Т. В. ЖУКОВСКАЯ, Е. А. МОЛОКАНОВА, А. И. УРУСОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И РЯДЫ

Учебное электронное издание
комплексного распространения

Тамбов
Издательство ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2016

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Тамбовский государственный технический университет»

Т. В. ЖУКОВСКАЯ, Е. А. МОЛОКАНОВА, А. И. УРУСОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И РЯДЫ

*Утверждено Учёным советом университета
в качестве учебного пособия для студентов 1 курса
инженерных и экономических направлений высшего
профессионального образования*

Учебное электронное издание
комплексного распространения

Тамбов
Издательство ФГБОУ ВО ТГТУ
2016

УДК 51(075.8)
ББК 221я73
Ж86

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой функционального анализа
ФГБОУ ВПО «ТГУ им. Г. Р. Державина»
В. Ф. Молчанов

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры «Техническая механика и детали машин»
ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»
В. И. Фомин

Жуковская, Т. В.

Ж86 Высшая математика. Интегральное исчисление и ряды [Электронный ресурс] : учебное пособие / Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова, А. И. Урусов. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2016. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Системные требования : ПК не ниже класса Pentium II ; CD-ROM-дисковод; 00,0 Mb RAM ; Windows 95/98/XP ; мышь. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-8265-1585-3

Изложены основные понятия и теоремы интегрального исчисления функций одной переменной. Приведены необходимые сведения из теории числовых и функциональных рядов. Основные понятия и методы сопровождаются примерами, поясняющими эти понятия и методы. По каждой теме приведены задачи, решая которые, студент сможет более детально разобраться и лучше усвоить изучаемую тему.

Предназначено для студентов 1 курса инженерных и экономических направлений высшего профессионального образования.

УДК 51(075.8)
ББК 221я73

ISBN 978-5-8265-1585-3

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Высшая математика. Интегральное исчисление и ряды» предназначено для изучения дисциплины «Высшая математика» студентами первого курса инженерных и экономических направлений высших технических учебных заведений. В данном пособии 1 – 3 главы посвящены изучению интегрального исчисления функций одной действительной переменной (неопределённый интеграл; определенный интеграл; приложения определенного интеграла). Четвертая глава – числовые и функциональные ряды.

Книга адресована студенту, впервые изучающему указанные темы математического анализа. Материал изложен доступно и просто, в небольшом объеме, но полно и логически связно, в рамках разумной математической строгости, соответствует разделам учебных программ инженерных и экономических направлений подготовки бакалавров.

Основное внимание в пособии уделено приложению теоретического курса к решению задач, оно фактически может служить руководством для решения задач. Каждый параграф сопровождается серией разобранных примеров с подробными комментариями к решениям, позволяющих студентам усвоить основные методы интегрального исчисления и исследования рядов, самостоятельно изучать и закреплять материал. В пособии представлены примеры разных типов: тестовые задания, соответствующие педагогическим измерительным материалам по дисциплине «Высшая математика» банка тестовых заданий университета, и примеры, предусматривающие полное оформление и решение. Завершается каждая глава пунктом, содержащим практические упражнения для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для активного использования студентами на лекциях и практических занятиях; самостоятельного выполнения домашнего задания; грамотного оформления решения и правильного обоснования; подготовки, как к текущим традиционным контрольным работам, так и контрольным точкам в форме компьютерного тестирования; подготовки к предстоящим зачёту и экзамену.

1. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ, ЕГО СВОЙСТВА

Определение 1.1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функцией для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если $F'(x)=f(x)$ во всех точках этого интервала.

Можно также говорить, что $F(x)$ − *первообразная* функции $f(x)$. Из определения следует: если $F(x)$ − *первообразная* функции $f(x)$ на интервале (a,b), то $F(x)+C$, где C − некоторая константа, тоже является первообразной для функции $f(x)$ на этом же интервале.

***Теорема* 1.1.** Если $F(x)$ − *первообразная* функции $f(x)$ на интервале (a, b), то множество всех первообразных функции $f(x)$ на этом интервале имеет вид $F(x)+C$, где C − произвольная константа.

Определение 1.2. Совокупность всех первообразных функций для функции $f(x)$ на некотором интервале называется н*еопределённым интегралом* от функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x)+C \ . \tag{1.1}$$

Знак $\int$ называется знаком интеграла, выражение $f(x)dx$ − подынтегральным выражением, а функция $f(x)$ − подынтегральной функцией.

