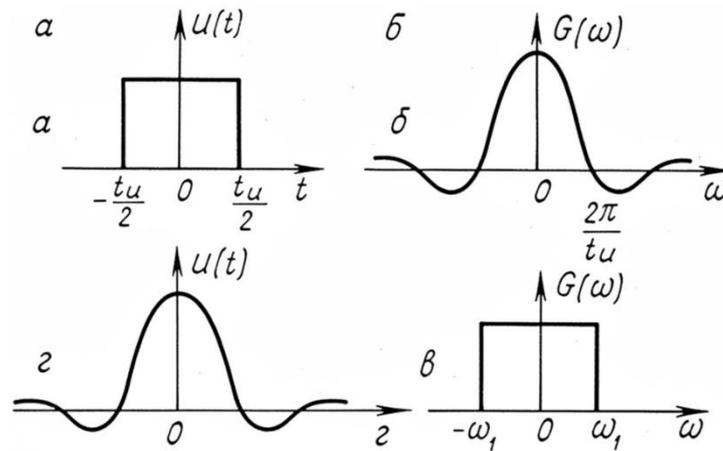


Рис. 2.11. Функции времени и их спектральные характеристики

Спектральная плотность будет чисто мнимой и нечетной относительно  $\omega$ . В том случае, когда  $u(t)$  не является ни четной, ни нечетной относительно  $t$ , разложив  $u(t)$  на четную  $u_1(t)$  и нечетную  $u_2(t)$  функции, получим (на основании линейности преобразования Фурье) спектральную плотность в виде комплексной функции от  $\omega$ .

Выяснив основные свойства преобразований Фурье, рассмотрим спектры наиболее распространенных в радиотехнике импульсов, а также спектры ряда вспомогательных функций, применяемых при анализе процессов в линейных цепях.

## 2.4. СПЕКТРЫ НЕКОТОРЫХ ИМПУЛЬСОВ

### 2.4.1. Видеоимпульс экспоненциальной формы

Видеоимпульс экспоненциальной формы описывается уравнением показательной функции:

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= Ue^{-\alpha t} \quad (t \geq 0); \\ u(t) &= 0 \quad (t < 0). \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

Импульс экспоненциальной формы приближенно описывает форму импульсов помех, возникающих в атмосфере при грозовых разрядах, песчаных бурях и так далее.

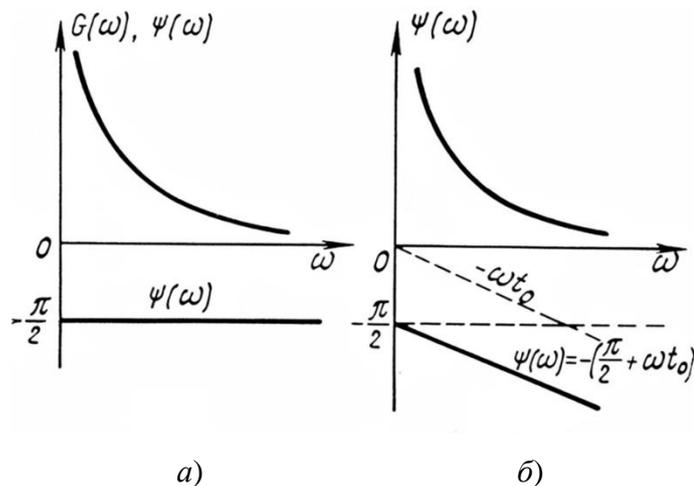


Рис. 2.12. Экспоненциальный импульс напряжения

Чем больше  $\alpha$ , тем круче кривая, и наоборот. Теоретически такой импульс продолжается до бесконечности, однако его можно ограничить, задавшись минимальным уровнем сигнала  $u_1(t)$  (рис. 2.12), и получить значение  $t_n$ , определяемое уровнем  $u_1(t)$  (амплитудный критерий) или определить длительность  $t_n$  исходя из энергетического критерия. В этом случае под длительностью импульса  $t_n$  понимается промежуток времени  $\Delta t$ , в котором содержится подавляющая часть энергии импульса. Если полная энергия импульса экспоненциальной формы пропорциональна  $\int_0^{\infty} u^2(t)dt$ , то часть полной энергии импульса, приходящаяся на промежуток времени  $\Delta t = t_n$ , равна

$$\int_0^{t_{\text{и}}} u^2(t) dt = \xi \int_0^{\infty} u^2(t) dt, \quad (2.47)$$

где  $\xi$  – относительная часть полной энергии импульса, приходящаяся на время  $t_{\text{и}}$ . Обычно  $0 < \xi < 1$ .

Из соотношения (2.47) и определяется длительность импульса  $t_{\text{и}}$ .

Пользуясь формулой (2.23), вычислим спектральную плотность экспоненциального импульса:

$$\dot{G}(\omega) = \int_0^{\infty} U e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{U}{\alpha + j\omega}. \quad (2.48)$$

Модуль спектральной функции (2.48)

$$G(\omega) = \frac{U}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} = \frac{U}{\alpha \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2}} \quad (2.49)$$

На рисунке 2.13, а характер кривой указывает на то, что наибольшая плотность спектра видеоимпульса, экспоненциальной формы находится в области нижних частот. С увеличением частоты спектральная плотность уменьшается. Следовательно, если атмосферная помеха представляет собой импульс экспоненциальной формы, то ее влияние наиболее сказывается на низких частотах диапазона волн, используемого в радиотехнике (на ДВ и СВ диапазонах).

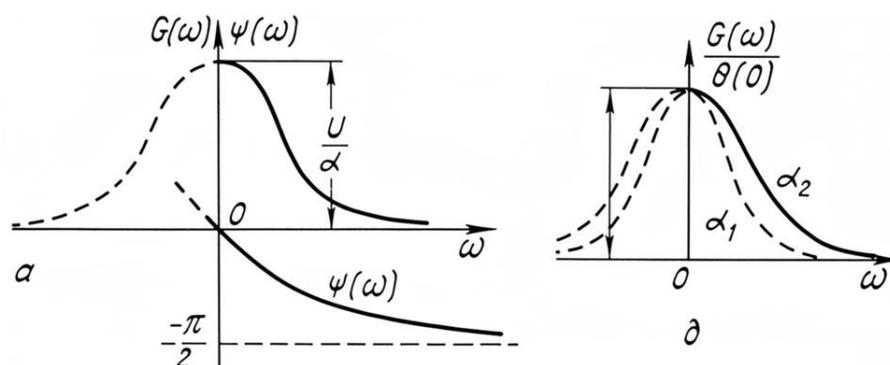


Рис. 2.13. Модель спектральной функции

Для удобства сравнения кривых  $G(\omega)$  при разных  $\alpha$  целесообразно нормировать спектр. Так как  $G_{\max}(\omega) = G(0) = \frac{U}{\alpha}$ , то нормированное выражение для спектра примет вид:

$$\frac{G(\omega)}{G(0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2}}. \quad (2.50)$$

На рисунке 2.13, б показаны нормированные кривые для двух значений  $\alpha$  ( $\alpha_2 > \alpha_1$ ). Как и следовало ожидать, на основании теоремы масштабов увеличение  $\alpha$  приводит к расширению спектральной функции. Теоретически спектральная функция продолжается до бесконечности. Однако неравномерность в распределении энергии позволяет ограничить спектр. Если выбрана длительность импульса, то, исходя из теоремы Релея, под шириной спектра импульса понимается полоса частот, в которой содержится такая же часть энергии, которая была принята для определения длительности импульса.

Из формулы (2.48) следует, что аргумент спектральной функции равен

$$\psi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha}. \quad (2.51)$$

График фазочастотной характеристики  $\psi(\omega)$  показан на рис. 2.13, а.

*Пример 2.4.* Определить ширину спектра  $\Delta\omega_{\text{сп}}$  и длительность экспоненциального импульса  $t_{\text{и}}$ .

При определении  $\Delta\omega_{\text{сп}}$  будем исходить из энергетического критерия и считать, что учитываемая часть спектра должна содержать 90% полной энергии импульса. Тогда, на основании теоремы Релея

$$\xi \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta\omega_{\text{сп}}} G^2(\omega) d\omega,$$

где  $\xi = 0,9$  – коэффициент, указывающий, какая доля энергии приходится на диапазон частот, равный  $\Delta\omega_{\text{сп}}$ .

Подставляя в равенство выражения  $u(t)$  и модуля спектральной функции  $G(\omega)$ , получим

$$\xi \int_0^{\infty} U^2 e^{-2\alpha t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta\omega_{\text{сп}}} \frac{U^2}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega.$$

Произведя интегрирование в левой и правой частях, получим уравнение, связывающее  $\Delta\omega_{\text{сп}}$ ,  $\alpha$  и  $\xi$ ,

$$\text{arctg} \frac{\Delta\omega_{\text{сп}}}{\alpha} = \xi \frac{\pi}{2}.$$

При заданном  $\xi = 0,9$  искомое значение ширины спектра  $\Delta\omega_{\text{сп}} = 6,31\alpha$ .

Определим теперь длительность импульса, которая также соответствовала бы 90% полной энергии:

$$\int_0^{t_{\text{и}}} U^2 e^{-2\alpha t} dt = \xi \int_0^{\infty} U^2 e^{-2\alpha t} dt.$$

Произведя интегрирование и сократив подобные члены, найдем

$$e^{-2\alpha t_{\text{и}}} \Big|_0^{t_{\text{и}}} = \xi e^{-2\alpha t} \Big|_0^{\infty},$$

или  $e^{-2\alpha t_{\text{и}}} - 1 = -\xi$ , откуда

$$t_{\text{и}} = \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{1}{1-\xi},$$

что при  $\xi = 0,9$  дает  $t_{\text{и}} = \frac{1,155}{\alpha}$ .

Произведение длительности импульса  $t_{\text{и}}$  на ширину спектра  $\Delta f_{\text{сп}}$  равно 1,16.

#### 2.4.2. Единичная функция

Единичной функцией (или функцией включения, единичным перепадом) называют функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

$$1(t-t_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq t_0; \\ 0 & \text{при } t < t_0. \end{cases} \quad (2.52)$$

В частном случае при  $t_0 = 0$

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Например, если в цепь подается напряжение  $u(t)$  в момент  $t = t_0$ , то это можно аналитически представить в виде произведения  $u(t) \cdot 1(t-t_0)$ , так как

$$u(t) \cdot 1(t-t_0) = \begin{cases} u(t) & \text{при } t \geq t_0; \\ 0 & \text{при } t < t_0. \end{cases}$$

Рассмотренный ранее видеоимпульс экспоненциальной формы можно также записать в виде  $u(t) = Ue^{-\alpha t} \cdot 1(t)$ .

Рассчитать спектр единичной функции с помощью формулы (2.23) нельзя, так как единичная функция не является абсолютно интегрируемой.

Для определения спектральной плотности единичную функцию можно рассматривать как предельное выражение экспоненциальной функции  $e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . Осуществляя такой же переход в формуле для спектральной плотности экспоненциального импульса, получим выражение для спектральной функции

$$\dot{G}(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad (2.53)$$

где  $\frac{1}{\omega}$  модуль спектральной функции, а аргумент  $\psi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$ .

На основании теоремы запаздывания плотность функции  $1(t-t_0)$  равна

$$\dot{G}_3(\omega) = \frac{1}{\omega} e^{-j\left(\omega t_0 + \frac{\pi}{2}\right)}. \quad (2.54)$$

На рисунке 2.14 показаны соответственно спектральные характеристики функции  $1(t)$  и запаздывающей по отношению к ней функции  $1(t-t_0)$ .

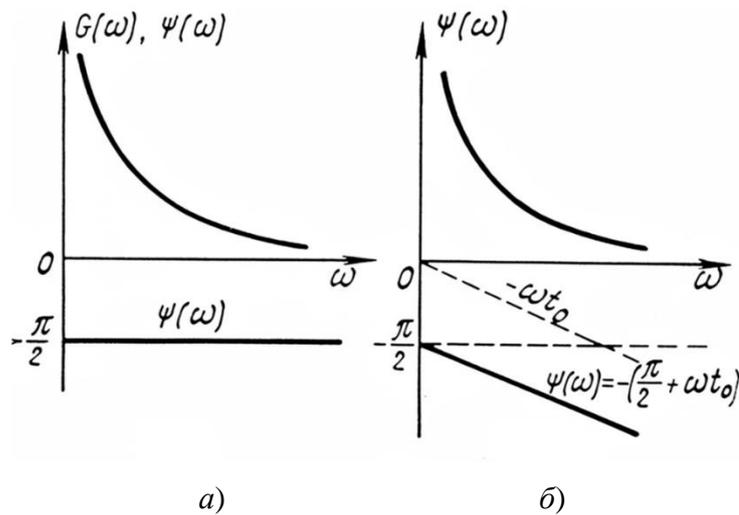


Рис. 2.14. Спектральные характеристики функций

Спектральная плотность единичной функции, определяемая путем предельного перехода из формулы (2.48), не может непосредственно применяться в обратном преобразовании, так как она обращается в бесконечность при  $\omega = 0$ . Представление  $u(t)$ , подобное интегралу Фурье, может быть получено другим путем. Как известно из курса математики, интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } t > 0; \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } t < 0; \\ 0 & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

С помощью этого интеграла единичную функцию запишем в виде

$$1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (2.55)$$

Как следует из формулы (2.55), единичная функция состоит из постоянной составляющей и бесконечного числа гармоник с амплитудой  $\frac{d\omega}{\pi\omega}$ .

Выражение (2.55) получило название интеграла Дирихле.

### 2.4.3. Прямоугольный импульс

(Видео Меандр 01)

Видеоимпульс прямоугольной формы, симметрично расположенный относительно оси ординат, аналитически записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= U \left( -\frac{t_{\text{и}}}{2} < t < \frac{t_{\text{и}}}{2} \right); \\ u(t) &= 0 \left( t > \frac{t_{\text{и}}}{2}, t < -\frac{t_{\text{и}}}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

В соответствии с выражением (2.23) определим спектральную плотность прямоугольного импульса:

$$\dot{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} U e^{-j\omega t} dt = U \int_{-\frac{t_{\text{и}}}{2}}^{+\frac{t_{\text{и}}}{2}} e^{-j\omega t} dt = \frac{2U}{\omega} \sin \frac{\omega t_{\text{и}}}{2}.$$

Домножив числитель и знаменатель найденного выражения на  $t_{\text{и}}$ , окончательно получим

$$\dot{G}(\omega) = Ut_{\text{и}} \frac{\sin \frac{\omega t_{\text{и}}}{2}}{\frac{\omega t_{\text{и}}}{2}} = S_{\text{и}} \frac{\sin \frac{\omega t_{\text{и}}}{2}}{\frac{\omega t_{\text{и}}}{2}}, \quad (2.57)$$

где  $S_{\text{и}} = Ut_{\text{и}}$  – площадь импульса.

В соответствии с формулой (2.57) на рис. 2.15 изображен модуль спектральной функции прямоугольного видеоимпульса. График модуля имеет такой же вид, как и огибающая спектра периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов в примере 2.2.

Спектральную плотность прямоугольного видеоимпульса [см. формулу (2.57)] можно также представить в виде

$$\dot{G}(\omega) = S_{\text{и}} \left| \frac{\sin \frac{\omega t_{\text{и}}}{2}}{\frac{\omega t_{\text{и}}}{2}} \right| e^{-j(n-1)\pi}. \quad (2.58)$$

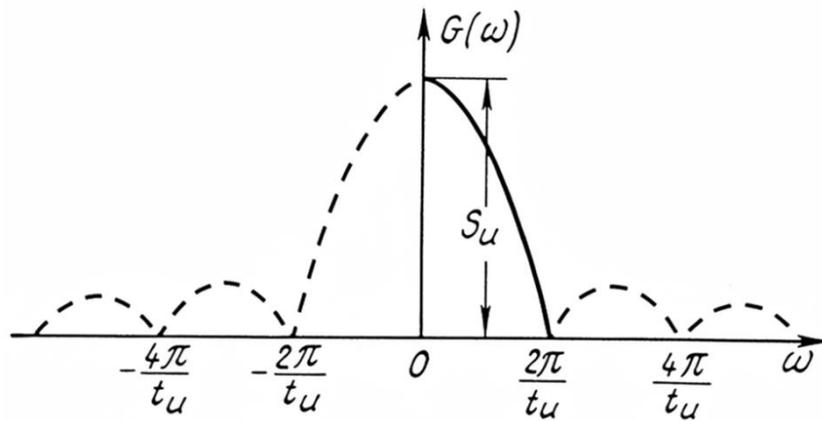


Рис. 2.15. Модуль спектральной функции

Исходя из формулы (2.58), аргумент спектральной функции прямоугольного видеоимпульса  $\psi(\omega)$  определяем из выражения

$$\psi(\omega) = -(n-1)\pi, \quad (2.59)$$

где  $n$  – порядковый номер интервала  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{t_u}$  по шкале частот, отсчитываемый от начала координат.

График фазочастотного спектра показан на рис. 2.16. Он имеет такой же вид, как и огибающая фазочастотного спектра в примере 2 (при  $t_1 = -\frac{t_u}{2}$ ).

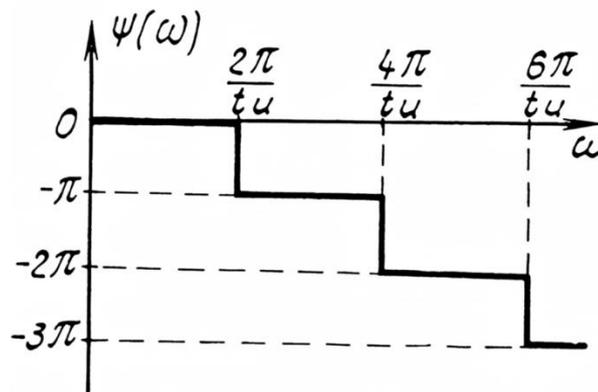


Рис. 2.16. График фазочастотного спектра

Задача по определению ширины спектра  $\Delta\omega_{\text{сп}}$  и длительности импульса  $t_u$  решается методом, изложенным в примере 2.4. Очевидно, что если выбрать коэффициент  $\xi = 0,9$ , то длительность импульса будет равна  $0,9t_u$ .

Ширина спектра определяется с помощью соотношения

$$\xi W_3 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta\omega_{\text{сп}}} G^2(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta\omega_{\text{сп}}} S_{\text{и}}^2 \frac{\sin^2 \frac{\omega t_{\text{и}}}{2}}{\left(\frac{\omega t_{\text{и}}}{2}\right)^2} d\omega, \quad (2.60)$$

где  $W_3$  – полная энергия импульса, равная  $U^2 t_{\text{и}}$ .

Как показывают расчеты, связанные с вычислением интеграла, взятого из формулы (2.60), ширина спектра оказывается равной  $\Delta\omega_{\text{сп}} = \frac{2\pi}{t_{\text{и}}}$ .

Таким образом, произведение длительности импульса на ширину спектра  $\Delta f_{\text{сп}}$  для прямоугольного видеоимпульса имеет значение  $\frac{1}{t_{\text{и}}} 0,9 t_{\text{и}} = 0,9$ .

#### 2.4.4. Единичный импульс (дельта-функция, функция Дирака)

Дельта-функция удовлетворяет следующим условиям:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq t_0; \\ \infty & \text{при } t = t_0 \end{cases} \quad (2.61)$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \quad (2.62)$$

В том случае, когда  $t_0 = 0$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0; \\ \infty & \text{при } t = 0 \end{cases} \quad (2.63)$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.64)$$

Представление об единичном импульсе можно составить путем предельного перехода от прямоугольного видеоимпульса к единичному

импульсу, для чего вначале рассмотрим вспомогательную функцию  $f(t)$  (рис. 2.17, а):

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ \frac{t}{\Delta t} & \text{при } 0 < t < \Delta t; \\ 1 & \text{при } t > \Delta t. \end{cases}$$

Производная этой функции

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ \frac{1}{\Delta t} & \text{при } 0 < t < \Delta t; \\ 0 & \text{при } t > \Delta t. \end{cases}$$

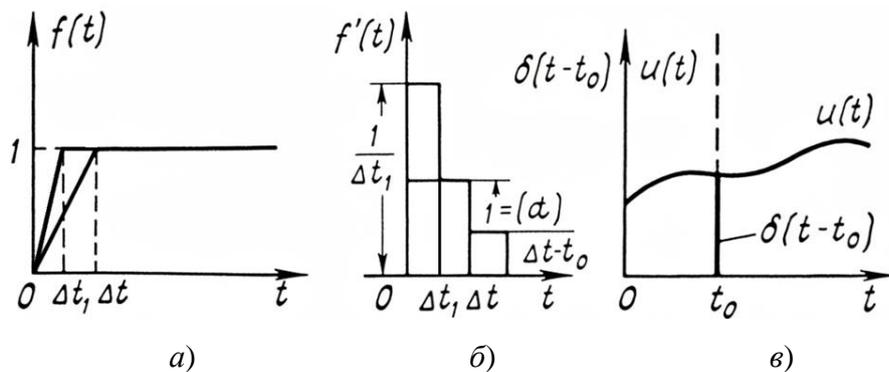


Рис. 2.17. Вспомогательная функция

Как видно из рис. 2.17, б производная  $f'(t)$  представляет собой прямоугольный импульс длительностью  $\Delta t$  и высотой  $\frac{1}{\Delta t}$ . Площадь такого импульса всегда равна единице независимо от величины  $\Delta t$ . Переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(t) = 1(t); \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f'(t) = \delta(t)$$

и, как следствие этих соотношений,

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}. \quad (2.65)$$

Из определения функции  $\delta(t)$  видно, что единичный импульс не может быть физически реализован, но, как будет показано в дальнейшем, является

удобной вспомогательной функцией при различных расчетах, в частности переходных процессов в линейных цепях.

Дельта-функция обладает важным свойством, которое определяется интегралом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) u(t) dt = u(t_0). \quad (2.66)$$

Это свойство справедливо для любой точки, в которой  $u(t)$  непрерывна и ограничена. На рисунке 2.17, в показаны функции  $u(t)$  и  $\delta(t - t_0)$ . Заменяя бесконечные пределы на  $t_0 - a$  и  $t_0 + a$  (где  $a$  – произвольное положительное число, которое можно выбрать настолько малым, чтобы в интервале  $[t_0 - a, t_0 + a]$  функция  $u(t)$  практически не менялась) и вынося за знак интеграла  $u(t_0)$ , получим

$$u(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = u(t_0).$$

Аналогичное соотношение получим и для  $\delta(t)$  функции:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) u(t) dt = u(0). \quad (2.67)$$

На основании формул (2.66) и (2.67) можно утверждать, что, если ступенчатый перепад определял момент включения в цепь источника ЭДС или тока, соотношения (2.66) и (2.67) имеют смысл фильтрующего множителя, избирающего из всех значений функции  $u(t)$  одно –  $u(t_0)$  (или  $u(0)$ ).

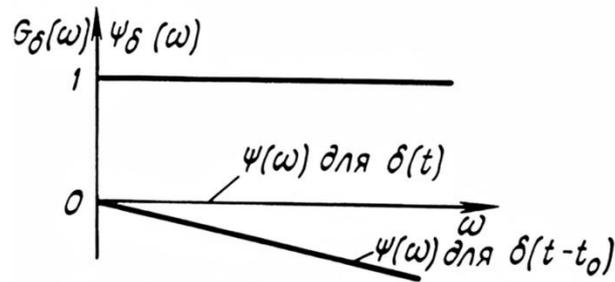
Спектральную функцию единичного импульса  $\dot{G}_\delta(\omega)$  найдем из спектральной плотности прямоугольного импульса путем предельного перехода при  $t_{\text{и}} \rightarrow 0$ :

$$\dot{G}_\delta(\omega) = \lim_{t_{\text{и}} \rightarrow 0} \dot{G}_{\text{пр}}(\omega) = S_{\text{и}} \frac{\sin \frac{\omega t_{\text{и}}}{2}}{\frac{\omega t_{\text{и}}}{2}} = S_{\text{и}} = 1. \quad (2.68)$$

Спектральная плотность единичного импульса  $\delta(t-t_0)$  определяется с помощью теоремы запаздывания

$$G_{\delta}(\omega) = 1e^{-j\omega t_0}, \quad (2.69)$$

где модуль  $G_{\delta}(\omega) = 1$ , аргумент  $\psi_{\delta}(\omega) = -\omega t_0$ .



**Рис. 2.18.** Амплитудно-частотный и линейный фазочастотный спектры единичного импульса

Таким образом, единичный импульс имеет равномерный амплитудно-частотный и линейный фазочастотный спектры (рис. 2.18). Такой характер спектральных характеристик позволяет представить функцию  $\delta(t)$  как сумму гармонических колебаний всевозможных частот с бесконечно малыми амплитудами, распределенными по частоте с одинаковой плотностью, причем их мгновенные фазы при  $t = 0$  одинаковы и равны нулю, что приводит к бесконечно большому значению единичного импульса при  $t = 0$ , если произвести суммирование всех гармонических составляющих.

В теоретических исследованиях часто используют интегральное представление дельта-функции.

Согласно обратному преобразованию Фурье и формуле (2.69)

$$\delta(t-t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega$$

или

$$\delta(t-t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos[\omega(t-t_0)] d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin[\omega(t-t_0)] d\omega.$$

Так как второй интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю, получим

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos[\omega(t - t_0)] d\omega, \quad (2.70)$$

а при  $t_0 = 0$

$$\delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t d\omega.$$

#### 2.4.5. Колокольный (гауссовый) импульс

Видеоимпульс колокольной формы аналитически записывается в виде

$$u(t) = U e^{-\alpha t^2} \quad (-\infty < t < +\infty). \quad (2.71)$$

Так как импульс колокольной формы (рис. 2.19) имеет вид кривой с нормальным законом распределения вероятностей (гауссовский закон), то он получил также название «гауссовый».

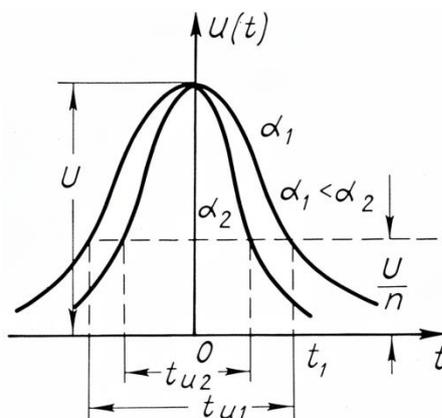


Рис. 2.19. Импульс колокольной формы

Одна из причин, вследствие которых здесь рассматривается спектральная плотность импульса колокольной формы, заключается в том, что радиоимпульс прямоугольной формы, прошедший через большое число (4 ÷ 6) слабосвязанных усилителей промежуточной частоты супергетеродинного приемника имеет на выходе огибающую, близкую по форме к колокольной.

Зная спектр видеоимпульса, можно с помощью теоремы смещения определить спектр радиоимпульса колокольной формы.

Чем больше  $\alpha$ , тем уже импульс, и наоборот. Длительность импульса теоретически бесконечна. За длительность импульса  $t_{и}$  можно принять время, в течение которого максимальное значение уменьшится в  $n$  раз.

$$\text{При } t_1 = \frac{t_{и1}}{2}$$

$$u(t) = Ue^{-(\alpha_1 t_1)^2} = \frac{U}{n},$$

$$\text{откуда } n = e^{(\alpha_1 t_1)^2} \text{ или } \ln n = (\alpha_1 t_1)^2 = \left(\frac{\alpha_1 t_{и1}}{2}\right)^2.$$

Следовательно,

$$t_{и1} = \frac{2\sqrt{\ln n}}{\alpha_1}. \quad (2.72)$$

$$\text{При } n = \sqrt{2} \quad t_{и} \approx \frac{1,2}{\alpha}; \quad \text{при } n = 2 \quad t_{и} \approx \frac{1,7}{\alpha}.$$

Расчет длительности импульса с помощью энергетического критерия дает

$$t_{и} = \frac{0,825}{\sqrt{\alpha}}.$$

Спектральная плотность колокольного импульса

$$\dot{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} Ue^{-\alpha t^2} e^{-j\omega t} dt \quad (2.73)$$

вычисляется с помощью табличного интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2 x^2} \cos[p(x + \lambda)] dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q} e^{-\frac{p^2}{4q^2}} \cos px.$$

Запишем выражение (2.73) в виде

$$\dot{G}(\omega) = U \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} \cos \omega t - jU \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} \sin \omega t dt.$$

Второй интеграл равен нулю, поэтому

$$\dot{G}(\omega) = U \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} \cos \omega t dt. \quad (2.74)$$

Сравнивая формулу (2.74) с табличным интегралом, замечаем, что  $q = \sqrt{\alpha}$ ,  $p = \omega$  и  $\lambda = 0$ . Следовательно, искомая спектральная функция равна

$$\dot{G}(\omega) = U \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}. \quad (2.75)$$

На рисунке 2.20 показан нормированный спектр колокольного видеоимпульса  $\frac{G(\omega)}{G_{\max}(\omega)} = e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$ , построенный для двух значений  $\alpha$  ( $\alpha_2 > \alpha_1$ ).

Сравнение формул (2.71) и (2.75) показывает, что модуль спектральной функции видеоимпульса имеет также колокольную форму.

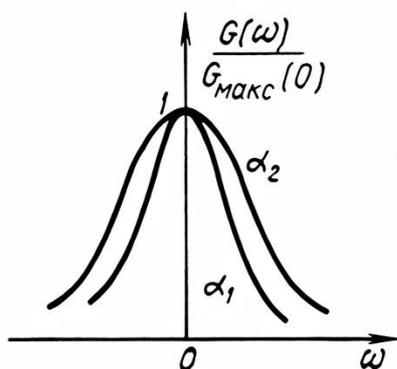


Рис 2.20. Нормированный спектр колокольного видеоимпульса

Расчет ширины спектра  $\Delta\omega_{\text{СП}}$  на основе энергетического критерия дает  $\Delta f_{\text{СП}} = 0,266\sqrt{\alpha}$ , следовательно, произведение ширины спектра на длительность импульса равно

$$\Delta f_{\text{СП}} t_{\text{и}} = 0,266\sqrt{\alpha} \frac{0,825}{\sqrt{\alpha}} = 0,22. \quad (2.76)$$

#### 2.4.6. Спектр пачки импульсов

(Видео «Пачка импульсов 01»)

Пачка (серия) импульсов представляет собой конечную последовательность импульсов какой-либо определенной формы. Например, при работе радиолокационной станции излучается последовательность импульсов, однако вследствие вращения антенны цель облучается пачкой импульсов и от нее отражается также только пачка импульсов. Рассмотрим пачку видеоимпульсов произвольной формы, состоящую из  $n$  импульсов, следующих в пачке с периодом  $T$ .

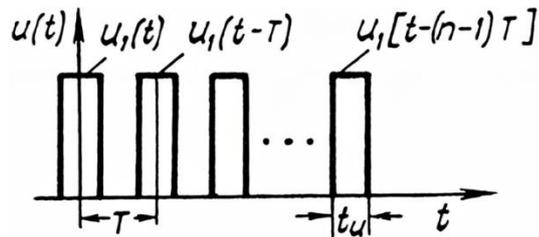


Рис. 2.21. Пачка импульсов

Согласно рис. 2.21

$$u(t) = u_1(t) + u_1(t - T) + \dots + u_1[t - (n - 1)T]$$

и спектр пачки  $G_{\Pi}(\omega)$  в соответствии с теоремой о линейности преобразования Фурье будет равен сумме спектров импульсов пачки, у которой каждый последующий импульс является запаздывающим по отношению к предыдущему на время  $T$ . Если спектральная плотность первого импульса  $\dot{G}(\omega)$ , то второго, согласно теореме запаздывания,  $\dot{G}(\omega)e^{-j\omega T}$ , третьего –  $\dot{G}(\omega)e^{-j\omega 2T}$  и т.д.

Таким образом,

$$\dot{G}_{\Pi}(\omega) = \dot{G}(\omega) [1 + e^{-j\omega T} + e^{-j2\omega T} + \dots + e^{-j\omega(n-1)T}] = \dot{G}(\omega) \dot{N}(\omega). \quad (2.77)$$

В квадратных скобках – сумма членов геометрической прогрессии, знаменатель которой  $q = e^{-j\omega T}$ . Применив формулу для суммы членов геометрической прогрессии

$$S = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q},$$

в которой  $a_1$  – первый член прогрессии, равный в данном случае единице, получим

$$\dot{G}_n(\omega) = \dot{G}(\omega) \frac{1 - e^{-j\omega n T}}{1 - e^{-j\omega T}} = \dot{G}(\omega) \dot{N}(\omega).$$

Преобразуем выражение  $\dot{N}(\omega)$ :

$$\dot{N}(\omega) = \frac{e^{-j\omega n \frac{T}{2}} \left( e^{j\omega n \frac{T}{2}} - e^{-j\omega n \frac{T}{2}} \right)}{e^{-j\omega \frac{T}{2}} \left( e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}} \right)} = e^{-j\omega(n-1)\frac{T}{2}} \frac{\sin \frac{\omega n T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}}. \quad (2.78)$$

Таким образом, формула (2.77) примет вид

$$\dot{G}_n(\omega) = \dot{G}(\omega) \dot{N}(\omega) = \dot{G}(\omega) e^{-j\omega(n-1)\frac{T}{2}} \frac{\sin \frac{\omega n T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}}. \quad (2.79)$$

Рассмотрим, как зависит от частоты выражение модуля  $N(\omega)$ , равное

$$N(\omega) = \left| \frac{\sin \frac{\omega n T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right|.$$

Знаменатель этого выражения обращается в ноль при условии  $\frac{\omega_k T}{2} = k\pi$ ,

т.е. при частотах  $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

На этих же частотах обращается в ноль и числитель, так как количество импульсов в пачке  $n$  – целое число, в результате чего получаем неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ , раскрывая которую по правилу Лопиталья получим

$$\frac{\left[ \sin \frac{\omega n T}{2} \right]'}{\left[ \sin \frac{\omega T}{2} \right]'} = \frac{\frac{nT}{2} \cos \frac{\omega n T}{2}}{\frac{T}{2} \cos \frac{\omega T}{2}} \Big|_{\omega=\omega_k} = n.$$

На остальных частотах, при которых числитель обращается в ноль,  $N(\omega) = 0$ .

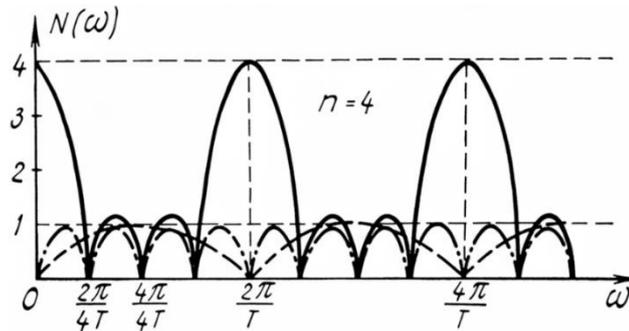


Рис. 2.22. График  $N(\omega)$  для пачки прямоугольных импульсов

График  $N(\omega)$  для пачки прямоугольных импульсов при  $n = 4$  изображен на рис. 2.22. Пунктирной кривой на рисунке показан модуль знаменателя, пунктирно-точечной – модуль числителя и сплошной кривой – модуль  $N(\omega)$ , полученный как отношение числителя к знаменателю  $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$  максимальное значение  $N(\omega) = n$  и спектральная плотность пачки  $G_n(\omega)$  оказывается в  $n$  раз больше спектра  $\dot{G}(\omega)$  одного импульса пачки:

$$\dot{G}_n(\omega) = \dot{G}(\omega)n. \quad (2.80)$$

С физической точки зрения, соотношение (2.80) объясняется тем, что спектральные составляющие различных импульсов на частотах  $\omega_k$  имеют сдвиг по фазе, кратный  $2\pi$ . Для того чтобы получить график модуля пачки импульсов, необходимо умножить значение модуля  $G(\omega)$  на значение функции  $N(\omega)$ . На рисунке 2.23 построен такой график для случая  $n = 4$  и отношения  $\frac{T}{t_{\text{и}}} = 2$  при произвольном значении величины напряжения  $U$ .

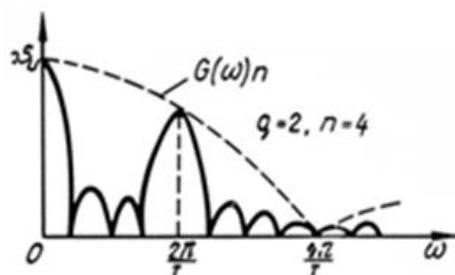


Рис. 2.23. Лепестковая диаграмма

График  $G_{\Pi}(\omega)$  представляет собой «лепестковую» диаграмму (термин «лепестки» взят из теории антенно-фидерных устройств), состоящую из главных (больших) «лепестков», которые имеют максимумы на частотах  $\frac{2\pi k}{T}$  и побочных (малых), расположенных между главными. Ширина главных «лепестков»  $\frac{4\pi}{nT}$ , побочных  $-\frac{2\pi}{nT}$ . Поскольку  $u(t)$  – непериодическая функция, спектр  $G_{\Pi}(\omega)$  является сплошным. Ширина спектра пачки  $\Delta\omega_{\text{сп}}$  определяется длительностью импульса  $t_{\text{и}}$  и равна  $\frac{2\pi}{t_{\text{и}}}$ . Если число импульсов в пачке увеличивается, но  $t_{\text{и}}$  и  $T$  остаются неизменными (это может произойти на практике в том случае, если антенна радиолокационной станции стала вращаться с меньшей скоростью), то будет происходить увеличение максимумов главного и побочных лепестков (за счет увеличения энергии пачки). Ширина лепестков также уменьшится, так как при неизменном интервале частот  $\frac{2\pi}{T}$  их должно быть  $n$ . При бесконечном увеличении числа импульсов  $n$  пачка импульсов превращается в периодическую последовательность видеоимпульсов, и «лепестки» вырождаются в линии, спектр становится дискретным.

В данном параграфе были рассмотрены спектральные функции наиболее часто применяемых на практике и в теоретических исследованиях видеоимпульсов, а также уточнены понятия длительности импульса и ширины спектра, в результате чего были даны определения ширины спектра  $\Delta\omega_{\text{сп}}$  и

ограниченной длительности импульса  $t_{и}$ . Введение этих понятий было связано с тем, что ограничение спектра (если он бесконечен) требует на основании теоремы Релея ограничения длительности импульса.

Впервые методика определения длительности импульса и ширины спектра на основе энергетического критерия была проделана А. А. Харкевичем в начале 1950-х годов и им же были определены значения  $\Delta\omega_{сп}$  и  $t_{и}$  для большого количества видеоимпульсов.

Необходимость в этом определялась следующим. В импульсных устройствах создаются очень короткие, но в то же время мощные импульсы, у которых большая энергия заключается в малом интервале времени. Короткие по длительности импульсы нужны в радиолокации для получения высокой точности определения координат цели и возможности на экране локатора различать две близкорасположенных цели. В то же время более коротким импульсам соответствует (на основании теоремы масштабов) более широкий спектр, что создает большие трудности при конструировании радиотехнических устройств. Таким образом, требования, связанные с получением короткого по длительности импульса и узкого спектра, противоречивы. Однако можно найти такую форму импульса, при которой произведение длительности импульса на ширину спектра  $\Delta f_{сп} t_{и}$  имеет наименьшее значение. Тогда у двух разных по форме, но одинаковых по длительности импульсов ширина спектра  $\Delta f_{сп}$  будет меньше у того импульса, у которого произведение наименьшее. Для сравнения импульсов то произведению  $\Delta f_{сп} t_{и}$  был введен общий критерий оценки ширины спектра и длительности импульса. В качестве такого критерия был взят интервал длительности импульса  $t_{и}$  и интервал частот  $\Delta f_{сп}$ , в пределах которых сосредоточено 90% всей энергии импульса ( $\xi = 0,9$ ). В таблице 2.1 приведены результаты расчетов  $t_{и}$  и  $\Delta f_{сп}$  и их произведения для некоторых импульсов.

## 2.1. Результаты расчетов

Вид импульса	Длительность импульса	Ширина спектра	Произведение
Экспоненциальный	$\frac{1,155}{\alpha}$	$0,98\alpha$	1,13
Прямоугольный	$0,9t_{и}$	$\frac{1}{t_{и}}$	0,9
Колокольный	$\frac{0,825}{\sqrt{\alpha}}$	$0,266\sqrt{\alpha}$	0,22
Треугольный	$0,541t_{и}$	$0,84\frac{1}{t_{и}}$	0,46

Как следует из табл. 2.1 при одинаковой длительности импульсов, наименьшей шириной спектра обладает колокольный (гауссов) импульс, чем и объясняется определенный интерес в радиотехнике к импульсу такой формы. Харкевич А. А. доказал, что колокольная форма импульса весьма близка к теоретически достижимой форме кривой, для которой произведение  $\Delta f_{сп} t_{и}$  составляет наименьшее из всех возможных значений.

### 3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАДИОСИГНАЛОВ

#### 3.1. СПЕКТРЫ АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ

(Видео «Радиоимпульс 01»)

В первой части было показано, что для передачи информации радиотехническим способом необходима модуляция колебаний высокой частоты.

Гармоническое колебание

$$u(t) = U_m \cos(\omega_1 t + \psi_1) = U_m \cos \psi(t) \quad (3.1)$$

характеризуется тремя параметрами: амплитудой  $U_m$ , частотой  $\omega_1$  и начальной фазой  $\psi_1$ . Если один из параметров ( $U_m$ ,  $\omega_1$  или  $\psi_1$ ) изменяется (модулируется) с целью передачи сообщения, то колебание  $u(t)$  становится модулированным.

Изменение амплитуды гармонического колебания по закону управляющего (передаваемого) сигнала называется амплитудной модуляцией (АМ), а колебание  $u(t)$  становится амплитудно-модулированным.

При угловой модуляции под воздействием управляющего сигнала происходит изменение  $\omega_1$ , или  $\psi_1$  (а вместе с ними и  $\psi(t)$  – полной фазы). Считается, что в этом случае амплитуда остается неизменной. Угловая модуляция в свою очередь подразделяется на частотную (ЧМ) и фазовую (ФМ). Эти два вида модуляции, как будет показано в дальнейшем, органически связаны между собой и отдельно принципиально неосуществимы. На практике могут встретиться и комбинированные виды модуляции: амплитудно-фазовая или амплитудно-частотная.

Рассмотрим наиболее простой вид амплитудной модуляции, когда управляющий сигнал является гармоническим колебанием с частотой  $\Omega_1$ : (тональная модуляция). Рассмотрение этого частного случая позволяет значительно упростить анализ и дать более наглядное толкование отдельным параметрам.

Согласно определению АМ, аналитически АМ колебания могут быть записаны в общем виде:

$$u(t) = U_m(t) \cos(\omega_1 t + \psi_1). \quad (3.2)$$

В отличие от формулы (3.1), здесь амплитуда колебаний высокой частоты является функцией времени  $U_m(t)$ . Частота колебаний  $\omega_1$  и начальная фаза  $\psi_1$  постоянны. В общем случае амплитуду  $U_m(t)$  можно записать так:

$$U_m(t) = U_{m0} + \Delta U_m(t) = U_{m0} + b_A a(t), \quad (3.3)$$

где  $a(t)$  – управляющий сигнал;  $\Delta U_m(t)$  – приращение амплитуды высокочастотного колебания, происходящее в соответствии с изменениями управляющего сигнала;  $b_A$  – коэффициент пропорциональности.

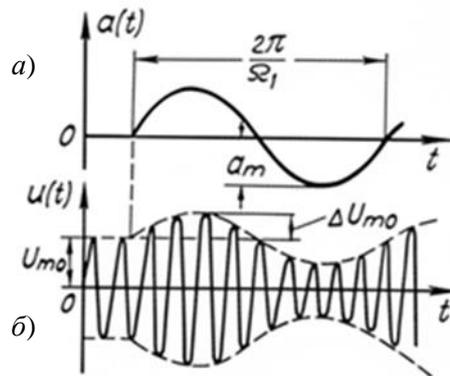


Рис. 3.1. Амплитудно-модулированный сигнал

Тогда общее выражение АМ колебания примет вид

$$u(t) = U_m(t) \cos(\omega_1 t + \psi_1) = [U_{m0} + b_A a(t)] \cos(\omega_1 t + \psi_1). \quad (3.4)$$

В случае модуляции одним тоном выразим управляющий сигнал  $a(t)$  (рис. 3.1, а) через косинусоидальную функцию, что делается для удобства дальнейших преобразований:

$$a(t) = a_m \cos(\Omega_1 t + \Theta_1),$$

где  $a_m$ ,  $\Omega_1$ ,  $\Theta_1$  – амплитуда, частота и начальная фаза управляющего сигнала.