Рассмотрим свойства неопределённого интеграла. Будем предполагать, что первообразные для всех рассматриваемых функций существуют.

Свойство 1. Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

Свойство 2. Интеграл от производной некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int f'(x)dx = f(x)+C \ .$$

Свойство 3. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right)= f(x)dx \ ;$$

Свойство 4. Интеграл от дифференциала функции равен функции, стоящей под знаком дифференциала, плюс произвольная постоянная:

$$\int df(x) = f(x) + C .$$

Свойство 5 (*аддитивность*). Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме неопределённых интегралов от каждого слагаемого:

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx .$$

Свойство 6 (*однородность*). Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\ ,\ \ a = \mathrm{const} .$$

Свойства 1 − 4 следуют непосредственно из равенства (1.1) и понятия дифференциала, свойства 5 и 6 проверяются дифференцированием.

Замечание 1. Свойство 5 распространяется на сумму любого конечного числа слагаемых.

Замечание 2. Когда находим интеграл от алгебраической суммы функций имеет смысл находить первообразные каждого слагаемого и только потом прибавлять произвольную постоянную к полученному выражению. Действительно, по определению 1.2

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C_1\ ,\quad \int g(x)\,dx = G(x) + C_2\ ,$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = F(x) \pm G(x) + C_3\ ,$$

где C_1, C_2, C_3 − произвольные постоянные. Тогда по свойству 5 получаем

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx =$$
$$= \left(F(x) + C_1\right) \pm \left(G(x) + C_2\right) = (F(x) \pm G(x)) + (C_1 \pm C_2) = F(x) \pm G(x) + C_3 .$$

***Теорема* 1.2** (*существование неопределённого интеграла*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на некотором интервале, тогда на этом интервале существует первообразная для функции $f(x)$, а, следовательно, и неопределённый интеграл $\int f(x)dx$.

1.2. ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

Из определения неопределённого интеграла следует, что знание производной от какой-либо функции позволяет найти интеграл от этой производной. Поэтому из таблицы производных получаем следующие интегралы:

$$C' = 0, \quad C = \text{const} \ \Rightarrow \ \int 0\, dx = C\,;$$

$$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^{\alpha}\,, \ \alpha \neq -1 \ \Rightarrow \ \int x^{\alpha}\, dx = x^{\alpha+1}/(\alpha+1) + C\,;$$

$$(\ln x)' = 1/x \ \text{ и } \ (\ln(-x))' = -1/(-x) = 1/x \ \Rightarrow \ \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Продолжая таким же образом и далее, получим большую часть интегралов таблицы, приведённой ниже (строки 1 − 9).

Таблица интегралов (C − произвольная постоянная, $a, b, \alpha = \text{const}$, $a > 0$).

1. $\int x^{\alpha}\, dx = x^{\alpha+1}/(\alpha+1) + C,\ \alpha \neq -1$.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4. $\int e^{x}\, dx = e^{x} + C$.

5. $\int a^{x}\, dx = a^{x}/\ln a + C,\ a \neq 1$.

6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

7. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

10. $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C_1$.

11. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \frac{|x-a|}{|x+a|} + C$.

12. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin(x/a) + C = -\arccos(x/a) + C_1$.

13. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + b}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + b}| + C$.

Для интегралов 10 − 13 доказательство справедливости этих формул можно провести на основании определения неопределённого интеграла, т.е. путем дифференцирования правой части. Например,

$$\left(\ln|x+\sqrt{x^2+b}|\right)' = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+b}\right)'}{x+\sqrt{x^2+b}} = \frac{\left(1+x/\sqrt{x^2+b}\right)\sqrt{x^2+b}}{\left(x+\sqrt{x^2+b}\right)\sqrt{x^2+b}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+b}+x\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+b}\right)\sqrt{x^2+b}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+b}}.$$

Приведём примеры применения свойств интегралов и таблицы для нахождения неопределённых интегралов. В скобках между двумя знаками «=» будем приводить вспомогательные выкладки и (или) пояснения.