Подставив в формулу (3.3) выражение управляющего сигнала, получим

$$U_m(t) = U_{m0} + b_A a_m \cos(\Omega_1 t + \Theta_1) = U_{m0} + \Delta U_m \cos(\Omega_1 t + \Theta_1). \quad (3.5)$$

Как следует из выражения (3.5),  $\Delta U_m$  – приращение амплитуды напряжения, равное

$$\Delta U_m = b_A a_m. \quad (3.6)$$

Заменяя в формуле (3.2) выражение  $U_m(t)$  из уравнения (3.3), получим выражение для АМ колебания (рис. 3.1, б):

$$\begin{aligned} u(t) &= [U_{m0} + b_A a_m \cos(\Omega_1 t + \Theta_1)] \cos(\omega_1 t + \psi_1) = \\ &= U_{m0} [1 + M \cos(\Omega_1 t + \Theta_1)] \cos(\omega_1 t + \psi_1), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $M = \frac{a_m b_A}{U_{m0}} = \frac{\Delta U_m}{U_{m0}}$ .

Коэффициент  $M$  получил название коэффициента модуляции. Коэффициент модуляции  $M$  характеризует интенсивность воздействия управляющего сигнала. Чем больше амплитуда управляющего сигнала, тем больше коэффициент  $M$ , так как приращение  $\Delta U_{m0}$  пропорционально амплитуде управляющего сигнала. Численные значения коэффициента  $M$  должны меняться в пределах от нуля до 1. При  $M > 1$ , т.е. при  $\Delta U_{m0} > U_{m0}$ , выражение  $U_m(t)$ , кроме положительных значений, приобретает и отрицательные, в результате чего возникают искажения (перемодуляция), обусловленные несоответствием огибающей модулированного колебания форме управляющего сигнала.

Для того чтобы получить спектр АМ колебания при модуляции одним тоном, заменим произведение косинусов в формуле (3.7) их суммой:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_{m0} [1 + M \cos(\Omega_1 t + \Theta_1)] \cos(\omega_1 t + \psi_1) = U_{m0} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + \\ &+ \frac{U_{m0} M}{2} \cos[(\omega_1 + \Omega_1)t + (\psi_1 + \Theta_1)] + \frac{U_{m0} M}{2} \cos[(\omega_1 - \Omega_1)t + (\psi_1 - \Theta_1)]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Первое слагаемое в формуле (3.7) представляет собой немодулированное исходное гармоническое колебание. Оно получило название колебания с «несущей» частотой. Второе и третье слагаемые – также колебания высокой частоты ( $\omega_1 \gg \Omega_1$ ) с частотами  $\omega_1 \pm \Omega_1$ . Эти частоты получили название верхней ( $\omega_1 + \Omega_1$ ) и нижней ( $\omega_1 - \Omega_1$ ) боковых частот. Поскольку известны амплитуды и фазы составляющих АМ колебания, то можно построить амплитудно-частотную и фазочастотную спектральные диаграммы (рис. 3.2, б, в).

Амплитудный спектр согласно формуле (3.8) является линейчатый и состоит из трех составляющих с амплитудами  $U_{m0}$  и  $\frac{MU_{m0}}{2}$ .

Ширина спектра АМ колебания, как это видно из рис. 3.2, б, равна разности между верхней и нижней боковыми частотами:

$$\Delta\omega_{\text{сп}} = (\omega_1 + \Omega_1) - (\omega_1 - \Omega_1) = 2\Omega_1. \quad (3.8)$$

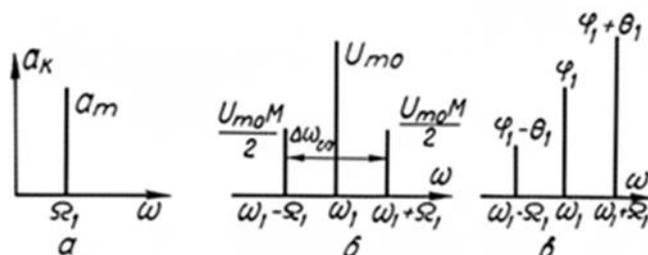


Рис. 3.2. Спектр АМ колебания

Фазы составляющих спектра симметричны относительно фазы несущего колебания:  $\psi_1 + \Theta_1$  и  $\psi_1 - \Theta_1$ .

На рисунке 3.2, а показан спектр амплитуд управляющего сигнала  $a(t)$ , состоящего из одной гармоники с частотой  $\Omega_1$ . Сравнение спектров управляющего и модулированного колебаний указывает на то, что в процессе модуляции происходит преобразование спектра, в результате чего появляются новые гармонические составляющие.

АМ колебания можно изобразить также с помощью векторных диаграмм. Такое изображение благодаря своей наглядности помогает глубже проникнуть в суть рассматриваемых явлений. Первое слагаемое в формуле (3.8) – колебание с несущей частотой  $\omega_1$  изображается (для момента  $t = 0$ ) в виде вектора длиной  $U_{m0}$ , составляющего с горизонтальной осью проекций  $OB$  угол  $\psi_1$  (рис. 3.3, *a*). Этот вектор вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega_1$ . Второе и третье слагаемые (колебания с боковыми частотами) изображаются в виде векторов длиной  $\frac{MU_m}{2}$ , составляющих с осью проекций  $OB$  углы  $\psi_1 + \Theta_1$  и  $\psi_1 - \Theta_1$ . Угловые скорости вращения каждого из этих векторов равны  $\omega_1 + \Theta_1$  и  $\omega_1 - \Theta_1$  соответственно. АМ колебание  $u(t)$  и есть сумма проекций этих трех векторов на ось проекций  $OB$ .

Можно получить и другую векторную диаграмму, если сделать неподвижным вектор  $U_{m0}$ , для чего необходимо ось проекций  $OB$  заставить вращаться по часовой стрелке с угловой скоростью  $\omega_1$ . Перенесем эти векторы параллельно самим себе в точку  $A$ , обозначая их  $\overline{AC}$  и  $\overline{AD}$ . Сумма боковых векторов есть вектор  $\overline{AE}$ , лежащий на одной прямой с вектором колебания несущей  $\overline{OA}$ . Сумма векторов  $\overline{AE}$  ( $\overline{AE'}$ ) и  $\overline{OA}$  дает результирующий вектор  $\overline{OE}$  ( $\overline{OE'}$ ), величина которого со временем меняется, однако направление остается неизменным, так как начальная фаза  $\psi_1$  постоянна.

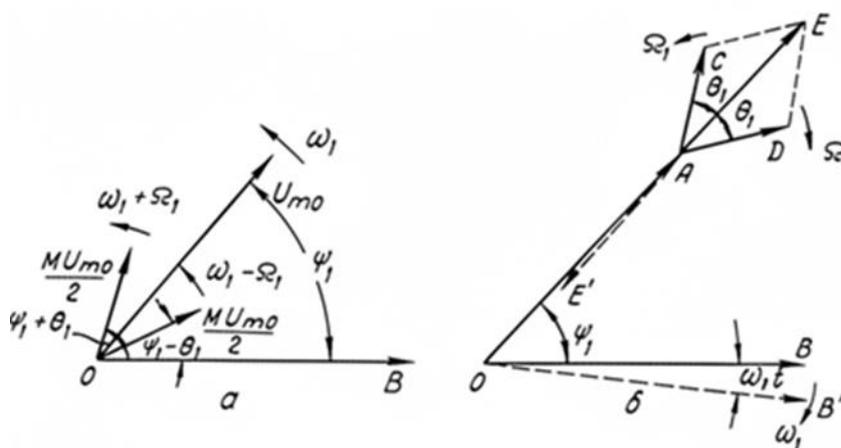


Рис. 3.3. Векторная диаграмма АМ колебания

Из векторной диаграммы нетрудно найти максимальное и минимальное значения амплитуды модулированного колебания. Когда боковые векторы совпадают по направлению между собой и вектором несущей  $\overline{OA}$ , получим максимальную амплитуду модулированного колебания

$$U_{m\max} = U_{m0} + 2 \frac{U_{m0}M}{2} = U_m(1 + M).$$

В случае, когда боковые векторы совпадают между собой по направлению, но их направление противоположно вектору несущей  $\overline{OA}$ , получим минимальное значение амплитуды модулированного колебания

$$U_{m\min} = U_{m0} - 2 \frac{U_{m0}M}{2} = U_m(1 - M). \quad (3.9)$$

Если управляющий сигнал содержит не одну, а  $n$  гармонических составляющих, т.е. представляет собой колебание сложной формы, то

$$a(t) = \sum_{k=1}^n a_{mk} \cos(\Omega_{kt} + \Theta_k). \quad (3.10)$$

Спектр амплитуд сложного управляющего сигнала показан на рис. 3.4, а.

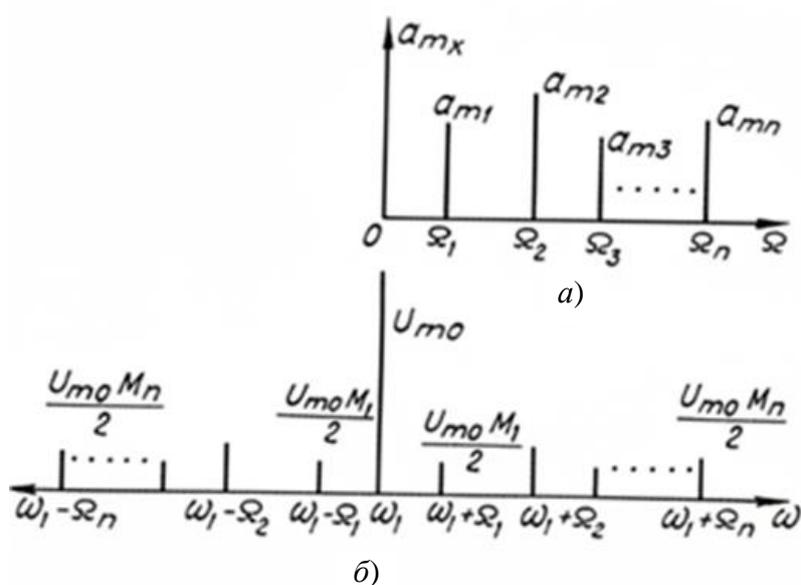


Рис. 3.4. Спектр амплитуд сложного управляющего сигнала

В этом случае каждая гармоническая составляющая, воздействуя на амплитуду  $U_{m0}$ , производит ее изменение на величину  $\Delta U_{mk}$ . Приращение амплитуды напряжения  $\Delta U_{mk}$  за счет воздействия  $k$ -й гармоники согласно формуле (3.6) равно  $\Delta U_{mk} = b_A a_{mk}$ . Поэтому выражение для сложного АМ колебания по аналогии с выражением (3.10) примет вид

$$\begin{aligned} u(t) &= \left[ U_{m0} + \sum_{k=1}^n \Delta U_{mk} \cos(\Omega_k t + \Theta_k) \right] \cos(\omega_1 t + \psi_1) = \\ &= U_{m0} \left[ 1 + \sum_{k=1}^n M_k \cos(\Omega_k t + \Theta_k) \right] \cos(\omega_1 t + \psi_1). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Заменяя произведение косинусов их суммой, получим

$$\begin{aligned} u(t) &= U_{m0} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + \sum_{k=1}^n \frac{U_{m0} M_k}{2} \cos[(\omega_1 + \Omega_k)t + (\psi_1 + \Theta_k)] + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{U_{m0} M_k}{2} \cos[(\omega_1 - \Omega_k)t + (\psi_1 - \Theta_k)], \end{aligned} \quad (3.12)$$

где  $M_k = \frac{\Delta U_{mk}}{U_{m0}}$  – коэффициент модуляции  $k$ -й составляющей модулированного сигнала, получивший название частичного (парциального) коэффициента модуляции.

Чтобы не было перемодуляции, сумма частичных коэффициентов не должна быть больше единицы, т.е.  $\sum_{k=1}^n M_k \leq 1$ . Согласно формуле (3.12) на рис. 3.4, б показан спектр амплитуд. Каждому гармоническому колебанию с частотой  $\Omega_k$ , входящему в состав модулирующего сигнала, соответствуют колебания двух боковых частот –  $\omega_1 + \Omega_k$  и  $\omega_1 - \Omega_k$ .

Ширина спектра, занимаемая сложным АМ колебанием, равна  $\Delta\omega_{\text{сп}} = 2\Omega_n$ , где  $\Omega_n$  – наивысшая частота модулирующего сигнала.

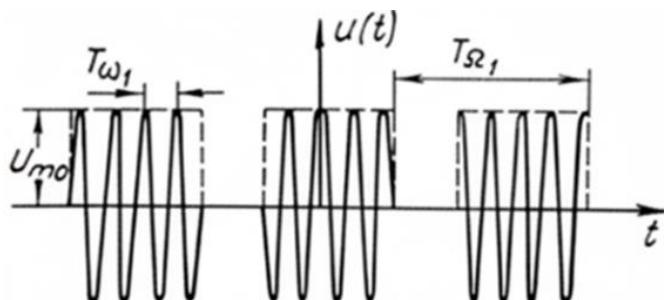
Следовательно, если известен спектр управляющего сигнала, то спектр АМ колебания можно построить, расположив симметрично (относительно составляющей с несущей частотой  $\omega_1$ ) составляющие управляющего сигнала с их зеркальным отображением (рис. 3.4, б). Амплитуды составляющих определяются на основании выражения (3.12).

В частном случае, когда сложный управляющий сигнал может быть выражен рядом Фурье, частоты  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  кратны между собой, и интервал между составляющими на спектральной диаграмме одинаков и равен  $\Omega_1$ .

Если управляющий сигнал состоит из колебаний с некрatными частотами (например,  $\Omega_1$  и  $\sqrt{3}\Omega_1$ ), то, как известно из математики, получим непериодическую функцию, которая получила название почти периодической.

АМ колебание, у которого (даже при периодическом управляющем сигнале) частота  $\omega_1$  и основная частота управляющего сигнала  $\Omega_1$  находятся в некрatных отношениях, также не является периодической функцией. Таким образом, функция вида (3.11), записанная в виде тригонометрического ряда (3.12), в общем случае принадлежит к классу почти периодических функций.

На основании примера, рассматриваемого ниже, ознакомимся со спектром одной из таких функций – последовательностью радиоимпульсов прямоугольной формы, получаемых в результате амплитудной модуляции.



**Рис. 3.5. Последовательность радиоимпульсов прямоугольной формы**

*Пример 3.1.* Определить спектр последовательности радиоимпульсов прямоугольной формы, полученных при модуляции колебаний высокой

частоты периодической последовательностью прямоугольных видеоимпульсов с длительностью импульса  $t_{и}$  и частотой повторения  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_{\Omega_1}}$ .

Период колебаний высокой частоты  $T_{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_1}$  (рис. 3.5).

Огибающая радиоимпульсов имеет прямоугольную форму, поэтому аналитическое выражение последовательности радиоимпульсов можно записать следующим образом:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} U_{m0}(t - kT_{\Omega_1}) \cos \omega_1 t, \quad (3.13)$$

где  $U_{m0}(t - kT_{\Omega_1})$  – аналитическое выражение одного из импульсов огибающей.

Огибающую, которая является периодической функцией, запишем в виде ряда Фурье, в результате получим

$$u(t) = \left[ \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Omega_1 t + \Theta_k) \right] \cos \omega_1 t. \quad (3.14)$$

После несложных преобразований запишем формулу (3.14) в виде

$$u(t) = \frac{A_0}{2} \cos \omega_1 t + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos[(\omega_1 + k\Omega_1)t + \Theta_k] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} \cos[(\omega_1 - k\Omega_1)t - \Theta_k]. \quad (3.15)$$

С помощью выражения (3.15) можно построить спектральную диаграмму.

Постоянная составляющая  $\frac{A_0}{2}$  и гармоники  $A_k$  уже были найдены в примере

2.2. Эти составляющие могут быть также определены по известной спектральной плотности видеоимпульса прямоугольной формы на основании соотношений (2.27) и (2.28):

$$\frac{A_0}{2} = \frac{\Omega_1}{2\pi} G(0); \quad A_k = \frac{\Omega_1}{\pi} G(k\Omega_1).$$

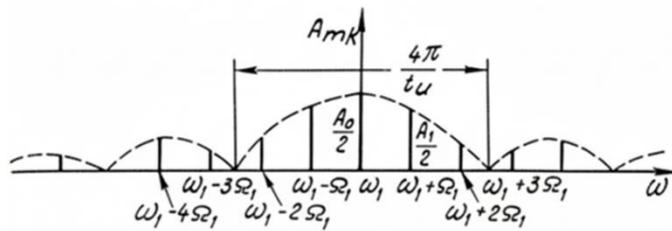


Рис. 3.6. Спектральная диаграмма

Спектральная диаграмма (рис. 3.6) построена на основании выведенного, ранее правила: вначале на диаграмме рисуется спектр управляющего сигнала (рассчитанный одним из указанных способов), а затем и спектр последовательности радиоимпульсов. Для того чтобы не ошибиться при построениях, необходимо помнить, что постоянная составляющая периодической последовательности переносится на диаграмму последовательности радиоимпульсов без изменения, все остальные составляющие уменьшаются вдвое, что следует из формул (3.14) и (3.15).

Рассмотренная последовательность радиоимпульсов, как указывалось, не является периодической функцией. Начальные фазы у радиоимпульсов не одинаковы, поэтому такую непериодическую последовательность импульсов можно считать колебанием с амплитудно-угловой модуляцией.

Начальные фазы у радиоимпульсов будут одинаковы при выполнении соотношения  $\omega_1 = m\Omega_1$ , где  $m$  – целое число, следовательно, будет иметь место условие кратности между несущей и основной частотами управляющего сигнала. В этом случае получим периодическую последовательность радиоимпульсов (рис. 3.7).

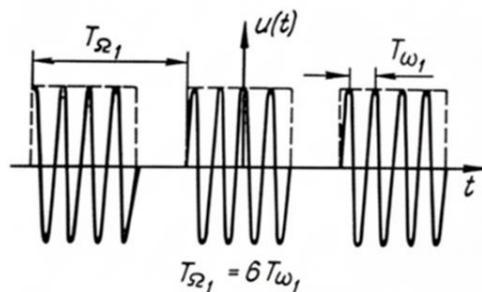


Рис. 3.7. Периодическая последовательность радиоимпульсов

Рассмотрим случай, когда управляющий сигнал представляет собой непериодическую произвольную функцию  $a(t)$  (рис. 3.8, а).

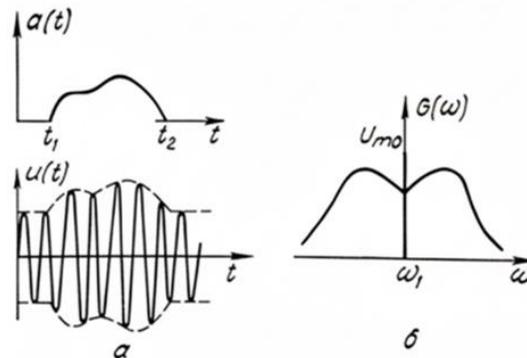


Рис. 3.8. Управляющий сигнал произвольной формы

На основании выражения (3.4) функция

$$u(t) = U_m(t) \cos(\omega_1 t + \psi_1) = U_{m0} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + b_A a(t) \cos(\omega_1 t + \psi_1)$$

состоит из двух слагаемых, первое из которых – гармоническое колебание с амплитудой  $U_{m0}$ , второе является радиоимпульсом, огибающая которого имеет форму модулирующего сигнала  $a(t)$ . Спектр гармонического колебания линейчатый и состоит из одной составляющей  $U_{m0}$ , расположенной на частоте  $\omega_1$ , а спектр второго слагаемого – сплошной и может быть найден на основании теоремы смещения (2.39) с учетом того, что  $\omega_1$  находится в области высоких частот (рис. 3.8, б).

Если радиосигнал не содержит несущего колебания с амплитудой  $U_{m0}$ , то  $u(t)$  представляет собой одиночный радиоимпульс, и дискретная часть в спектре будет отсутствовать. Радиоимпульс будет описываться выражением

$$u(t) = b_A a(t) \cos(\omega_1 t + \psi_1), \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (3.16)$$

Форма огибающей может быть любой, например, прямоугольной, как показано на рис. 3.9, а.

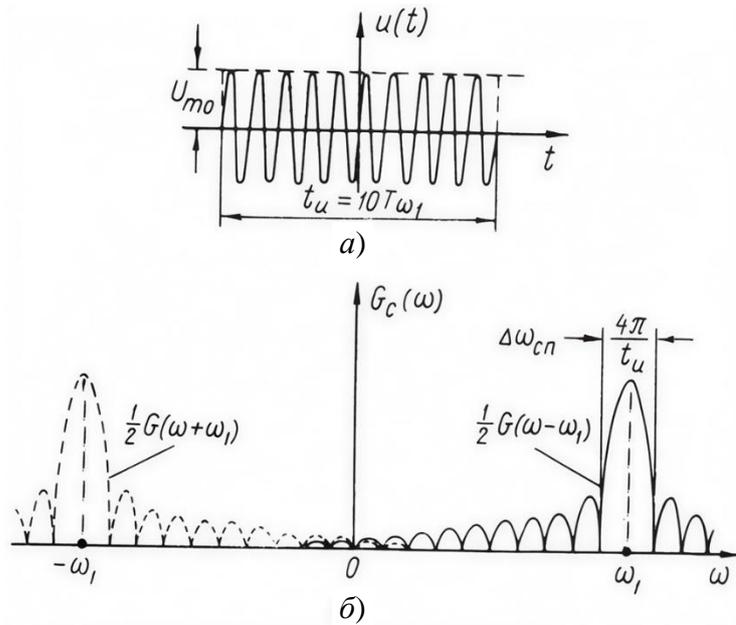


Рис. 3.9. Одиночный радиоимпульс

Обычно для радиоимпульсов выполняется условие  $t_{и} \geq 10T_{\omega_1}$ . При выполнении этого условия определение спектра упрощается, так как значения частоты  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_{\omega_1}}$  получаются значительно больше ширины спектра огибающей радиоимпульса, т.е.

$$\omega_1 \gg \Delta\omega_{сп}. \quad (3.17)$$

Действительно, если взять  $t_{и} = 10T_{\omega_1}$ , то для импульса с прямоугольной огибающей при ширине спектра  $\Delta\omega_{сп} = \frac{4\pi}{t_{и}}$  получим  $\omega_1 = 5\Delta\omega_{сп}$ .

При выполнении условия (3.17) модули слагаемых, входящие в выражение (2.38) для спектра  $\dot{G}_c(\omega)$ , практически не перекрываются и в области положительных частот

$$\dot{G}_c(\omega) \approx \frac{1}{2} e^{j\psi_1} \dot{G}(\omega - \omega_1),$$

где  $\dot{G}(\omega)$  – спектральная плотность огибающей радиоимпульса.

Когда для колебания  $u(t)$  соотношение (3.17) не выполняется, пренебрегать вторым слагаемым в формуле (2.38) при определении  $\dot{G}_c(\omega)$ , в области положительных частот нельзя и использование формулы (2.39) может привести к ошибкам.

*Пример 3.2.* Определить спектр прямоугольного радиоимпульса, у которого  $t_{и} = 10T_{\omega_1}$ , (рис. 3.9, б). Так как огибающая радиоимпульса имеет прямоугольную форму, то спектральная плотность  $\dot{G}_c(\omega)$  определяется формулой

$$\dot{G}_c(\omega) = \frac{1}{2} e^{j\psi_1} \dot{G}(\omega - \omega_1) + \frac{1}{2} e^{-j\psi_1} \dot{G}(\omega + \omega_1),$$

где  $\dot{G}(\omega)$  – спектральная плотность прямоугольного видеоимпульса, определяемая формулой (3.17). Следовательно,

$$\dot{G}_c(\omega) = \frac{1}{2} e^{j\psi_1} S_{и} \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_1)t_{и}}{2}}{\frac{(\omega - \omega_1)t_{и}}{2}} + \frac{1}{2} e^{-j\psi_1} S_{и} \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_1)t_{и}}{2}}{\frac{(\omega + \omega_1)t_{и}}{2}}.$$

На рисунке 3,9, б изображены модули слагаемых формулы  $\dot{G}_c(\omega)$ . Как видно из рисунка, при выполнении условия  $\omega_1 \gg \Delta\omega_{сп}$  вторым слагаемым модуля  $G_c(\omega)$  можно пренебречь, поэтому с высокой степенью точности

$$G_c(\omega) \approx \frac{1}{2} S_{и} \frac{\left| \sin \frac{(\omega - \omega_1)t_{и}}{2} \right|}{\frac{(\omega - \omega_1)t_{и}}{2}}. \quad (3.18)$$

В заключение рассмотрим энергетические соотношения при амплитудной модуляции.

Допустим, что мощность модулированных колебаний выделяется на сопротивлении нагрузки  $R_{н}$  (таким сопротивлением может быть сопротивление потерь в контуре передатчика, сопротивление антенны  $R_a$  и т.д.).

В отсутствие модуляции на этом сопротивлении выделится мощность  $P_H$ , называемая мощностью в режиме несущей частоты (иногда – мощностью в режиме молчания):

$$P_H = \frac{U_{m0}^2}{2R_H}.$$

При максимальной амплитуде (во время модуляции), равной  $U_{m0}(1+M)$ , мощность в сопротивлении  $R_H$  достигает максимальной величины  $P_{\max}$  (мощность в максимальном режиме), равной

$$P_{\max} = \frac{|U_{m0}(1+M)|^2}{2R_H} = P_H(1+M)^2. \quad (3.19)$$

При  $M = 1$   $P_{\max} = 4P_H$ , т.е. увеличивается в четыре раза. Следовательно, расчет ламп (транзисторов) радиопередающего устройства необходимо вести на значение  $P_{\max}$  (иногда называемой пиковой мощностью).

Средняя мощность  $P_{\text{ср}}$  за период модулирующей частоты  $T_{\Omega_1}$ , которая называется мощностью в телефонном режиме, определяется следующим образом:

$$P_H = \frac{\overline{U_m^2(t)}}{2R_H} = \frac{\overline{U_{m0}^2(1+M \cos \Omega_1 t)^2}}{2R_H} = P_H \left( 1 + \frac{M^2}{2} \right). \quad (3.20)$$

Черта над формулой (3.20) указывает на то, что определяется среднее значение. При  $M = 1$  максимальная мощность равна  $4P_H$ , а средняя – всего  $1,5P_H$ . Существует ряд более совершенных методов модуляции, которые рассматриваются в курсе радиопередающих устройств. Однако несмотря на ряд недостатков, АМ используется широко в радиовещании, а также в некоторых типах военных радиостанций. Это объясняется тем, что конструкция приемников получается несложной, они легко и просто настраиваются, что имеет немаловажное значение при их производстве, рассчитанном на массового потребителя.

### 3.2. СПЕКТРЫ СИГНАЛОВ С УГЛОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Если у колебания  $u(t)$ , определяемого выражением (3.1)  $u(t) = U_m \cos(\omega_1 t + \psi_1) = U_m \cos \psi(t)$ , полная фаза  $\psi(t)$  изменяется вследствие воздействия управляющего сигнала  $a(t)$  на частоту  $\omega_1$  или начальную фазу  $\psi_1$  с целью передачами сообщения, то в этом случае получим колебание с угловой модуляцией, которую, как указывалось ранее, можно подразделить на частотную и фазовую модуляции.

Органическая связь между ЧМ и ФМ является следствием зависимости, существующей между угловой частотой  $\omega(t)$  и фазой  $\psi(t)$ . Если известен закон изменения частоты колебаний  $\omega(t)$ , то фаза колебания определится как интеграл по времени от частоты  $\omega(t)$ :

$$\psi(t) = \int \omega(t) dt + \psi_1, \quad (3.21)$$

где  $\psi_1$  – начальная фаза при  $t = 0$ , и наоборот, при известной фазе  $\psi(t)$  частота  $\omega(t)$  определится как производная по времени от  $\psi(t)$ :

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}. \quad (3.22)$$

Аналогичные зависимости существуют между линейной скоростью  $v(t)$  и расстоянием, проходимым материальной точкой  $S(t)$ :

$$v(t) = \frac{dS(t)}{dt} \quad \text{и} \quad S(t) = \int v(t) dt + S_0.$$

Таким образом, при изменении частоты  $\omega(t)$  изменяется фаза  $\psi(t)$ . Это положение и определяет связь между ЧМ и ФМ колебаниями.

Рассмотрим каждый из видов модуляции в отдельности.

*Частотная модуляция.* Частотно-модулированным колебанием называется колебание высокой частоты с постоянной амплитудой, у которого частота изменяется по закону управляющего сигнала.

Согласно определению ЧМ колебаний, значение мгновенной частоты определится выражением

$$\omega(t) = \omega_1 + b_{\text{ЧМ}}a(t), \quad (3.23)$$

где  $a(t)$  – закон изменения управляющего сигнала;  $b_{\text{ЧМ}}$  – коэффициент пропорциональности, устанавливающий связь между модулирующим колебанием  $a(t)$  и изменениями частоты.

Так же, как и в случае АМ, должна быть обеспечена линейная зависимость между частотой  $\omega(t)$  и, модулирующим сигналом  $a(t)$ . Полная фаза модулирующего колебания  $\psi(t)$  будет равна

$$\psi(t) = \int [\omega_1 + b_{\text{ЧМ}}a(t)]dt + \psi_1 = \omega_1 t + b_{\text{ЧМ}} \int a(t)dt + \psi_1. \quad (3.24)$$

Из формулы (3.24) следует, что начальная фаза будет определяться выражением

$$\psi_1(t) = b_{\text{ЧМ}} \int a(t)dt + \psi_1, \quad (3.25)$$

в котором первое слагаемое даст изменение начальной фазы за счет воздействия управляющего сигнала  $a(t)$ . Как следует из формулы (3.25), изменение (начальной фазы  $\psi_1(t)$ ) происходит не в соответствии с изменением управляющего сигнала  $a(t)$ .

Общее выражение для ЧМ колебания на основании выражений (3.1) и (3.24) примет вид

$$u(t) = U_m \cos \left[ \omega_1 t + b_{\text{ЧМ}} \int a(t)dt + \psi_1 \right]. \quad (3.26)$$

Рассмотрим конкретный случай ЧМ, когда модулирующий сигнал представляет собой гармоническое колебание, а именно,

$$a(t) = a_m \cos(\Omega_1 t + \Theta_1). \quad (3.27)$$

Согласно формуле (3.23), мгновенное значение частоты  $\omega(t)$  определяется в виде

$$\omega(t) = \omega_1 + b_{\text{ЧМ}} a_m \cos(\Omega_1 t + \Theta_1) = \omega_1 + \Delta\omega_1 \cos(\Omega_1 t + \Theta_1). \quad (3.28)$$

Величина  $\Delta\omega_1 = b_{\text{ЧМ}} a_m$  получила название девиации (максимальное отклонение) частоты.

Как следует из формулы (3.28), девиация частоты  $\Delta\omega_1$  пропорциональна только амплитуде управляющего сигнала и не зависит от его частоты.

Полную фазу у ЧМ колебания получаем из выражения (3.21) путем подстановки в подынтегральное выражение значения управляющего сигнала:

$$\psi(t) = \omega_1 t + \frac{b_{\text{ЧМ}} a_m}{\Omega_1} \sin(\Omega_1 t + \Theta_1) + \psi_1 = \omega_1 t + \psi_1(t).$$

Обозначив через  $m_f$  отношение  $\frac{\Delta\omega_1}{\Omega_1} = \frac{b_{\text{ЧМ}} a_m}{\Omega_1}$ , окончательно получим

$$\psi(t) = \omega_1 t + m_f \sin(\Omega_1 t + \Theta_1) + \psi_1, \quad (3.29)$$

и выражение для ЧМ колебания при модуляции гармоническим колебанием примет вид

$$u(t) = U_m \cos[\omega_1 t + m_f \sin(\Omega_1 t + \Theta_1) + \psi_1]. \quad (3.30)$$

На рисунке 3.10 показаны графики зависимостей  $a(t)$ ,  $\omega(t)$  и полной фазы  $\psi(t)$  (при  $\psi_1 = 0$ ), а также ЧМ колебания  $u(t)$ , построенные в соответствии с выражениями (3.27), (3.28), (3.29) и (3.30).

Коэффициент  $m_f$ , представляющий собой отношение девиации частоты  $\Delta\omega_1$  к частоте управляющего сигнала  $\Omega_1$  по своему физическому смыслу является максимальным изменением начальной фазы от своего среднего значения  $\psi_1$  и получил название индекса модуляции:

$$m_f = \frac{\Delta\omega_1}{\Omega_1} = \frac{\Delta f_1}{F_1}. \quad (3.31)$$

На рисунке 3.11 показана графическая зависимость индекса модуляции  $m_f$  и девиации частоты  $\Delta\omega_1$  от частоты управляющего сигнала  $\Omega_1$  при постоянной амплитуде  $a_m$ . Как следует из формулы (3.31), индекс модуляции  $m_f$  уменьшается с увеличением частоты  $\Omega_1$ , а девиация частоты  $\Delta\omega_1$ , в соответствии с формулой  $\Delta\omega_1 = b_{\text{ЧМ}} a_m$  не зависит от частоты управляющего сигнала.

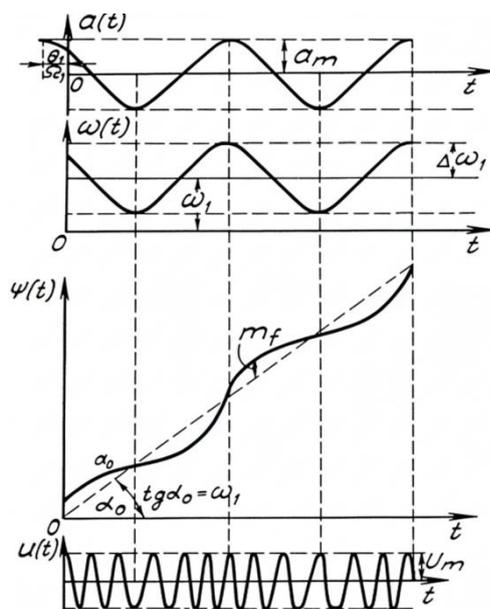


Рис. 3.10. Графики зависимостей  $a(t)$ ,  $\omega(t)$  и полной фазы

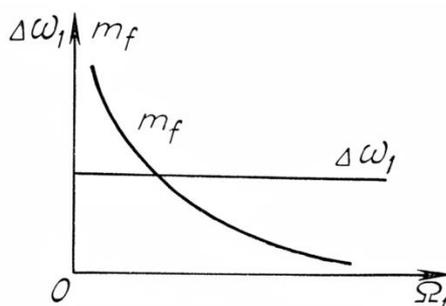


Рис. 3.11. Графическая зависимость индекса модуляции  $m_f$  и девиации частоты  $\Delta\omega_1$

Девиация частоты  $\Delta\omega_1$  должна быть значительно больше частоты  $\Omega_1$ . Например, для радиовещания величина девиации  $\Delta f_1$  принята равной 75 кГц, следовательно, при максимальной частоте модуляции  $F_{\text{max}} = 10$  кГц получим

$$m_f = \frac{75}{10} = 7,5 \text{ рад.}$$

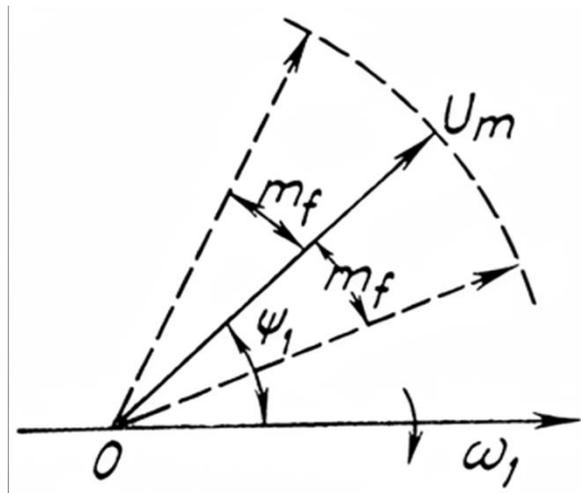


Рис. 3.12. Векторное изображение ЧМ колебаний

*Фазовая модуляция.* Фазомодулированным колебанием называется колебание высокой частоты с постоянной амплитудой, начальная фаза которого изменяется по закону управляющего сигнала. При модулирующем сигнале  $a(t)$  начальная фаза должна изменяться следующим образом:

$$\psi_1(t) = b_{\text{ФМ}} a(t) + \psi_1, \quad (3.32)$$

где  $b_{\text{ФМ}}$  – коэффициент пропорциональности;  $\psi_1$  – начальная фаза немодулированного колебания.

Как и в случае ранее рассмотренных видов модуляции (АМ, ЧМ), должна быть обеспечена линейная зависимость между начальной фазой  $\psi_1(t)$  и модулирующим сигналом  $a(t)$ .

Полная фаза ФМ колебания

$$\psi(t) = \omega_1 t + \psi_1 + b_{\text{ФМ}} a(t). \quad (3.33)$$

Мгновенная частота  $\omega(t)$  у ФМ колебания определяется на основании формулы (3.22)

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_1 + b_{\text{ФМ}} \frac{da(t)}{dt}. \quad (3.34)$$

Таким образом, при ФМ имеет место также изменение частоты, однако это изменение происходит не по закону управляющего сигнала. Подставляя

значение полной фазы (3.33) в выражение гармонического колебания, получим общее выражение для ФМ колебания:

$$u(t) = U_m \cos \psi(t) = U_m \cos[\omega_1 t + b_{\text{ФМ}} a(t) + \psi_1]. \quad (3.35)$$

Когда управляющий сигнал представляет собой гармоническое колебание вида

$$a(t) = a_m \cos(\Omega_1 t + \Theta_1), \quad (3.36)$$

то полная фаза  $\psi(t)$  [см. формулу (3.33)] примет вид

$$\psi(t) = \omega_1 t + b_{\text{ФМ}} a_m \cos(\Omega_1 t + \Theta_1) + \psi_1 = \omega_1 t + \psi_1(t). \quad (3.37)$$

Обозначив максимальное изменение фазы так же, как и при ЧМ, через  $m_f$ :

$$\Delta\psi_1 = m_f = b_{\text{ФМ}} a_m, \quad (3.38)$$

получим выражение ФМ колебания

$$u(t) = U_m \cos[\omega_1 t + m_f \cos(\Omega_1 t + \Theta_1) + \psi_1]. \quad (3.39)$$

Мгновенное значение частоты у ФМ колебания

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_1 - m_f \Omega_1 \sin(\Omega_1 t + \Theta_1)$$

или

$$\omega(t) = \omega_1 - \Delta\omega_1 \sin(\Omega_1 t + \Theta_1), \quad (3.40)$$

где  $\Delta\omega_1 = m_f \Omega_1$  – девиация частоты. Из формулы (3.40) следует, что изменение частоты при ФМ прямо пропорционально амплитуде управляющего сигнала и его частоте  $\Omega_1$ .

В соответствии с полученными выражениями для  $a(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $\psi(t)$  и  $u(t)$  на рис. 3.13 показаны графики этих зависимостей от времени, а с помощью рис. 3.14 можно проследить за изменениями величин индекса модуляции  $m_f$ , девиации частоты  $\Delta\omega_1$  при различных значениях частот управляющего сигнала (при постоянной амплитуде управляющего сигнала  $a_m$ ).

Векторное представление ФМ колебания (рис. 3.15) будет таким же, как и в случае ЧМ. Вектор  $\bar{U}_m$  колеблется относительно своего среднего положения, определяемого углом  $\psi_1$ . Максимальное отклонение вектора будет равно индексу модуляции  $m_f = \Delta\psi_1$ .

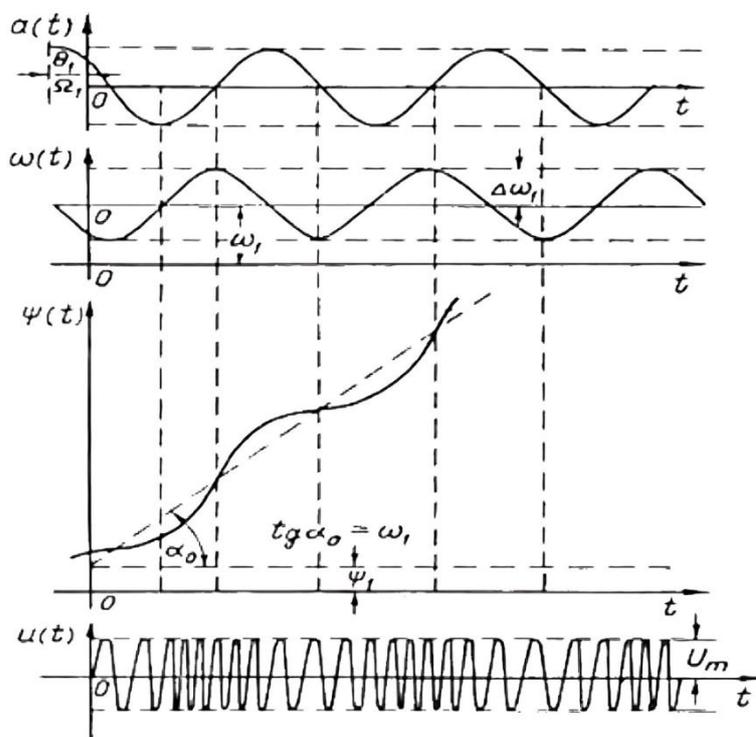


Рис. 3.13. Графики зависимости  $a(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $\psi(t)$  и  $u(t)$  от времени

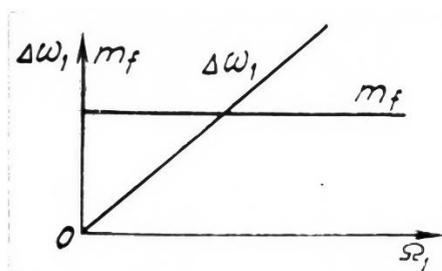


Рис. 3.14. Изменение индекса модуляции

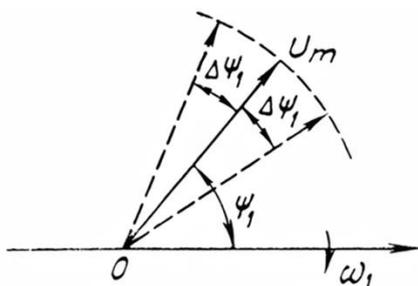


Рис. 3.15. Векторное представление ФМ колебания

*Различие ЧМ и ФМ колебаний.* Органическая связь между частотой и фазой, определяемая выражениями (3.21) и (3.22), приводит к тому, что при гармоническом управляющем сигнале по характеру модулированного колебания и его свойствам нельзя заключить, с каким видом модуляции приходится иметь дело. Действительно, если управляющий сигнал, например, описываемый выражением  $a(t) = a_m \sin(\Omega_1 t + \Theta_1)$ , воздействует на устройство, производящее фазовую модуляцию, то на выходе модуляционного устройства получим колебание

$$u(t) = U_m \cos[\omega_1 t + m_f \sin(\Omega_1 t + \Theta_1) + \psi_1], \quad (3.41)$$

частота которого изменяется по закону

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_1 + m_f \Omega_1 \cos(\Omega_1 t + \Theta_1). \quad (3.42)$$

Сравнение найденных выражений для модулированного колебания (3.41) и его частоты (3.42) с аналогичными выражениями (3.30) и (3.28), полученными ранее при ЧМ, позволяет сделать заключение о том, что данное колебание (3.41) можно также считать ЧМ колебанием, хотя оно получено с помощью устройства, производящего ФМ. Таким образом, в случае гармонического управляющего колебания, колебание на выходе модуляционного устройства можно считать как ЧМ, так и ФМ.