Пример 1.1 (*интегрирование многочленов*).

$$\int\left(3x^4-7x+2\right)dx = (\text{по свойствам 5 и 6}) = 3\int x^4\,dx - 7\int x\,dx + 2\int x^0\,dx =$$

$$(\text{теперь используем таблицу интегралов}) = 3\frac{x^5}{5} - 7\frac{x^2}{2} + 2x + C\,.$$

Пример 1.2 (*интегрирование суммы степенных функций*).

$$\int\frac{\sqrt{2x}-8\sqrt[3]{x^4}+3}{x}dx = \int\left(\sqrt{2}x^{-1/2}-8x^{1/3}+3x^{-1}\right)dx = (\text{ по свойствам 5 и 6}) =$$

$$= \sqrt{2}\int x^{-1/2}\,dx - 8\int x^{1/3}\,dx + 3\int x^{-1}\,dx = \sqrt{2}\frac{x^{1/2}}{1/2} - 8\frac{x^{4/3}}{4/3} + 3\ln|x| + C\,.$$

Пример 1.3.

$$\int\frac{4x-3x^5 2^{3x-1}}{8x^5}dx = \frac{1}{2}\int x^{-4}\,dx - \frac{3}{8}\int 2^{3x-1}\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^{-3}}{-3} - \frac{3}{8}\frac{1}{2}\int\left(2^3\right)^x dx =$$

$$= -\frac{1}{6x^3} - \frac{3}{16}\frac{8^x}{\ln 8} + C\,.$$

1.3. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

При нахождении интеграла часто помогают две формулы (справедливость которых очевидна): *формула изменения функции, стоящей под знаком дифференциала*:

$$d[f(x)] = \frac{1}{k}d[f(x)k+m], \quad k,m=\text{const}\,; \tag{1.2}$$

и *формула подведения под знак дифференциала*:

$$\int f(x)g(x)dx = \left(\int f(x)dx = F(x)\right) = \int g(x)d(F(x)). \tag{1.3}$$

Пример 1.4.

$$\int\sqrt[7]{3x+4}dx = (\text{по формуле (1.2)}) = \frac{1}{3}\int(3x+4)^{1/7}d(x\cdot 3+4) =$$

$$= (\text{обозначим } t=3x+4) = \frac{1}{3}\int t^{1/7}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{8/7}}{8/7}+C = \frac{7}{24}\sqrt[7]{(3x+6)^8}+C\,.$$

Пример 1.5.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3-8x}} = -\frac{1}{8}\int\frac{d(x\cdot(-8)+3)}{\sqrt{3-8x}} = (\,t=3-8x\,) =$$

$$= -\frac{1}{8}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{2\sqrt{t}}{8}+C = -\frac{\sqrt{3-8x}}{4}+C\,.$$

Пример 1.6.

$$\int\cos x\sqrt[7]{(6\sin x+1)^2}\,dx = \left(\int\cos x dx=\sin x\right) = (\text{по формуле (1.3)}) =$$

$$= \int(6\sin x+1)^{2/7}d\sin x = (\text{по формуле (1.2)}) = \frac{1}{6}\int(6\sin x+1)^{2/7}d(\sin x\cdot 6+1) =$$

$$= (\,t=6\sin x+1\,) =$$

$$= \frac{1}{6}\int t^{2/7}\,dt = \frac{1}{6}\frac{t^{9/7}}{9/7}+C = \frac{1}{6}\frac{(6\sin x+1)^{9/7}}{9/7}+C\,.$$

Пример 1.7.

$$\int\frac{x^2}{\sqrt[4]{(7x^3-4)^7}}dx = \int x^2(7x^3-4)^{-7/4}dx = \left(\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\right) =$$

$$= (\text{применяем формулу (1.3), а затем формулу (1.2)}) =$$

$$= \frac{1}{21}\int(7x^3-4)^{-7/4}d(\frac{x^3}{3}21-4) = \left(t=7x^3-4\right) = \frac{1}{21}\int t^{-7/4}dt = \frac{1}{21}\frac{t^{-3/4}}{-3/4}+C =$$

$$= -\frac{4}{63}(7x^3-4)^{-3/4}+C\,.$$

Вместо подведения под знак дифференциала можно применять метод *замены переменной*, который также называют *методом подстановки*.

Теорема **1.3** (*метод подстановки*). Пусть функция $x=u(t)$ непрерывно дифференцируема в некоторой области и имеет непрерывно дифференцируемую обратную функцию $t=u^{-1}(x)$. Тогда

$$\int f(x)dx = \int f(u(t))u'(t)dt\Big|_{t=u^{-1}(x)}\,.$$

При использовании метода подстановки в общем случае, как следует из теоремы, рекомендуется применять следующую форму записи:

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = u(t) & dx = u'(t)dt \\ t = u^{-1}(x) & \end{vmatrix} = \int u(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=u^{-1}(x)},$$

но иногда достаточно указать функцию $t = u^{-1}(x)$ и её дифференциал.