Но наиболее отчетливо проявляется отличие ЧМ колебания от ФМ колебания в случае управляющих колебаний, форма которых резко отличается от синусоидальной. Объясняется это тем, что в случае гармонического управляющего сигнала основные выражения, характеризующие ЧМ и ФМ колебания, как то:  $\omega(t)$ ,  $\psi(t)$  и, наконец, само модулированное колебание  $u(t)$  – получены на основании формул (3.21) и (3.22) путем дифференцирования и интегрирования гармонической функции, в результате чего вновь получаем гармоническую функцию, отличающуюся только масштабным множителем и начальной фазой. При управляющем сигнале сложной (отличной

от гармонической) формы операции дифференцирования и интегрирования уже приводят к выражениям, резко отличающимся от первоначальной формы управляющего сигнала.

Допустим, что управляющий сигнал  $a(t)$  имеет форму треугольного сигнала (рис. 3.16, а). Такая форма, далекая от гармонической, выбрана с целью подчеркнуть различие между ЧМ и ФМ колебаниями.

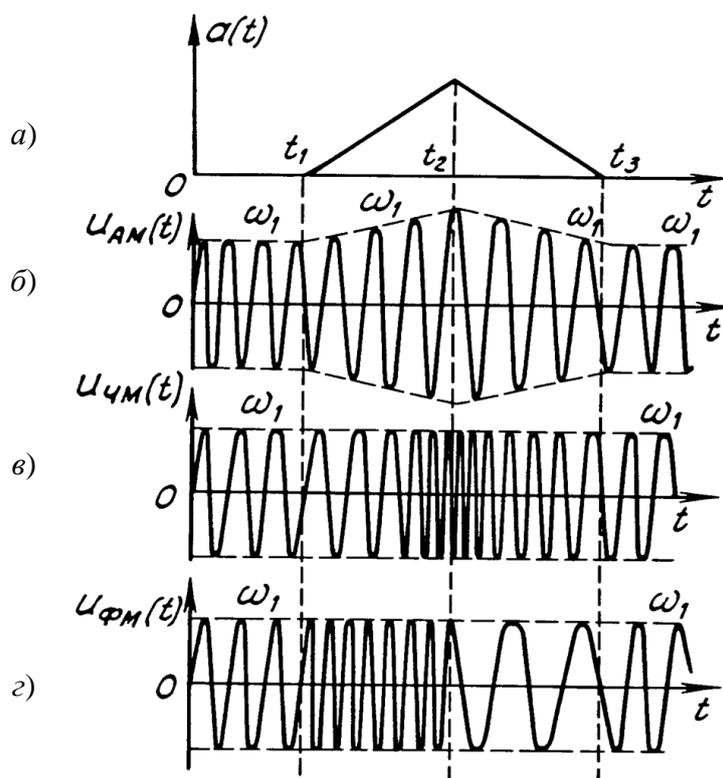


Рис. 3.16. Графики АМ, ЧМ и ФМ колебаний

Для сравнения на рис. 3.16, б показан также график АМ колебания. До момента времени  $t_1$  частота колебаний для всех видов сигналов остается постоянной и равной  $\omega_1$ . С момента  $t_1$  до момента  $t_2$  напряжение управляющего сигнала линейно нарастает, а затем спадает до первоначальной величины. У ЧМ колебания (рис. 3.16, в) нарастание величины управляющего напряжения приводит к увеличению значений мгновенной частоты  $\omega(t)$ , которая к моменту  $t_2$  становится равной  $\omega_1 + \Delta\omega_1 b_{\text{ЧМ}} t_2$ . Для ФМ сигнала при увеличении напряжения модулирующего сигнала линейно нарастают значения начальной фазы по закону  $\psi_1(t) = b_{\text{ФМ}} \Delta\psi_1 t + \psi_1$ , а частота изменяется скачком

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d(\omega_1 t + b_{\text{ФМ}} \Delta\psi_1 t + \psi_1)}{dt} = \omega_1 + b_{\text{ФМ}} \Delta\psi_1.$$

При уменьшении величины напряжения управляющего сигнала фаза линейно уменьшается, что приводит к скачкообразному уменьшению частоты (рис. 3.16, з). Таким образом, при модуляции несинусоидальным сигналом резко проявляется различие между ЧМ и ФМ колебаниями.

*Пример 3.3.* Управляющее напряжение изменяется по закону  $a(t) = 20 \cos 4\pi 10^3 t + 5 \cos 8\pi 10^3 t$  В. Определить законы изменения ЧМ и ФМ колебаний, если частота несущего колебания  $f_1 = 200$  мГц, амплитуда несущей  $U_m = 200$  В, а индекс модуляции для первой составляющей управляющего сигнала  $m_{f1} = 8$ .

В данном примере управляющий сигнал состоит из двух гармонических составляющих, каждая из которых независимо от другой воздействует на частоту или фазу высокочастотного колебания. В случае ЧМ, если индекс модуляции от первой гармоники управляющего сигнала равен  $m_{f1}$ , вторая гармоника, имеющая амплитуду, в четыре раза меньшую, а частоту, в два раза большую, чем первая, должна иметь индекс модуляции  $m_{f2}$ , равный

$$m_{f2} = \frac{\Delta\omega_2}{\Omega_2} = \frac{b_{\text{ЧМ}} a_{m2}}{\Omega_2} = \frac{b_{\text{ЧМ}} a_{m1}}{4 \cdot 2\Omega_1} = \frac{mf_1}{8} = 1.$$

Учитывая соотношение (3.30) и считая  $\Theta_1 = \psi_1 = 0$ , получим

$$u(t) = 200 \cos(4\pi 10^8 t + 8 \sin 4\pi 10^3 t + 1 \sin 8\pi 10^3 t).$$

В случае ФМ индекс модуляции пропорционален только амплитуде управляющего сигнала, следовательно,

$$m_{f2} = b_{\text{ФМ}} a_{m2} = \frac{b_{\text{ФМ}} a_{m1}}{4} = \frac{mf_1}{4} = 2,$$

и на основании формулы (3.35)

$$u(t) = 200 \cos(4\pi 10^8 t + 8 \cos 4\pi 10^3 t + 2 \cos 8\pi 10^3 t).$$

*Пример 3.4.* Модулированное напряжение изменяется во времени по закону

$$u(t) = 200 \cos(2\pi 10^6 t + 4 \sin 2\pi 10^3 t + 1 \sin 4\pi 10^3 t).$$

Определить закон изменения управляющего сигнала, если напряжение  $u(t)$  модулировано: а) по частоте; б) по фазе.

В случае ЧМ колебания найдем вначале мгновенное значение частоты  $\omega(t)$ :

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = 2\pi 10^6 + 4 \cdot 2\pi 10^3 \cos 2\pi 10^3 t + 1 \cdot 4\pi 10^3 \cos 4\pi 10^3 t.$$

Поскольку при ЧМ частота должна изменяться в соответствии с управляющим сигналом, то

$$a(t) = a_{m1} \cos 2\pi 10^3 t + a_{m2} \cos 4\pi 10^3 t.$$

При ЧМ  $m_f = \frac{\Delta\omega}{\Omega} = \frac{b_{\text{ЧМ}} a_m}{\Omega}$ , отсюда  $a_{m1} = \frac{\Omega_1 m_{f1}}{b_{\text{ЧМ}}}$ .

Выразим амплитуду  $a_{m2}$  через амплитуду первой гармоники  $a_{m1}$  управляющего сигнала. Так как  $a_{m2} = \frac{\Omega_2 m_{f2}}{b_{\text{ЧМ}}} = \frac{2\Omega_1 m_{f1}}{4b_{\text{ЧМ}}} = \frac{a_{m1}}{2}$ ,

( $m_{f1} = 4$ ;  $m_{f2} = 1$  по условию), то  $a(t) = a_{m1} \cos 2\pi 10^3 t + \frac{a_{m1}}{2} \cos 4\pi 10^3 t$ .

В случае ФМ колебания изменение начальной фазы происходит в соответствии с управляющим сигналом:

$$m_f = \Delta\psi = b_{\text{ФМ}} a_m \quad \text{и} \quad a_m = \frac{m_f}{b_{\text{ФМ}}},$$

поэтому

$$a(t) = a_{m1} \sin 2\pi 10^3 t + 0,25 a_{m1} \sin 4\pi 10^3 t.$$

*Спектр колебаний с угловой модуляцией.* Рассмотрим спектральный состав ЧМ и ФМ колебаний в случае модуляции простейшим управляющим сигналом – гармоническим колебанием с частотой  $\Omega_1$ . Для анализа спектра

воспользуемся выражением (16.41), которое пригодно для описания как ЧМ, так и ФМ колебаний [см. формулы (3.30) и (3.41)], что дает право не рассматривать отдельно спектры ЧМ и ФМ колебаний:

$$u(t) = U_m \cos[\omega_1 t + m_f \sin(\Omega_1 t + \Theta_1) + \psi_1].$$

Заменим косинус суммы двух углов по известной тригонометрической формуле, в результате чего получим

$$u(t) = U_m \cos(\omega_1 t + \psi_1) \cos[m_f \sin(\Omega_1 t + \Theta_1)] - U_m \sin(\omega_1 t + \psi_1) \sin[m_f \sin(\Omega_1 t + \Theta_1)]. \quad (3.43)$$

Из теории функций Бесселя (иначе цилиндрических функций) известны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \cos[m_f \sin(\Omega_1 t + \Theta_1)] &= I_0(m_f) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(m_f) \cos 2n(\Omega_1 t + \Theta_1), \\ \sin[m_f \sin(\Omega_1 t + \Theta_1)] &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n+1}(m_f) \sin [(2n+1)(\Omega_1 t + \Theta_1)] \end{aligned} \quad (3.44)$$

( $n$  – целое число), где  $I_n(m_f)$  – функция Бесселя 1-го рода,  $n$ -го порядка с аргументом  $m_f$ . Подставим формулу (3.44) в выражение (3.43):

$$\begin{aligned} u(t) &= I_0(m_f) U_m \cos(\omega_1 t + \psi_1) + 2U_m \sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(m_f) \cos 2n(\Omega_1 t + \Theta_1) \cos(\omega_1 t + \psi_1) - \\ &- 2U_m \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n+1}(m_f) \sin [(2n+1)(\Omega_1 t + \Theta_1)] \sin(\omega_1 t + \psi_1). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Заменим под знаками сумм произведения косинусов и синусов известными из тригонометрии формулами:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] - \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)].$$

Тогда формула (3.45) примет вид

$$\begin{aligned}
u(t) = & U_m I_0(m_f) \cos(\omega_1 t + \psi_1) + 2U_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{2n}(m_f)}{2} \times \\
& \times \{ \cos[(\omega_1 + 2n\Omega_1)t + (\psi_1 + 2n\Theta_1)] + \cos[(\omega_1 - 2n\Omega_1)t + (\psi_1 - 2n\Theta_1)] \} + \\
& + 2U_m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_{2n+1}(m_f)}{2} \{ \cos[\omega_1 t + (2n+1)\Omega_1 t + \psi_1 + (2n+1)\Theta_1] - \\
& - \cos[\omega_1 t - (2n+1)\Omega_1 t + \psi_1 - (2n+1)\Theta_1] \}.
\end{aligned}$$

Заметим, что члены, стоящие под знаком сумм, можно сгруппировать в порядке монотонного возрастания  $n$ :

$$\begin{aligned}
u(t) = & U_m I_0(m_f) \cos(\omega_1 t + \psi_1) + \sum_{n=1}^{\infty} U_m I_n(m_f) \{ \cos[(\omega_1 + n\Omega_1)t + (\psi_1 + n\Theta_1)] + \\
& + (-1)^n \cos[(\omega_1 - n\Omega_1)t + (\psi_1 - n\Theta_1)] \}. \quad (3.46)
\end{aligned}$$

В теории функций Бесселя доказываются соотношения  $I_{-2n}(m_f) = I_{2n}(m_f)$  и  $I_{-(2n+1)}(m_f) = -I_{(2n+1)}(m_f)$ , на основании которых получим формулу (3.46) в более компактном виде:

$$u(t) = U_m \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} I_n(m_f) \cos[(\omega_1 + n\Omega_1)t + (\psi_1 + n\Theta_1)]. \quad (3.47)$$

Частотный интервал между двумя соседними составляющими одинаков и равен  $\Omega_1$ .

На рисунке 3.17 на основании формулы (3.46) построен амплитудный спектр ЧМ (ФМ) колебаний при  $m_f = 5$ . В отличие от спектра при амплитудной модуляции одним тоном при однотональной угловой модуляции спектр состоит из бесконечного числа спектральных линий, занимающих бесконечно большой частотный диапазон. В этом и заключается основное отличие между спектрами при угловой и амплитудной модуляциях. Кроме того, в спектре АМ колебания амплитуда несущей всегда больше любой из амплитуд боковых частот, в спектре при угловой модуляции амплитуда несущей, как и боковых частот, может принимать нулевые значения при определенных величинах  $m_f$ .

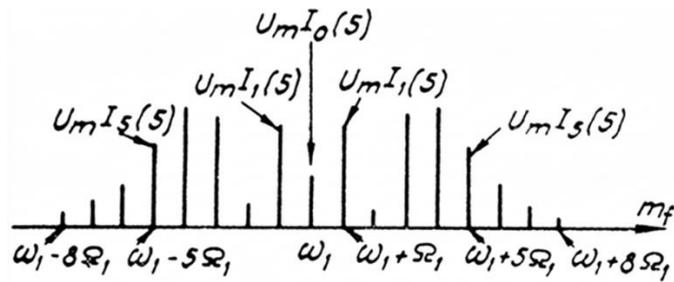


Рис. 3.17. Амплитудный спектр ЧМ (ФМ) колебаний

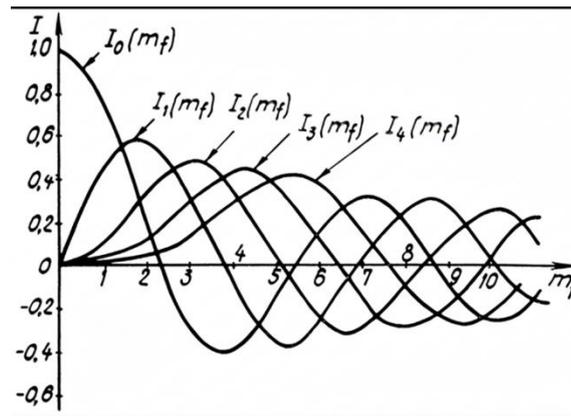


Рис. 3.18. Функции Бесселя

Значения  $m_f$  называют корнями функций Бесселя. Таким образом, амплитуды как несущей, так и боковых составляющих определяются с помощью функций Бесселя, значения которых можно найти с помощью их асимптотических представлений, полученных для определенных соотношений  $n$  и  $m_f$ , или же найти из графиков (таблиц) для этих функций. Пример таких графиков для функций Бесселя  $I_n(m_f)$  при фиксированном  $n$  и переменном  $m_f$  изображен на рис. 3.18. На рисунке 3.19 показаны графики тех же функций при постоянных  $m_f$  и переменном  $n$ .

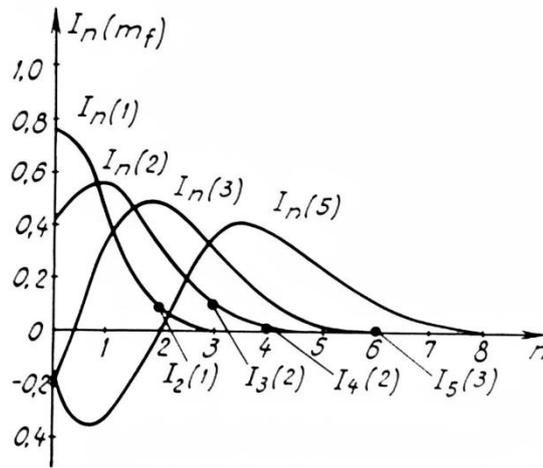


Рис. 3.19. Функции Бесселя для других переменных

Как уже отмечалось, теоретически спектр при угловой модуляции бесконечен, однако из графиков рис. 3.18 видно, что по мере увеличения индекса модуляции  $m_f$  (т.е. аргумента функций) значения функций Бесселя постепенно убывают до нуля, что позволяет ограничить ширину спектра на основании амплитудного критерия. Максимальное значение функции Бесселя равно единице, тогда для ограничения спектра можно пренебречь, например, составляющими ряда (3.46), для которых  $I_n(m_f) < 0,1$ . Из графиков рис. 3.19, на которых показаны функции Бесселя при постоянном аргументе и переменном порядке  $n$  (графики рис. 3.19 построены на основании графиков рис. 3.18), видно, что при любом индексе модуляции  $m_f$  значение функций Бесселя будет меньше 0,1, если  $n > m_f + 1$ . (на рис. 3.19 отмечены точки  $I_2(1) = 0,115$ ;  $I_3(2) = 0,112$ ;  $I_4(2) = 0,034$ ;  $I_6(3) = 0,011$  и т.д.).

Таким образом, граничные частоты спектра примут значения  $\omega_{гр} = \omega_1 \pm n\Omega_1$ , где  $n = m_f + 1$  и ширину спектра ЧМ (ФМ) колебания можно принять равной

$$\Delta\omega_{сп} = (\omega_1 + n\Omega_1) - (\omega_1 - n\Omega_1) = 2n\Omega_1 = 2\Omega_1(m_f + 1). \quad (3.48)$$

В случае, если  $m_f \gg 1$ ,

$$\Delta\omega_{сп} \approx 2m_f\Omega_1; \quad \Delta f_{сп} \approx 2m_f F_1. \quad (3.49)$$

При индексе модуляции  $m_f \ll 1$  из графиков рис. 3.18 получить следующие соотношения:

$$I_0(m_f) \approx 1 \quad \text{и} \quad I_1(m_f) \approx \frac{m_f}{2}.$$

Учитывая, что значения функций Бесселя, начиная с  $n = 2$ , будут близки к нулю и ими можно пренебречь (см. рис. 3.18), ряд (3.46) примет вид

$$u(t) \approx U_m \cos(\omega_1 t + \psi_1) + \frac{1}{2} m_f U_m \cos[(\omega_1 + \Omega_1)t + (\psi_1 + \Theta_1)] - \frac{1}{2} m_f U_m \cos[(\omega_1 - \Omega_1)t + (\psi_1 - \Theta_1)]. \quad (3.50)$$

Из формулы (3.50) следует, что амплитудный спектр при  $m_f \ll 1$  аналогичен спектру, полученному при АМ. Единственное отличие этой формулы от формулы (3.8) заключается в том, что вместо  $M$  – коэффициента модуляции записан  $m_f$  – индекс модуляции, и нижнее боковое колебание в выражении (3.50) сдвинуто по фазе на угол  $\pi$ . На рисунке 3.20 показаны амплитудно-частотный (а) и фазочастотный (б) спектры для случая  $m_f \ll 1$ .

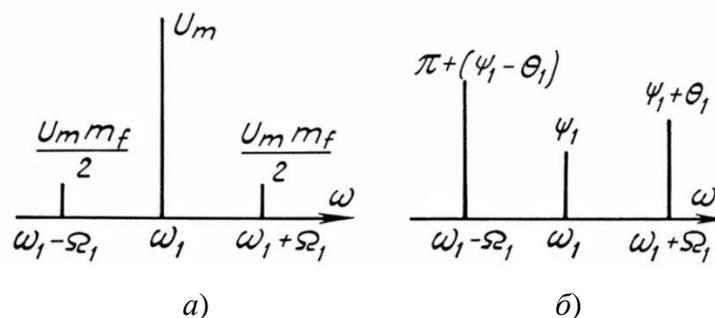


Рис. 3.20. Амплитудно-частотный (а) и фазочастотный (б) спектры для случая  $m_f \ll 1$

При больших индексах модуляции  $m_f$  разница между колебаниями с угловой модуляцией и колебаниями с АМ становится еще более заметной. Как уже указывалось, в радиовещании девиация частоты при ЧМ выбирается равной 75 кГц. Для частоты управляющего сигнала  $F_1$ , равной, например, 1 кГц, индекс модуляции примет значение

$$m_f = \frac{\Delta\omega_1}{\Omega_1} = \frac{\Delta f_1}{F_1} = \frac{75}{1} = 75.$$

В этом случае, согласно формуле (3.49), ширина спектра будет равна  $\Delta f_{\text{сп}} \approx 2m_f F_1 = 150$  кГц.

При угловой модуляции с  $m_f \ll 1$  и АМ ширина спектра  $\Delta f_{\text{сп}}$  будет равна всего 2 кГц. Вот почему угловая модуляция с  $m_f \ll 1$  называется узкополосной, а с  $m_f \gg 1$  – широкополосной. Отсюда следует, что передача сигналов с угловой модуляцией при  $m_f \gg 1$  возможна только в диапазоне УКВ. В диапазонах СВ и ДВ, очевидно, не представляется возможным разместить радиостанции с угловой модуляцией из-за большой полосы частот, занимаемой спектрами этих станций.

Необходимо отметить также, что если при изменении амплитуды управляющего сигнала при АМ ширина спектра остается неизменной, то при угловой модуляции увеличение амплитуды управляющего сигнала приводят к расширению частотного спектра.

Дело в том, что в случае угловой модуляции амплитуда колебаний  $U_m$ , в отличие от АМ колебаний, при изменении интенсивности управляющего сигнала не меняется. Увеличение амплитуды управляющего сигнала приводит к увеличению индекса модуляции  $m_f$ , но чем больше  $m_f$ , тем сильнее подчеркиваются более удаленные от несущей боковые составляющие и уменьшается амплитуда колебаний несущей частоты и ближайших к ней боковых составляющих, что можно проследить на зависимостях  $I_n(m_f)$ , показанных на рис. 3.18. Таким образом, при увеличении  $m_f$  происходит перераспределение энергии между колебаниями несущей частоты и боковыми составляющими. Наоборот, при уменьшении  $m_f$  перераспределение энергии таково, что энергия боковых составляющих будет уменьшаться. В пределе при  $m_f = 0$   $I_0(0) = 0$ ;  $I_n(0) = 0$  (при  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) и все боковые составляющие будут равны нулю.

Векторные изображения сигнала  $u(t)$  при угловой модуляции можно построить также с помощью выражений (3.46) и (3.50). Первый случай соответствует представлению  $u(t)$  при  $m_f \ll 1$ , второй – при  $m_f \gg 1$ .

На рисунке 3.21 показаны векторные диаграммы для различных моментов времени при  $m_f \ll 1$ . Длина вектора  $\bar{U}_B$  равна амплитуде верхней боковой составляющей, длина вектора  $\bar{U}_H$  – амплитуде нижней боковой составляющей:

$$U_B = U_H = \frac{m_f U_m}{2}.$$

В отличие от векторных диаграмм при АМ вектор  $U_H$  на рис. 3.21 имеет противоположное направление, так как при значении нижней боковой составляющей стоит знак минус, в результате чего суммарный вектор  $\bar{U}_p = \bar{U}_m + \bar{U}_B$  имеет направление, перпендикулярное к вектору  $U_m$ . На рисунке 3.21 видно, что вектор  $\bar{U}_p$  непрерывно меняет свое направление, причем максимальное его отклонение составляет угол  $m_f$ . Кроме того, как следует из диаграмм, в процессе модуляции меняется длина результирующего вектора  $\bar{U}_p$  в пределах от  $\bar{U}_m$  до  $\bar{U}_{p\max}$ .

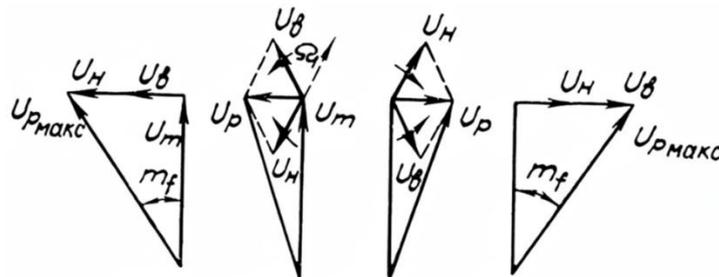


Рис. 3.21. Векторные диаграммы

Однако из ранее рассмотренных векторных диаграмм следовало, что амплитуда колебания при угловой модуляции должна оставаться неизменной, вектор  $\bar{U}_m$ , изображающий амплитуду колебания, только колеблется относительно своего первоначального положения с переменной угловой скорости. Аналогичный результат мог бы быть получен и на рис. 3.21, если бы

при построении диаграммы учитывались амплитуды всех боковых составляющих, представленных рядом (3.46). Для случая, когда  $m_f \gg 1$ , на основании выражения (3.46) с вектором, длина которого соответствует амплитуде несущей и равна  $U_m I_0(m_f)$ , складываются векторы, изображающие амплитуды боковых составляющих. Нечетному номеру  $n$  (порядок функции Бесселя) соответствует пара боковых составляющих (верхняя и нижняя), причем нижняя составляющая имеет знак минус. Например, при  $n = 1$  получим два вектора, длина которых соответствует амплитуде  $I_1(m_f)U_m$ . Обозначим амплитуды этих векторов  $\bar{U}_{в1}$  и  $\bar{U}_{н1}$ . По аналогии со случаем, когда  $m_f \ll 1$ , эти два вектора при сложении дадут составляющую  $\bar{U}_1$ , перпендикулярную к вектору  $\bar{U}_m I_0(m_f)$  (рис. 3.22, а). Следующая пара при четном  $n$  (равном 2) даст суммарную составляющую  $\bar{U}_2$ , параллельную вектору несущей (рис. 3.22, б), и т.д. При построении диаграмм подобного типа необходимо брать общий для всех векторов момент времени. Складывая суммарные векторы, полученные при сложении пар составляющих с четными и нечетными значениями  $n$ , получим векторную диаграмму, изображенную на рис. 3.22, в. Результирующий вектор  $\bar{U}_p$  должен быть равен  $U_m$ , и его конец должен с течением времени перемещаться по дуге окружности.

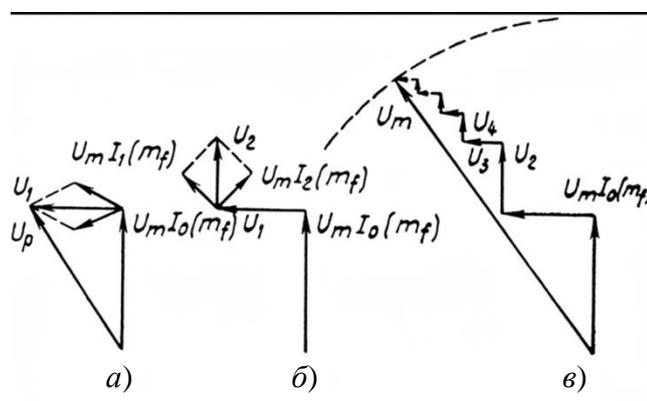


Рис. 3.22. Результирующий вектор

Как следует из выражения (3.46), описывающего ЧМ и ФМ колебания, при одинаковых значениях  $\omega$ ,  $m_f$ ,  $\Omega$  спектры ЧМ и ФМ колебаний отличаться не будут. Изменения  $\omega$ ,  $m_f$  вызывают одинаковые изменения в спектрах ЧМ и ФМ.

Изменение частоты управляющего колебания изменяет интервал между составляющими спектра, но сам характер спектра будет изменяться по-разному для ЧМ и ФМ колебаний.

Допустим, что в случае ЧМ ( $m_f \gg 1$ ) частота  $\Omega_1$  уменьшилась, интервал между составляющими спектра также уменьшился, спектр стал «гуще». Однако уменьшения ширины спектра не произойдет вследствие перераспределения энергии между составляющими за счет увеличения индекса  $m_f \left( m_f = \frac{\Delta\omega_1}{\Omega_1} \right)$ , в результате чего увеличится удельный вес боковых составляющих, и ширина спектра практически останется неизменной (рис. 3.23).

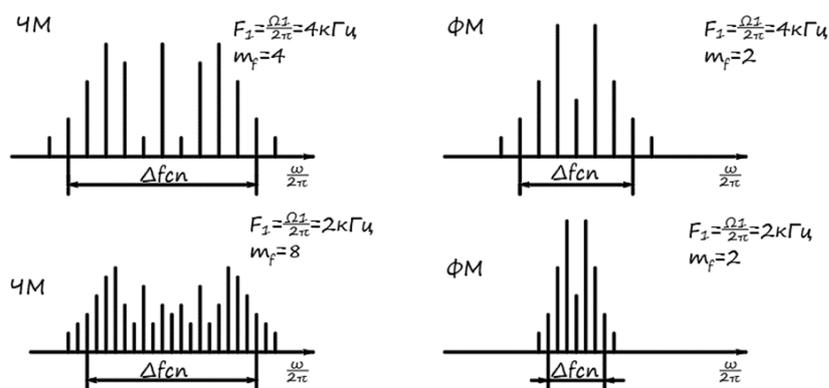


Рис. 3.23. Изменения ширины спектра

К аналогичному выводу можно прийти, подсчитав ширину спектра по формуле (3.49):  $\Delta\omega_{\text{сп}} \approx 2m_f\Omega_1 = \frac{2\Delta\omega_1}{\Omega_1}\Omega_1 = 2\Delta\omega_1$ , т.е. ширина спектра равна удвоенной девиации частоты, которая при ЧМ практически не зависит от частоты управляющего сигнала  $\Omega_1$ .

При ФМ колебаниях увеличение, например, частоты управляющего сигнала  $\Omega_1$  приводит к увеличению интервала между спектральными

составляющими, т.е. расширяет спектр, однако без перераспределения энергии между составляющими, так как при ФМ индекс  $m_f$  не зависит от частоты управляющего сигнала.

Аналогичные выводы получим и при использовании формулы (3.49)  $\Delta\omega_{\text{СП}} \approx 2m_f\Omega_1 = 2\Delta\psi\Omega_1$ , показывающей изменение  $\Delta\omega_{\text{СП}}$  при изменении частоты  $\Omega_1$ .

Зависимость ширины спектра от изменений частоты управляющего сигнала  $\Omega_1$  приводит к тому, что на практике (например, в телевидении) используют ЧМ, а не ФМ.

При угловой модуляции сложным сигналом, состоящим, например, из нескольких частот, структура спектра получается еще более сложной. При добавлении каждой новой модулирующей частоты, помимо появления бесконечного числа новых боковых частот, изменяются амплитуды колебаний уже существующих боковых частот и появляются новые комбинационные частоты, сильно усложняющие структуру спектра модулированного колебания. Таким образом, при увеличении числа модулирующих частот резко возрастает число боковых частот. Однако амплитуды боковых частот быстро уменьшаются, и главная часть этих составляющих лежит практически в полосе  $2\Delta\omega_1$ .

*Пример 3.5.* ЧМ напряжение получено в результате воздействия управляющего сигнала с частотой  $F_1 = 2$  кГц и имеет девиацию частоты  $\Delta f_1 = 4$  кГц. Необходимо вычислить и построить спектр амплитуд, если амплитуда колебания  $U_m = 100$  В, а частота 100 мГц. Определить также полосу частот, занимаемую этим колебанием.

Для решения этой задачи необходимо прежде всего определить  $n$  – номер наивысшей и нижней учитываемых составляющих:

$$n = m_f + 1 = \frac{\Delta f_1}{F_1} + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Определяем амплитуды составляющих спектра с помощью графиков рис. 3.18.

Амплитуда несущей (частота 108 мГц)

$$U_m I_0(m_f) = U_m I_0(2) = 100 \cdot 0,223 = 22,3 \text{ В.}$$

Амплитуды первой пары боковых составляющих [частоты  $(10^8 \pm 2 \cdot 10^3)$  Гц]

$$U_m I_1(m_f) = U_m I_1(2) = 100 \cdot 0,57 = 57 \text{ В.}$$

Амплитуды второй пары боковых составляющих [частоты  $(10^8 \pm 4 \cdot 10^3)$  Гц]

$$U_m I_2(m_f) = U_m I_2(2) = 100 \cdot 0,35 = 35 \text{ В.}$$

Амплитуды третьей пары боковых составляющих [частоты  $(10^8 \pm 6 \cdot 10^3)$  Гц]

$$U_m I_3(m_f) = U_m I_3(2) = 100 \cdot 0,129 = 12,9 \text{ В.}$$

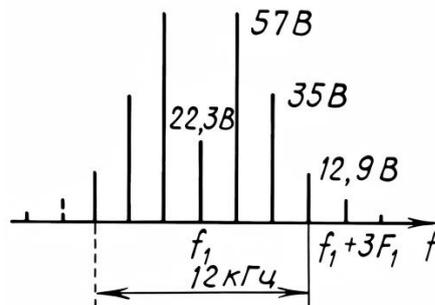


Рис. 3.24. Спектр сигнала

На основании полученных значений амплитуд построен спектр (рис. 3.24). Ширина спектра

$$\Delta f_{\text{сп}} = 2F_1(m+1) = 2 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 3 = 12 \cdot 10^3 \text{ Гц.}$$

### 3.3. РАДИОСИГНАЛЫ С РАСШИРЕННЫМ СПЕКТРОМ

#### 3.3.1. Понятие о согласованном фильтре

Для увеличения дальности действия радиолокационных станций (РЛС) необходимо увеличивать амплитуду радиоимпульсов, вырабатываемых в передатчиках РЛС. Однако увеличение амплитуды импульсов в передатчике ограничивается импульсной мощностью электронных приборов (например, амплитронов, магнетронов), а также электрической прочностью антенно-фидерных устройств. Другой возможностью повысить энергию сигнала, а вместе с ней и дальность действия РЛС, является увеличение длительности импульса. Но это приведет к тому, что ухудшится возможность разделения целей по дальности (так называемая разрешающая способность), и в результате на экране индикатора РЛС две или несколько целей могут быть приняты за одну. Таким образом, возникает проблема одновременного получения как можно большей дальности действия РЛС и ее высокой разрешающей способности. Для решения этой проблемы применяют сигналы относительно большой длительности, что дает возможность повысить энергию сигнала и тем самым увеличить дальность действия, и, кроме того, у сигнала искусственно расширяют спектр. Искусственное расширение спектра достигается за счет внутриимпульсной модуляции частоты (фазы) радиоимпульса. Такие сигналы получили в радиолокации название широкополосных. (У сигналов подобного вида произведение ширины спектра на длительность импульса  $\Delta f t_{\text{и}} \gg 1$ ).

В результате внутриимпульсной модуляции радиоимпульс имеет ширину спектра, в несколько раз бóльшую, чем импульс той же длительности, но без внутриимпульсной модуляции. Как известно, чем шире спектр, тем меньше длительность импульса, поэтому наличие сигнала с широким спектром указывает на потенциальную возможность путем дальнейшей обработки импульса в приемном устройстве получить импульс меньшей длительности и тем самым повысить разрешающую способность РЛС. Такой процесс обработки сигнала носит название сжатия импульса.

Сжатие импульса производится в приемнике с помощью так называемых согласованных фильтров (смысл такого названия станет ясным в дальнейшем). Кроме полезного «сигнала», на вход приемника поступают также и помехи, которые могут иметь различное происхождение и отличаться по своему виду и интенсивности. Часть помех (помехи от соседних станций, промышленные, атмосферные, космические) зарождается вне аппаратуры, а так называемые флюктуационные возникают в самой приемной аппаратуре. Причиной происхождения флюктуационных помех является дробовый эффект (флюктуации тока в электронных приборах), а также электрические флюктуации в омических сопротивлениях, полупроводниках, связанные с тепловым движением носителей заряда.

Помехи состоят из отдельных весьма кратковременных по длительности импульсов (длительность порядка  $10^{-12}$  с) со случайно изменяющейся во времени амплитудой. Одна из возможных осциллограмм такой помехи показана на рис. 3.25. Следовательно, флюктуационная помеха (как случайная функция времени) является случайным процессом. Так как электрические флюктуации всегда имеют место в приемнике, то в отличие от остальных видов помех, флюктуационные помехи принципиально не могут быть устранены, но отрицательное воздействие помехи на полезный сигнал может быть уменьшено. Помеха, попадая на вход приемного устройства, в дальнейшем будет усиливаться вместе с сигналом, поэтому повышать усиление приемника имеет смысл только в том случае, если отношение сигнал–помеха превышает минимальную величину, необходимую для различения сигнала на фоне помех.



**Рис. 3.25. Осциллограмма помехи**

В основе различных способов борьбы с помехами (в дальнейшем будут рассматриваться только флюктуационные помехи) лежит использование отличий между полезным сигналом и помехой. Случайный процесс описывается с помощью вероятностных характеристик, рассматриваемых в курсе статистической радиотехники. Однако хорошо разработанная теория спектров для регулярных сигналов может быть использована также при описании случайных процессов.

Непосредственное вычисление частотного спектра случайной функции  $u_n(t)$  невозможно, ибо вычисленный спектр был бы также случайной функцией, так как спектральные составляющие этого процесса имеют случайную и независимую фазу, а теория случайных процессов оперирует с характеристиками, которые сами по себе не случайны. И поэтому вводят понятие спектральной плотности среднего (по времени) квадрата случайной функции, так как величина среднего квадрата не зависит от соотношения фаз суммируемых гармоник.

По аналогии с энергетической спектральной плотностью, рассмотренной в гл. 2, спектральную плотность средней мощности назовем энергетическим спектром функции  $u_n(t)$  и обозначим  $F(\omega)$ . Оказывается, что энергетический спектр флюктуации равномерен до очень высоких частот (порядка  $10^{12} \div 10^{13}$  Гц). Подобный спектр имеет и белый свет, вот почему флюктуационные шумы называют также белым шумом. Если полезный сигнал, подаваемый на вход приемника, представляет собой радиоимпульс, то отличие в спектрах белого шума и радиоимпульса указывает на возможность ослабления влияния шумов, для чего сигнал и помеха подаются на вход фильтра (например, обычный параллельный контур), с частотной характеристикой, полоса пропускания которой равна ширине спектра импульса. В результате фильтр пропустит большую часть энергии сигнала и только часть энергии помехи, тем самым на выходе фильтра возрастет отношение мощности сигнала к мощности помехи (рис. 3.26, б). Однако такой фильтр не учитывает форму сигнала (которая может быть различной при одной и той же ширине

спектра) и статистических свойств помехи, и поэтому на выходе не дает максимально возможного отношения сигнал–помеха.

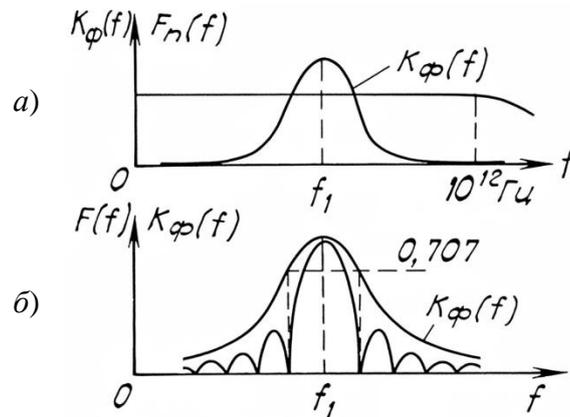


Рис. 3.26. АЧХ согласованного фильтра

С появлением работ Н. Винера, А. Н. Колмогорова, В. А. Котельникова была решена задача об определении характеристик фильтра, создающего максимальное отношение сигнал–шум. Фильтры, у которых на выходе получают максимальное отношение сигнал–шум, получили название оптимальных. Согласованный фильтр является одной из реализаций оптимального фильтра. Слово «согласованный» отражает тот факт, что для получения максимума отношения сигнал–шум коэффициент передачи фильтра согласован со спектральной характеристикой сигнала. Поэтому данный фильтр рассчитан только на сигнал определенной формы.

Определим требования к характеристикам фильтра. На вход фильтра (рис. 3.27, а) подается полезный сигнал и шум  $u_{\text{п}}(t)$ . Спектральная плотность полезного сигнала  $\dot{G}(\omega) = G(\omega)e^{j\psi(\omega)}$ , где  $\psi(\omega)$  – фазочастотный спектр сигнала.

Коэффициент передачи напряжения фильтра  $\dot{K} = K(\omega)e^{j\psi_k(\omega)}$ , где  $\psi_k(\omega)$  – искомая фазочастотная характеристика фильтра. Для получения максимума (пика) сигнала, очевидно, надо, чтобы все составляющие спектра полезного сигнала в какой-то момент времени  $t = t_0$  имели одинаковую начальную фазу. Если выражение фазочастотной характеристики фильтра

будет равно и противоположно по знаку выражению фазочастотной характеристики спектра сигнала, т.е.  $\psi(\omega)$ , то начальные фазы всех составляющих сигнала скомпенсируются фильтром, и все составляющие к моменту  $t_0$  будут иметь «нулевую» фазу и при суммировании создадут пик сигнала. В то же время фазы составляющих гармоник шума имеют случайные значения, поэтому на выходе фильтра, суммируются случайным образом, частично компенсируя друг друга. Образование пика сигнала требует энергии всего сигнала, поэтому пик сигнала может быть получен не ранее окончания действия входного сигнала с длительностью  $t_{и}$ . Следовательно, момент  $t_0$ , соответствующий времени задержки сигнала, не может быть меньше длительности сигнала, т.е.  $t_0 \geq t_{и}$ . Увеличение  $t_0$  (более  $t_{и}$ ) приводит к сдвигу пика сигнала вправо (по оси времени), т.е. увеличивает его задержку, но не влияет на величину пика. Однако условие  $t_0 \geq t_{и}$  накладывает ограничение на форму сигнала  $u(t)$ , а именно: длительность сигнала должна быть конечной, следовательно, согласованный фильтр применим только для импульсных сигналов. Исходя из условия компенсации фаз у составляющих сигнала и задержки сигнала на время  $t_0$ , окончательное выражение фазочастотной характеристики  $\psi_k(\omega)$  должно принять вид

$$\psi_k(\omega) = -[\psi(\omega) + \omega t_0]. \quad (3.51)$$

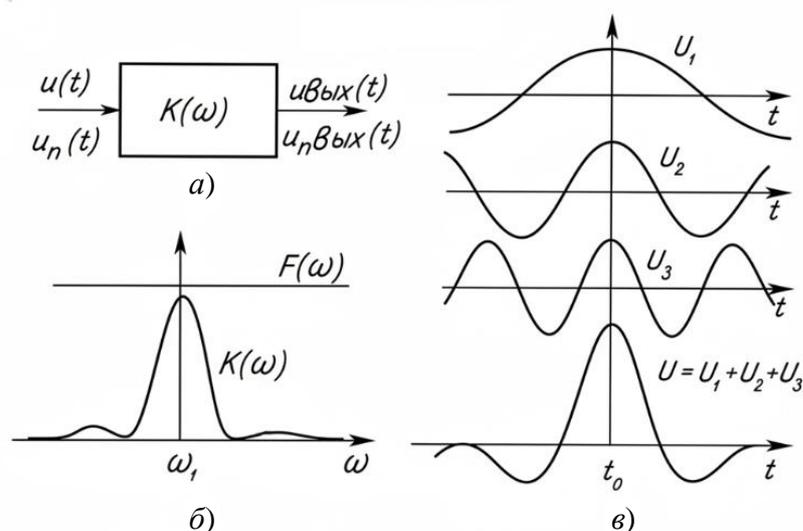


Рис. 3.27. АЧХ согласованного фильтра

При определении вида амплитудно-частотной характеристики исходим из того, что для уменьшения влияния шумов согласованный фильтр должен минимально ослаблять составляющие спектра сигнала с наибольшей амплитудой (главная часть сигнала), а составляющие с малой амплитудой должны ослабляться значительно, иначе будут проходить относительно интенсивные составляющие помехи, имеющие постоянные (в большой полосе частот) среднеквадратичные значения амплитуд. Поэтому, если модуль коэффициента передачи напряжения записать в виде

$$K(\omega) = AG(\omega), \quad (3.52)$$

где  $A$  – размерный коэффициент, то фильтр будет соответствовать поставленной задаче, в этом нетрудно убедиться на примере входного сигнала в виде радиоимпульса прямоугольной формы.

На рисунке 3.27, б показана амплитудно-частотная характеристика согласованного фильтра, определяемая на основании выражения (3.52) по формуле (3.18), и энергетический спектр помехи  $F(\omega)$  на входе фильтра. При данной характеристике  $K(\omega)$  на выходе фильтра фактически появятся только шумовые составляющие, попадающие в область полосы пропускания фильтра, равную ширине спектра входного сигнала  $u(t)$ .