Пример 1.8.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \begin{vmatrix} x = t^2 & dx = 2tdt \\ t = \sqrt{x} & \end{vmatrix} = \int \frac{2tdt}{t+1} = 2\int \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = 2\int\left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t+1} = 2t - 2\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + C.$$

Используя замену переменной, задачу примера 1.6 можно решить так:

Пример 1.6 (продолжение).

1) $\int \cos x \sqrt[7]{(6\sin x + 1)^2}dx =$

$$= \begin{vmatrix} t = 6\sin x + 1 & \cos x = \sqrt{1 - \left(\dfrac{t-1}{6}\right)^2} = \dfrac{1}{6}\sqrt{36 - (t-1)^2} \\ x = \arcsin\left(\dfrac{t-1}{6}\right) & dx = \dfrac{dt}{\sqrt{36-(t-1)^2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{1}{6}\sqrt{36-(t-1)^2}\,(t)^{2/7}\frac{dt}{\sqrt{36-(t-1)^2}} = \frac{1}{6}\int t^{2/7}dt = \frac{1}{6}\frac{t^{9/7}}{9/7} + C =$$

$$= \frac{(6\sin x+1)^{9/7}}{6\cdot 9/7} + C.$$

2) $\int \cos x \sqrt[7]{(6\sin x+1)^2}dx = \begin{vmatrix} t = 6\sin x + 1 \\ dt = 6\cos x dx \end{vmatrix} = \int \frac{1}{6}t^{2/7}dt = \frac{1}{6}\int t^{2/7}dt = \frac{1}{6}\frac{t^{9/7}}{9/7} =$

$$= \frac{1}{6}\frac{(6\sin x+1)^{9/7}}{9/7} + C.$$

***Теорема* 1.4** (*метод интегрирования по частям*). Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на некотором интервале и существуют интегралы $\int u(x)dv(x)$ и $\int v(x)du(x)$. Тогда справедливо равенство

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x). \tag{1.4}$$

Метод интегрирования по частям (1.4) − ещё один важный метод интегрирования, который продемонстрируем на следующем примере.

Пример 1.9.

$$\int xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C \,.$$

Отметим, что по заданному дифференциалу dv функция v определяется неоднозначно ($v = \int dv$), поэтому следует выбирать в качестве v наиболее простую формулу.

Интегрирование по частям применяется для следующих, часто встречающихся случаев ($P_n(x)$ − многочлен степени n):

1) $\int P_n(x)\sin kx\,dx$, $\int P_n(x)\cos kx\,dx$, $\int P_n(x)e^{kx}dx$ – здесь через u следует обозначить $P_n(x)$ (пример 1.9);

2) $\int P_n(x)\arcsin kx\,dx$, $\int P_n(x)\arccos kx\,dx$, $\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\,kx\,dx$, $\int P_n(x)\ln kx\,dx$, $\int P_n(x)\,\mathrm{arcctg}\,kx\,dx$ – в этих случаях через dv следует обозначить $P_n(x)dx$.

Рассмотрим интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ в знаменателе дроби. В этом случае применяется метод замены переменной с предварительным выделением в квадратном трёхчлене полного квадрата (пример 1.10).

Пример 1.10.

$$\int \frac{x+6}{x^2+8x+15}dx = \int \frac{x+6}{(x+4)^2-1}dx = \begin{vmatrix} t = x+4 \\ x = t-4 \\ dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{t+2}{t^2-1}dt =$$

$$= \int t\frac{1}{t^2-1}dt + 2\int \frac{1}{t^2-1}dt = \left(\int tdt = \frac{t^2}{2} \right) = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2-1)}{t^2-1} + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2-1\right| + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+8x+15\right| + \ln\left|\frac{x+3}{x+5}\right| + C \,.$$

Примечание. Рекомендуем запомнить алгоритм интегрирования выражений вида $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ и $\dfrac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$:

1) в квадратном трёхчлене $ax^2 + bx + c$ выделяем полный квадрат: $a(x + b/(2a))^2 + (c - b^2/(4a))$;

2) делаем замену переменной $t = x + b/(2a)$;

3) полученную дробь упрощаем и представляем в виде суммы двух слагаемых ($e = c - b^2/(4a)$, $D = B - Ab/(2a)$):

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} = \frac{At}{at^2+e} + \frac{D}{at^2+e} \text{ или } \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{At}{\sqrt{at^2+e}} + \frac{D}{\sqrt{at^2+e}};$$

4) выполняем интегрирование каждого слагаемого.