Выражение комплексного коэффициента передачи напряжения согласованного фильтра,  $\dot{K}(\omega)$  на основе соотношений (3.51) и (3.52) будет определяться как

$$\dot{K}(\omega) = AG^*(\omega)e^{-j\omega t_0}, \quad (3.53)$$

где  $G^*(\omega)$  – комплексно-сопряженное выражение спектральной плотности входного сигнала.

Важным свойством согласованного фильтра является сжатие сложного сигнала во времени, обусловленное суммированием гармоник с нулевыми фазами, и, как результат, образование пика сигнала. На рисунке 3.27, в изображен выходной сигнал для случая, когда входной сигнал состоит из трех

гармоник, фазы которых равны нулю при  $t = t_0$ , независимо от их начальных фаз на входе. Сигнал на выходе фильтра будет искажен по сравнению с входным сигналом, однако задачей фильтрации является неточное воспроизведение формы сигнала, а наилучшее выделение его на фоне помех. Вполне очевидно, что длительность главной части сигнала  $\Delta t$  (в которой сосредоточена основная часть энергии сигнала) будет меньше длительности (входного импульса за счет появления пика, ибо при одинаковой энергии входного и выходного сигналов импульсу с большим значением выходного напряжения должна соответствовать меньшая длительность).

### 3.3.2. Спектр радиосигнала с внутриимпульсной линейной частотной модуляцией

Одним из методов искусственного расширения спектра радиосигнала является внутриимпульсная частотная модуляция. На рисунке 3.28 изображен радиоимпульс с линейной частотной модуляцией, который в дальнейшем будем сокращенно называть ЛЧМ-импульс.

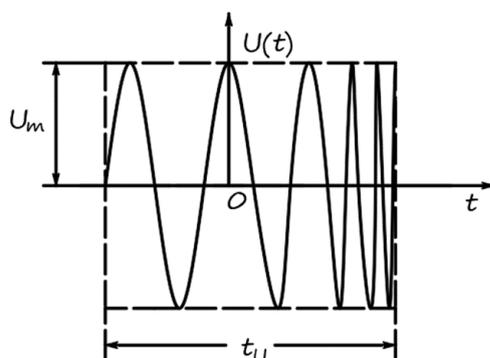


Рис. 3.28. Радиоимпульс с линейной частотной модуляцией

В общем случае радиосигнал с ЧМ можно представить в виде

$$u(t) = A(t) \cos[\omega_1 t + \psi_1(t)], \quad (3.54)$$

где  $\omega_1 t$  – текущая фаза;  $\psi_1(t)$  – начальная фаза, меняющая свои значения вследствие модуляции;  $A(t)$  – амплитуда (переменная) колебаний.

Спектральная плотность такого сигнала

$$\dot{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Подставляя в выражение для спектральной плотности  $u(t)$ , а также записывая  $\cos[\omega_1 t + \psi_1(t)]$  в виде суммы двух экспонент, получаем

$$\begin{aligned} \dot{G}(\omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} A(t)e^{-j[(\omega-\omega_1)t-\psi_1(t)]} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} A(t)e^{-j[(\omega+\omega_1)t+\psi_1(t)]} dt = \\ &= \dot{G}_1(\omega-\omega_1) + \dot{G}_2(\omega+\omega_1). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Первое слагаемое  $\dot{G}_1(\omega-\omega_1)$  представляет собой спектральную плотность для области положительных частот, второе –  $\dot{G}_2(\omega+\omega_1)$  соответствует спектральной плотности в области отрицательных частот. Определим спектральную плотность  $\dot{G}_1(\omega-\omega_1)$ , выражение которой запишем в виде

$$\dot{G}_1(\omega-\omega_1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} A(t)e^{j\psi(t)} dt, \quad (3.56)$$

где  $\psi(t) = -[(\omega-\omega_1)t - \psi_1(t)]$ .

Будем считать  $A(t)$  медленной функцией времени, у которой изменения амплитуды колебаний за период несущей частоты значительно меньше самой амплитуды, а множитель  $e^{j\psi(t)}$  – быстроосциллирующей функцией времени.

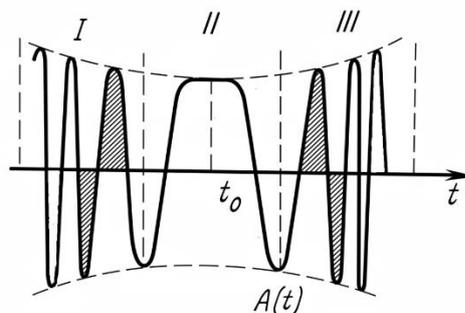


Рис. 3.29. Быстроосциллирующая функция

На рисунке 3.29 показан график одного из возможных видов быстроосциллирующей функции вида  $A(t)\cos\psi(t)$ . Как видно из рисунка, осциллирующая функция быстро изменяется на участках I и III и медленно – на участке II. В точке  $t=t_0$  значение частоты стремится к нулю ( $T_1 \rightarrow \infty$ ), следовательно, на основании зависимости  $\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$  в точке  $t_0$   $\psi(t)$  стремится к постоянной величине. Точка  $t_0$ , в которой изменение фазы равно нулю, носит название точки стационарной фазы. Следовательно, точка стационарной фазы может быть найдена из условия

$$\left. \frac{d\psi(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = 0. \quad (3.57)$$

Оказывается, что если подынтегральная функция выражения (3.56) имеет точки стационарной фазы, то вычисление интеграла  $\dot{G}_1(\omega - \omega_1)$  упрощается, так как интегрировать фактически придется в области этих точек, ибо в остальных областях (I и III) интеграл близок к нулю, если учесть, что  $A(t)$  – медленная функция времени.

Запишем  $\psi(t)$  в ряд Тейлора в окрестностях точки  $t_0$ :

$$\psi(t) = \psi(t_0) + \psi'(t_0)(t - t_0) + \frac{\psi''(t_0)(t - t_0)^2}{2} + \dots$$

В нашем случае  $\psi'(t_0) = 0$ , поэтому

$$\psi(t) = \psi(t_0) + \frac{\psi''(t_0)(t - t_0)^2}{2} + \dots \quad (3.58)$$

Ограничиваясь в (3.58) двумя первыми слагаемыми и подставляя их в формулу (3.56), получаем

$$\dot{G}_1(\omega - \omega_1) = \frac{1}{2} A(t_0) e^{j\psi(t_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j \frac{\psi''(t_0)(t - t_0)^2}{2}} dt. \quad (3.59)$$

Произведем в целях упрощения вычислений в формуле (3.59) подстановку вида

$$y^2 = \frac{\Psi''(t_0)(t-t_0)^2}{2}; y = (t-t_0)\sqrt{\frac{\Psi''(t_0)}{2}}; dy = dt\sqrt{\frac{\Psi''(t_0)}{2}}.$$

Тогда получим

$$\dot{G}_1(\omega - \omega_1) = \frac{1}{2} \frac{A(t_0)e^{j\psi(t_0)}}{\sqrt{\frac{\Psi''(t_0)}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jy^2} dy. \quad (3.60)$$

Учитывая, что интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jy^2} dy$  (интеграл Пуассона) равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jy^2} dy = \sqrt{\pi} e^{j\frac{\pi}{4}},$$

и подставляя это значение в формулу (3.60), найдем окончательное выражение для  $\dot{G}_1(\omega - \omega_1)$ :

$$\dot{G}_1(\omega - \omega_1) = \sqrt{\frac{\pi}{2|\Psi''(t_0)|}} A(t_0) e^{j\left[\psi(t_0) \pm \frac{\pi}{4}\right]}. \quad (3.61)$$

В формуле (3.61) знак плюс берется в случае, если  $\Psi''(t_0) > 0$ , а минус – при  $\Psi''(t_0) < 0$ .

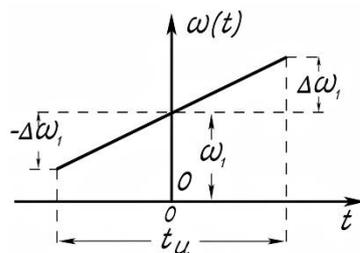


Рис. 3.30. Спектральная плотность ЛЧМ-импульса

Таким образом, формула (3.61) дает возможность найти спектральную функцию в области положительных частот для радиосигнала вида (3.54). Определим спектральную плотность ЛЧМ -импульса, изображенного на рис. 3.28, используя полученные результаты. Амплитуда импульса  $U_m$  постоянна, частота изменяется по линейному закону, который графически изображен на рис. 3.30 и определяется выражением

$$\omega(t) = \omega_1 + \beta t, \quad (3.62)$$

а коэффициент  $\beta$  равен

$$\beta = \frac{2\Delta\omega_1}{t_{\text{и}}}, \quad (3.63)$$

где  $\Delta\omega_1$  – девиация частоты.

Пользуясь выражением (3.21), определяем начальную фазу  $\psi_1(t)$ ,

$$\psi_1(t) = \int \beta t dt + \psi_1 = \frac{\beta t^2}{2},$$

где  $\psi_1$  – постоянное значение начальной фазы, которое можно принять равным нулю.

Следовательно, выражение (3.54) для радиоимпульса примет вид

$$u(t) = U_m \cos\left(\omega_1 t + \frac{\beta t^2}{2}\right), \quad (3.64)$$

а  $\psi(t)$  –

$$\psi(t) = -\left[(\omega - \omega_1)t - \frac{\beta t^2}{2}\right]. \quad (3.65)$$

Определим точку стационарной фазы, используя формулу (3.57)

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -[(\omega - \omega_1) - \beta t]_{t=t_0}.$$

Отсюда

$$t_0 = \frac{\omega - \omega_1}{\beta},$$

а вторая производная от функции  $\psi(t)$

$$\left. \frac{d^2\psi(t)}{dt^2} \right|_{t=t_0} = \psi''(t_0) = \beta. \quad (3.67)$$

С учетом найденных значений формула для  $\psi(t_0)$  примет вид

$$\psi(t_0) = - \left[ (\omega - \omega_1)t_0 - \frac{\beta t_0^2}{2} \right] = - \left[ \frac{(\omega - \omega_1)^2}{2\beta} \right]. \quad (3.68)$$

Подставив формулы (3.68), (3.67) в выражение (3.61), а также учитывая, что  $A(t_0) = U_m$ , получим значение спектральной плотности  $\dot{G}_1(\omega - \omega_1)$  в случае ЛЧМ-импульса

$$\dot{G}_1(\omega - \omega_1) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} U_m e^{-j \left[ \frac{(\omega - \omega_1)}{2\beta} - \frac{\pi}{4} \right]}. \quad (3.69)$$

Модуль спектра полученного выражения не зависит от частоты и остается постоянным в бесконечной области частот, из чего можно заключить, что энергия сигнала бесконечна, а этого не может быть. Дело в том, что вычисление интеграла (3.56), определяющего спектральную плотность ЛЧМ-импульса, производилось в окрестностях точки стационарной фазы  $t_0$ , а из формулы (3.66) находим, что в точке  $t_0$  значение текущей частоты спектра  $\omega = \omega_1 + \beta t_0$  совпадает с мгновенным значением частоты сигнала  $\omega(t)$  [см. формулу (3.62)]. Следовательно, полученное выражение для спектральной плотности (3.69) справедливо лишь для частот спектра, заключенных в пределах изменения мгновенной частоты сигнала  $\omega(t)$ . Но так как максимальное значение частоты сигнала равно  $(\omega_1 + \Delta\omega_1)$ , а минимальное  $(\omega_1 - \Delta\omega_1)$ , где  $\Delta\omega_1$  – девиация частоты, то ширина спектра

$$\Delta\omega_{\text{сп}} = (\omega_1 + \Delta\omega_1) - (\omega_1 - \Delta\omega_1) = 2\Delta\omega_1. \quad (3.70)$$

т.е. равна удвоенной девиации частоты.

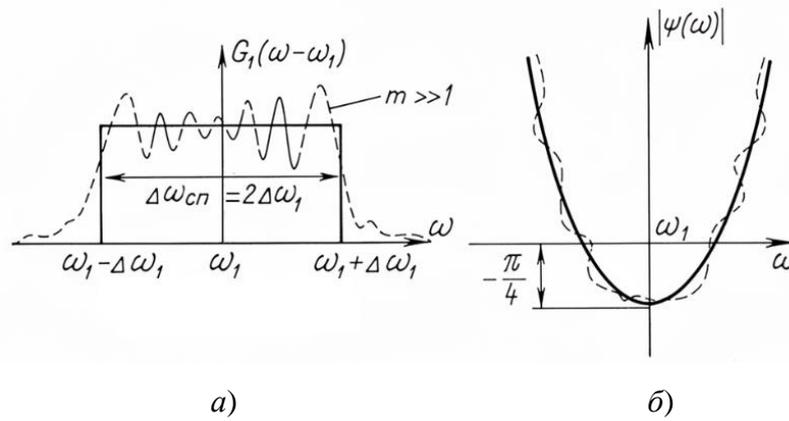


Рис. 3.31. График модуля спектра и его фазовая характеристика

График модуля спектра и его фазовая характеристика, построенные согласно выражению (3.69), показаны на рис. 3.31, а, б. Найденные значения спектральной плотности  $G_1(\omega - \omega_1)$  являются приближенными. При более точном определении  $G_1(\omega - \omega_1)$  график модуля спектральной плотности и фазовая характеристика примут вид, показанный на рис. 3.31 пунктиром. Расчеты показывают, что приближение модуля к прямоугольной форме, а фазовой характеристики к параболической кривой будет тем больше, чем больше величина параметра, обозначаемого буквой  $m$ :

$$m = 2\Delta f_1 t_{и}. \quad (3.71)$$

Сравнение графиков, изображенных на рис. 3.31, указывает на то, что данный метод определения спектра, получивший название метода стационарной фазы, эффективен и дает хорошее приближение при больших значениях параметра  $m$ .

Найденное значение  $\dot{G}_1(\omega - \omega_1)$  соответствует области положительных частот. Аналогичным образом можно было бы определить  $\dot{G}_2(\omega + \omega_1)$ , соответствующее области отрицательных частот. Однако в этом нет необходимости, как спектральная плотность в области отрицательных частот легко получается из выражения  $\dot{G}_1(\omega - \omega_1)$  на основании четности модуля и нечетности аргумента относительно  $\omega$ . Заметим также, что при  $\Delta\omega_1 \ll \omega_1$

найденный модуль спектральной плотности практически не заходит в область отрицательных частот.

Оценим расширение спектра за счет введения ЛЧМ. Для 2 импульса без ЛЧМ ширина спектра  $\Delta f_{\text{сп}} = \frac{2}{t_{\text{и}}}$ .

Для радиоимпульса с ЛЧМ ширина спектра

$$\Delta f_{\text{сп}}^{(\text{ЛЧМ})} \approx 2\Delta f_1.$$

Тогда расширение спектра за счет ЛЧМ можно оценить отношением

$$\frac{\Delta f_{\text{сп}}^{(\text{ЛЧМ})}}{\Delta f_{\text{сп}}} \approx \Delta f_1 t_{\text{и}} = \frac{m}{2}.$$

Если выбрать, длительность  $t_{\text{и}}$ , равной 10 мкс, девиацию частоты  $\Delta f_1 = 10$  мГц, что нетрудно выполнить в диапазоне СВЧ, получим  $\Delta f_1 t_{\text{и}} = 10 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 100$ .

При найденных спектральных характеристиках ЛЧМ-импульса согласованный фильтр, на вход которого подается ЛЧМ-импульс, должен обладать (основываясь на выражении (3.69)) прямоугольной амплитудно-частотной и параболической фазовой характеристиками. Строгопрямоугольная амплитудно-частотная характеристика фильтра неосуществима, поэтому последнюю обычно заменяют характеристикой резонансного фильтра. Опуская вопросы, связанные с разработкой схемы фильтра и ее практической реализацией, а также расчеты по определению выходного сигнала, ограничимся изложением результатов.

Сигнал на выходе согласованного фильтра определится формулой

$$U_{m\text{ВЫХ}}(t) = U_m \sqrt{m} \frac{\sin \Delta\omega_1(t - t_{\text{и}})}{\Delta\omega_1(t - t_{\text{и}})}. \quad (3.72)$$

Как следует из формулы (3.72), амплитуда выходного напряжения изменяется по закону  $\frac{\sin x}{x}$ . Наибольшая амплитуда выходного сигнала

в момент  $t = t_0$  в  $\sqrt{m}$  раз больше, чем на входе, а длительность главного «лепестка» (главной части сигнала), отсчитываемая между двумя нулями, равна  $\frac{1}{\Delta f_1}$  (рис. 3.32). При определении длительности импульса, соответствующей

уровню  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  от максимального значения выходного сигнала, получим

длительность импульса на выходе фильтра, равную  $t_{и} \approx \frac{1}{2\Delta f_1}$ .

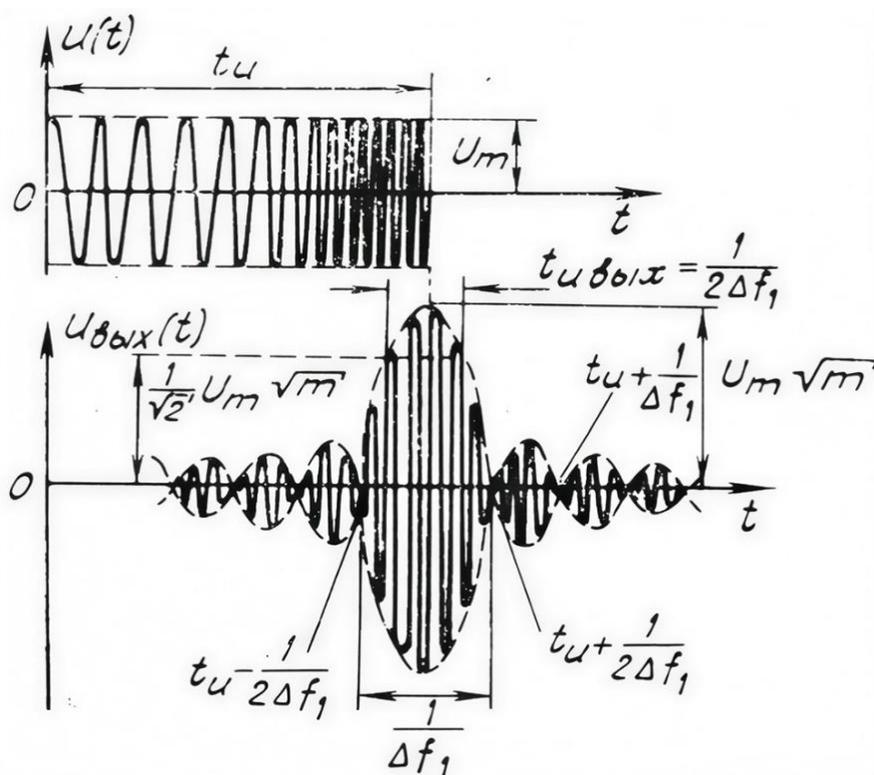


Рис. 3.32. Определение длительности импульса

Таким образом, отношение  $\frac{t_{и}}{t_{и\text{вых}}} \approx 2\Delta f_1 t_{и} = m$  совпадает по величине

с параметром  $m$  и может быть названо коэффициентом сжатия ЛЧМ-импульса в согласованном фильтре. Следовательно, коэффициент сжатия, показывающий, во сколько раз уменьшится длительность импульса на выходе согласованного фильтра, в приведенном выше примере будет равен 200.

В заключение заметим, что радиосигналы с ЛЧМ не являются единственно возможными сигналами с расширенным спектром. Для расширения спектра применяются и другие методы, в частности, используется фазовая манипуляция, состоящая в том, что импульс длительностью  $t_{\text{и}}$  разбивается на определенное число  $n$  более коротких, сомкнутых между собой частичных радиоимпульсов, в каждый из которых вводится соответствующий фазовый сдвиг  $\Delta\varphi$  (рис. 3.33). Подробно основные виды расширения спектров сигнала рассматриваются в специальных курсах.

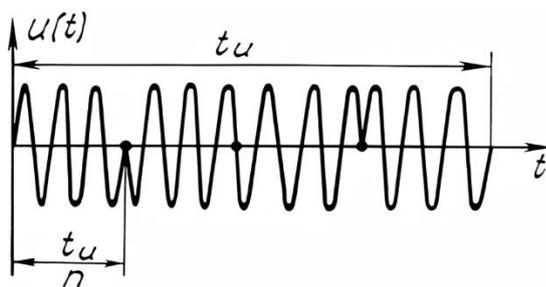


Рис. 3.33. Иллюстрация фазового сдвига

#### 4. ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ

#### 4.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ. ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА

Как известно, все виды сообщений, предназначенных для передачи их в системах связи и управления, необходимо преобразовать в электрические сигналы, форма которых зависит от вида передаваемого сообщения и способа, с помощью которого осуществляется передача. Все многообразие сигналов, применяемых в современной радиотехнике, можно, в свою очередь, по зависимости от времени разбить на два основных класса: непрерывные сигналы и дискретные сигналы.

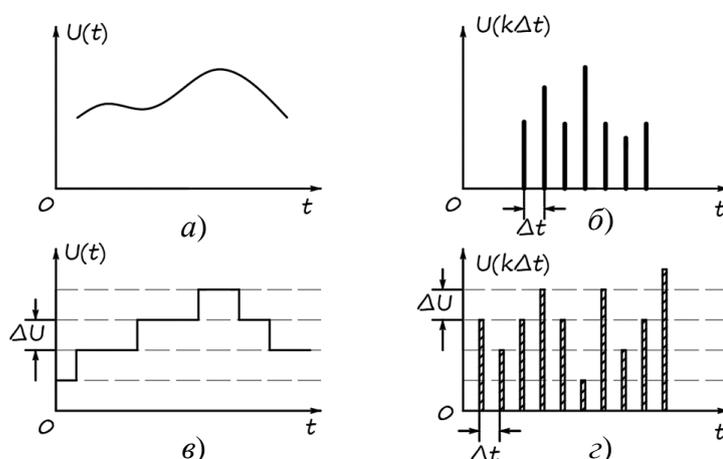
Непрерывный сигнал описывается непрерывной функцией времени, дискретный – дискретной функцией времени.

Классическим примером непрерывного сигнала является электрический сигнал, полученный при преобразовании звуковых колебаний в электрические с помощью микрофона. Непрерывность такого сигнала заключается в том, что он задан по оси времени на несчетном множестве точек. При этом по оси ординат он может принимать любое значение в определенном интервале (рис. 4.1, а). На рисунке 4.1, б показан сигнал, заданный при дискретных значениях времени  $t$  (на счетном множестве точек).

По оси ординат в определенном интервале сигнал принимает любые значения. Таким образом, функция, описывающая сигнал, будет *дискретно-непрерывной*. Она непрерывна по уровню и квантована во времени, т.е. может принимать только определенные (разрешенные) значения. Если отсчеты времени имеют величины, занимающие промежуточные значения, то принимается ближайшее разрешенное.

Такая операция носит название квантования, а шкала разрешенных значений и интервал между ними – соответственно шкалой и шагом квантования. К дискретно-непрерывным сигналам можно отнести и амплитудно-модулированное колебание  $u(t) = U_m(t) \cos \omega_1 t$ . Амплитуда

колебания не ограничена по уровню (не квантована), но ее значения известны лишь в определенные моменты времени, разделенные интервалом  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ .



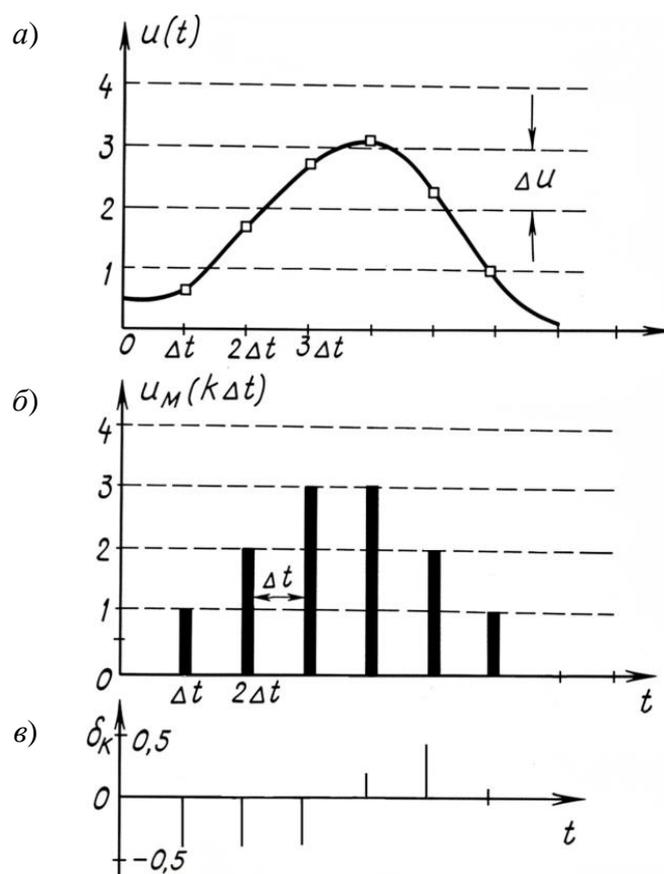
**Рис. 4.1. Преобразование непрерывного сигнала в дискретный**

На рисунке 4.1, в показан сигнал, заданный непрерывно на временной оси, но по уровню величина сигнала может принимать лишь дискретные значения. В этом случае говорят о сигнале, квантованном по уровню.

Сигнал, квантованный по уровню и дискретный по времени, т.е. являющийся чисто дискретным, показан на рис. 4.1, г. Как видно из рисунка, шаг квантования по уровню равен  $\Delta u$ , а по времени  $\Delta t$ .

С математической точки зрения, квантование есть не что иное как округление чисел. На практике часто производят квантование, хотя так его не называют. Например, при работе с таблицами тригонометрических функций, логарифмов и т.д. ограничиваются обычно четвертым знаком.

При округлении выбирают ближайшее приближенное значение, и тем самым заведомо в расчет вводится ошибка. Разность между истинным значением функции  $u(t)$  в определенной точке  $u(k\Delta t)$  и квантованной величиной  $u_M(k\Delta t)$  обозначается буквой  $\delta_k$  [ $u(k\Delta t) - u_M(k\Delta t) = \delta_k$ ] и носит название ошибки квантования.



**Рис. 4.2. Ошибки квантования**

На рисунке 4.2, *а*, *б*, *в* показаны соответственно непрерывная величина  $u(t)$ , дискретная  $u_M(k\Delta t)$  и ошибка квантования  $\delta_k$ .

Передача квантованных значений вместо истинных равносильна наложению на истинные значения помехи, поэтому в теории связи величину  $\delta_k$  называют еще помехой или шумом квантования.

Дискретизация сигналов находит широкое применение в системах связи и управления, в системах передачи информации, в которых применяется математическое моделирование процессов фильтрации, основанное на использовании ЭЦВМ. Квантование сигналов положено в основу импульсно-кодовой модуляции (ИКМ), которая будет рассмотрена в дальнейшем, а также позволяет избавиться от случайных помех при передаче сигналов по линиям связи (рис. 4.3).

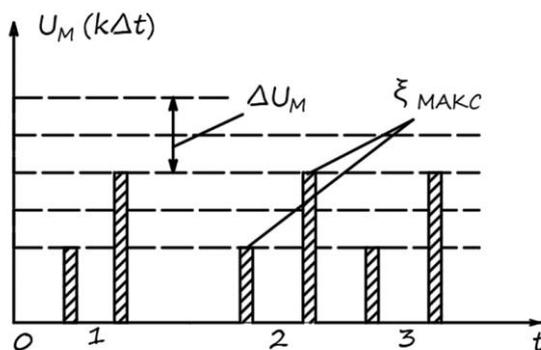


Рис. 4.3. Сигналы после прохождения линии связи

На рисунке цифрой 1 обозначена пара дискретных сигналов, а цифрой 2 – та же пара после прохождения канала связи. При передаче сигнала по каналу связи на сигнал накладывается помеха величиной  $\xi_{\max}$ . Поскольку помеха является случайной величиной, она не контролируема и восстановить истинное значение сигнала  $u_M(k\Delta t)$  нельзя. В случае определенной линии передачи на основании статистических данных можно с определенной вероятностью подсчитать максимальное значение помехи  $\xi_{\max}$ .

Если выбрать шаг квантования из условия

$$\xi_{\max} < \frac{\Delta U_M}{2}, \quad (4.1)$$

то приемник сигнала будет реагировать только на ближайшие дискретные значения, т.е. на передаваемое значение сигнала. Действительно, помеха из условия меньше половины шага квантования, следовательно, при повторном квантовании на приемном устройстве сигнал будет округлен до ближайшего, т.е. переданного, уровня сигнала. На рисунке 4.3 цифрой 3 обозначен сигнал без помехи.

При передаче с ретрансляцией в каждом переприемном пункте сигнал очищается от помехи и снова передается в линию передачи.

Необходимо помнить, что квантование не освобождает сигнал от помехи, здесь случайная помеха заменяется другой – шумом квантования. Преимущество систем связи с квантованием состоит в том, что в них предотвращено накопление помех.

Если сигнал квантования по времени, то может показаться, что дискретизация приводит к потере информации, так как теряется часть значений передаваемого сигнала и остаются лишь значения в дискретные моменты времени. Однако при определенном выборе шага квантования  $\Delta t$  можно сохранить информацию.

Правильный выбор величины  $\Delta t$  определяется на основании теоремы отсчетов, сформулированной в 1933 г. В. А. Котельниковым.

Теорема Котельникова утверждает, что сигнал, описываемый функцией с ограниченным спектром, полностью определяется своими значениями, отсчитываемыми через интервалы времени  $\Delta t = \frac{1}{2F_B}$ , где  $F_B$  – наивысшая частота спектра сигнала.

Суть теоремы заключается в том, что если необходимо передать сигнал, описываемый непрерывной функцией  $u(t)$  с ограниченным спектром, то достаточно передать отдельные мгновенные значения (отсчеты), следующие через интервал  $\Delta t = \frac{1}{2F_B}$  (рис. 4.4). По этим значениям на приемном пункте восстанавливается непрерывная функция  $u(t)$ . Теорема применима практически для всех сигналов, передаваемых по каналам связи и управления, ибо ввиду ограниченной ширины пропускания передающего связного устройства или вследствие ограничения ширины спектра за счет пренебрежения составляющими с малой амплитудой при больших значениях частот, все реальные сигналы имеют ограниченный спектр.

Так как передача непрерывной функции на основании теоремы Котельникова заключается в передаче отдельных отсчетов функции, эта теорема получила еще название теоремы отсчетов.

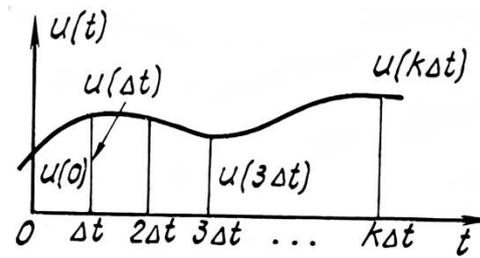


Рис. 4.4. Отсчеты, следующие через интервал  $\Delta t = \frac{1}{2F_B}$

Для доказательства теоремы рассмотрим вначале сигнал, у которого спектральная плотность  $\dot{G}_\varphi(\omega)$  равна постоянной величине  $a$  в интервале частот от  $-\omega_B$  до  $+\omega_B$  и равна нулю вне этого интервала (рис. 4.5, а).

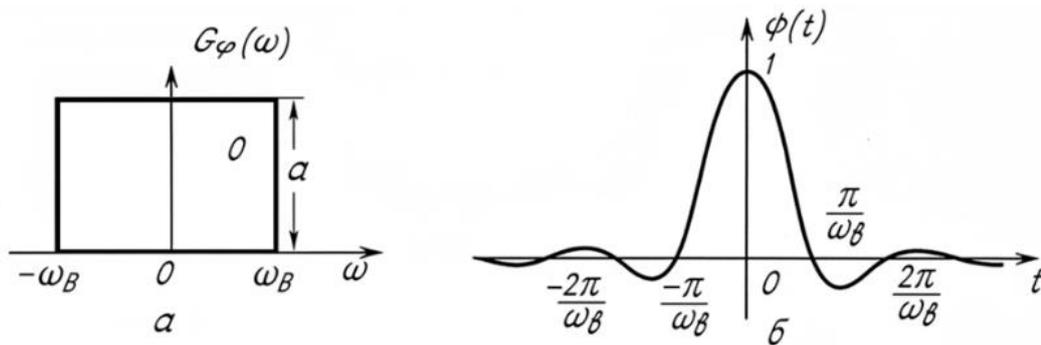


Рис. 4.5. Спектральная плотность сигнала

Используя обратное преобразование Фурье для этого сигнала, получим

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} a e^{j\omega t} d\omega = \frac{a\omega_B}{\pi} \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B t}. \quad (4.2)$$

Из формулы (4.2) следует, что если спектральная плотность  $\dot{G}(\omega)$  является вещественной и четной относительно  $\omega$ , то и определяемая функция  $\varphi(t)$  будет четной относительно  $t$ . Аналогичный вывод был получен при анализе свойств спектральной плотности  $\dot{G}(\omega)$ .

Величина постоянной  $a$  не имеет существенного значения, поэтому, с целью упрощения выражения  $\varphi(t)$ , положим  $a = \frac{\pi}{\omega_B} = \frac{1}{2F_B}$ . Тогда

$$\varphi(t) = \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B t}; \quad (4.3)$$

$$\dot{G}(\omega) = \frac{\pi}{\omega_B}, \quad |\omega| \leq \omega_B;$$

$$\dot{G}(\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_B.$$

Функция  $\varphi(t)$ , определяемая из формулы (4.3), называется функцией отсчета, ее графическое изображение показано на рис. 4.5, б. Максимальное значение ее равно единице, в точках  $t = \frac{k\pi}{\omega_B}$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ) она равна нулю.

При смещении функции  $\varphi(t)$  вдоль оси времени полоса частот, занимаемая этой функцией, не изменяется.

Если смещение вдоль оси времени равно целому числу интервалов  $\frac{\pi}{\omega_B}$ , получим функции, ортогональные между собой:

$$\varphi_k(t) = \varphi\left(t - \frac{k\pi}{\omega_B}\right) = \frac{\sin(\omega_B t - k\pi)}{\omega_B t - k\pi}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.4)$$

На рисунке 4.6 показаны функции  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ ,  $\varphi_3(t)$ . Напомним, что две из них –  $\varphi_k$  и  $\varphi_n$  – ортогональны на участке  $[a, b]$ , если

$$\int_a^b \varphi_k^* \varphi_n dt = 0, \quad k \neq n.$$

Покажем, что к числу ортогональных функций относится функция отсчета  $\varphi_k(t)$ . На основании теоремы Релея получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k^*(t) \varphi_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{+\omega_B} G_k^*(\omega) \dot{G}_n(\omega) d\omega. \quad (4.5)$$

В выражении (4.5)  $G_k^*(\omega)$  – комплексно-сопряженная спектральная плотность функции отсчетов  $\varphi_k(t)$ , которая является запаздывающей то

отношению к функции  $\varphi(t)$  на время  $\frac{k\pi}{\omega_B}$ ;  $\dot{G}_n(\omega)$  – спектральная плотность для  $\varphi_n(t)$ . Спектральные плотности можно представить на основании теоремы запаздывания в виде:

$$G_k^*(\omega) = a e^{j \frac{k\pi}{\omega_B} \omega}; \quad \dot{G}_n(\omega) = a e^{-j \frac{k\pi}{\omega_B} \omega}. \quad (4.6)$$

Подставив формулы (17.6) в правую часть выражения (4.5), получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{+\omega_B} a e^{j \frac{k\pi}{\omega_B} \omega} a e^{-j \frac{k\pi}{\omega_B} \omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi^2}{\omega_B^2} \frac{e^{j(k\pi-n\pi)} - e^{-j(k\pi-n\pi)}}{j \frac{\pi}{\omega_B} (k-n)} = 0,$$

что доказывает ортогональность функций  $\varphi_k(t)$  и  $\varphi_n(t)$  при  $k \neq n$ .

Учитывая, что произвольная функция  $u(t)$  с ограниченным спектром, как известно, может быть разложена в ряд по ортогональным функциям, в частности по функциям отсчетов, записываем

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_k \varphi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_k \frac{\sin(\omega_B t - k\pi)}{(\omega_B t - k\pi)}. \quad (4.7)$$

Коэффициенты разложения  $b_k$  можно определить следующим образом.

Если  $t$  получает значения  $\frac{n\pi}{\omega_B}$ , то

$$u(t) = u\left(\frac{n\pi}{\omega_B}\right) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_k \frac{\sin(n\pi - k\pi)}{(n\pi - k\pi)}.$$

При  $k \neq n$   $\frac{\sin(n\pi - k\pi)}{(n\pi - k\pi)} = 0$ , а при  $k = n$  это выражение равно единице.

Следовательно,  $u\left(\frac{n\pi}{\omega_B}\right) = b_n$  или  $u\left(\frac{k\pi}{\omega_B}\right) = b_k$  и ряд (4.7) принимает вид

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} u\left(\frac{k\pi}{\omega_B}\right) \frac{\sin(\omega_B t - k\pi)}{(\omega_B t - k\pi)}. \quad (4.8)$$

Выражение (4.8) получило название ряда Котельникова.

Коэффициенты  $b_k = u\left(\frac{k\pi}{\omega_B}\right) = u(k\Delta t)$ , так как по условиям теоремы

$\Delta t = \frac{1}{2F_B}$ . Следовательно, коэффициенты  $b_k$  соответствуют значениям функции  $u(t)$  в моменты  $k\Delta t$ . В частности,  $b_0 = u(0)$ ,  $b_1 = u(\Delta t)$  и т.д. (см. рис. 4.4).

Таким образом, функция с ограниченным спектром полностью определяется своими значениями в дискретные моменты времени на основании ряда Котельникова (4.8).

Импульс вида  $u(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t)$  имеет площадь

$$S_u = \int_{-\infty}^{+\infty} u(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t)dt = u(k\Delta t),$$

т.е. равную значению функции в момент  $k\Delta t$ .

При передаче импульсов вида

$$u_\Sigma = \sum_{-\infty}^{+\infty} u(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t), \quad (4.9)$$

чтобы получить на выходе приемника непрерывную функцию, необходимо пропустить эти импульсы через фильтр нижних частот (ФНЧ) с полосой пропускания  $\omega_B$ , который обладает равномерной амплитудно-частотной и линейной фазочастотной характеристиками в диапазоне частот от 0 до  $\omega_B$ . В результате воздействия одного из импульсов на выходе фильтра появится напряжение, имеющее форму  $\frac{\sin x}{x}$ , т.е. функции отсчета. Сумма таких функций, сдвинутых на время  $\Delta t$  друг относительно друга, дает согласно формуле (4.8) напряжение, совпадающее по форме с передаваемой непрерывной функцией  $u(t)$ .

Реальные сигналы имеют конечную длительность  $T$ . Таким сигналам соответствует бесконечный спектр. Однако спектр любого сигнала

ограничивается конечной полосой пропускания устройств, по которым передается сигнал. Число передаваемых отсчетов  $N$  будет ограничено и определится длительностью сигнала  $T$  и наивысшей частотой спектра  $f_B$ :

$$N = \frac{T}{\Delta t} = T 2 f_B.$$

При этом выражение (4.8) принимает следующий вид (при отсчете времени от первой выборки):

$$u(t) = \sum_{k=0}^{N=2Tf_B} u(k\Delta t) \frac{\sin(\omega_B t - k\pi)}{\omega_B t - k\pi}. \quad (4.10)$$

Число  $N$  называют базой сигнала.

От числа  $N$  зависит количество информации, содержащейся в данном сигнале. Ширина спектра  $f_B$  определяется в конечном итоге длительностью наиболее мелкой детали сигнала  $t_{\min}$ . Можно считать, что  $f_B = \frac{1}{t_{\min}}$ , т.е.  $T = t_{\min}$  и  $t_{\min} = 2\Delta t$ . Следовательно, интервал отсчета  $\Delta t$  должен составлять половину длительности наиболее кратковременной характерной части сигнала. Для того чтобы с большей подробностью воспроизвести сигнал, необходимо передать по каналу связи большее количество информации.

В рассмотренном выше способе восстановления непрерывного сигнала ФНЧ не может быть идеальным (такой фильтр, как будет показано в дальнейшем, физически неосуществим), в результате чего получаемый на выходе фильтра сигнал несколько отличается от передаваемого, т.е. функция  $u(t)$  будет восстановлена приближенно.

Все сказанное несколько не умаляет значения теоремы Котельникова, которая является основой теории и практики, импульсной связи, так как она показывает, при каких условиях передача непрерывной функции может быть сведена к передаче отдельных импульсов, частота следования которых (так называемая тактовая частота) определяется по формуле

$$f_c = \frac{1}{\Delta t} = 2f_b. \quad (4.11)$$

Если, например, для телефонной передачи хорошего качества требуется значение (наивысшей частоты спектра  $f_b$  не менее 4 кГц, то тактовая частота  $f_c$  на основании формулы (4.11) составит 8 кГц.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии рассмотрены основные виды преобразований, применяемых к управляющим сигналам различной формы, в целях анализа прохождения этих сигналов через различные электрические цепи.

Спектральный анализ, в основе которого лежит представление сигнала в виде конечной или бесконечной суммы гармонических составляющих равных частот (спектра), применяется для анализа прохождения сигналов через линейную цепь.

Рассмотрены основные виды низкочастотных и высокочастотных импульсов, используемые в сложной электронике, к которой относятся и многие виды медицинского оборудования.

После изучения изложенного материала у обучающегося должно сформироваться представление о различных видах сигналов и методах их анализа, основах теории линейных и нелинейных преобразований.

Комплексный метод расчета, моделирования и анализа электрических сигналов может быть применен в задачах проектирования медицинских приборов и аппаратов.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Марченко, А. Л. Основы преобразования информационных сигналов : учебное пособие / А. Л. Марченко, Е. А. Марченко. – М. : Горячая линия–Телеком, 2008. – 280 с.
2. Немцов, М. В. Электротехника и электроника : учебник для вузов / М. В. Немцов. – М. : Изд-во МЭИ, 2004. – 460 с.
3. Общая электротехника и электроника. Компьютерные технологии практических занятий / под ред. А. В. Кравцова. – М. : МГАУ им. В. П. Горячкина, 2001. – 96 с.
4. Опадчий, Ю. Ф. Аналоговая и цифровая электроника (Полный курс) : учебник для вузов / Ю. Ф. Опадчий, О. П. Глудкин, А. И. Гуров ; под ред. О. П. Глудкина. – М. : Горячая линия–Телеком, 2007. – 768 с.
5. Хернитер, М. Е. Multisim 7. Современная система компьютерного моделирования и анализа схем электронных устройств / М. Е. Хернитер. – М. : ДМКпресс, 2006. – 488 с.
6. Электротехника и электроника : учебник для вузов. Книга 3. Электрические измерения и основы электроники / под ред. проф. В. Г. Герасимова. – М. : Энергоатомиздат, 1998. – 432 с.
7. Миловзоров, О. В. Электроника / О. В. Миловзоров, И. Г. Панков. – М. : Высшая школа, 2006. – 288 с.
8. Лабораторные работы по основам промышленной электроники : учебное пособие / под ред. В. Г. Герасимова. – М. : Высшая школа, 1989. – 175 с.

Учебное электронное мультимедийное издание

ВЕТРОВ Александр Николаевич  
СУКОНКИН Илья Александрович  
КУЛИКОВ Андрей Юрьевич

# АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМАХ МЕДИЦИНСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Учебное пособие

Редактирование И. В. Калистратовой  
Дизайн, структура, навигация В. Е. Красильникова  
Обложка, упаковка, тиражирование Т. Ю. Зотовой

ISBN 978-5-8265-2965-2



Подписано к использованию 10.10.2025.  
Тираж 50 шт. Заказ № 104

Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»  
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106/5,  
помещение 2, к. 14  
Тел. 8(4752) 63-81-08.  
E-mail: izdatelstvo@tstu.ru