В следующем примере применяем метод интегрирования выражений вида

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени $n, n \geq 1$. Можно показать, что интеграл от этой дроби представим в виде суммы двух слагаемых:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (1.5)$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен с неопределёнными коэффициентами степени $n-1$. Чтобы найти коэффициенты этого многочлена, а также постоянную α, надо:

1) продифференцировать обе части равенства (1.5);

2) умножить обе части на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получив равенство двух многочленов;

3) приравнять коэффициенты при одинаковых степенях переменной x;

4) решить полученную систему линейных уравнений.

Пример 1.11.

$$\int \frac{2x^2-7x+18}{\sqrt{x^2-4x+20}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2-4x+20} + \alpha\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+20}}.$$

Сначала находим A, B, α. Для этого дифференцируем левую и правую части равенства:

$$\frac{2x^2-7x+18}{\sqrt{x^2-4x+20}} = A\sqrt{x^2-4x+20} + (Ax+B)\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+20}} + \frac{\alpha}{\sqrt{x^2-4x+20}}.$$

Умножив обе части полученного равенства на $\sqrt{x^2-4x+20}$, имеем:

$$2x^2-7x+18 = A(x^2-4x+20) + (Ax+B)(x-2) + \alpha.$$

Приравниваем коэффициенты при x^2, x^1, x^0:

$x^2: \quad 2 = A + A \Rightarrow A = 1,$

$x^1: \quad -7 = -4A - 2A + B = -6 + B \Rightarrow B = -1,$

$x^0: \quad 18 = 20A - 2B + \alpha = 22 + \alpha \Rightarrow \alpha = -4 .$

Следовательно,

$$\int \frac{2x^2 - 7x + 18}{\sqrt{x^2 - 4x + 20}} dx = (x-1)\sqrt{x^2 - 4x + 20} - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 20}} =$$

$$= (x-1)\sqrt{x^2 - 4x + 20} - 4\int \frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2 + 16}} =$$

$$= (x-1)\sqrt{x^2 - 4x + 20} - 4\ln\left|x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 20}\right| + C .$$

Теперь можно показать применение интегрирования по частям на более сложном примере, по сравнению с примером 1.9.

Пример 1.12.

$$\int (10x - 4)\arccos x\, dx = \left| \begin{matrix} u = \arccos x & du = \dfrac{-dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\ dv = (10x - 4)dx & v = 5x^2 - 4x \end{matrix} \right| =$$

$$= (5x^2 - 4x)\arccos x + \int \frac{5x^2 - 4x}{\sqrt{1 - x^2}} dx .$$

Получившийся интеграл находим так же, как в примере 1.11:

$$\int \frac{5x^2 - 4x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = (Ax + B)\sqrt{1 - x^2} + \alpha\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx .$$

Дифференцируем обе части этого равенства:

$$\frac{5x^2 - 4x}{\sqrt{1 - x^2}} = A\sqrt{1 - x^2} + (Ax + B)\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{1 - x^2}} ,$$

умножаем обе части на $\sqrt{1 - x^2}$:

$$5x^2 - 4x = A(1 - x^2) - x(Ax + B) + \alpha .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, находим значения неизвестных величин A, B, α :

$$x^2: \quad 5 = -A - A \Rightarrow A = -2{,}5,$$

$$x^1: \quad -4 = -B \Rightarrow B = 4,$$

$$x^0: \quad 0 = A + \alpha = -2{,}5 + \alpha \Rightarrow \alpha = 2{,}5.$$

Подставляем значения коэффициентов и завершаем решение задачи:

$$\int (10x - 4)\arccos x\,dx =$$

$$(5x^2 - 4x)\arccos x + (-\frac{5}{2}x + 4)\sqrt{1-x^2} + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= (5x^2 - 4x - \frac{5}{2})\arccos x + (-\frac{5}{2}x + 4)\sqrt{1-x^2} + C.$$

1.4. РАЗЛОЖЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДРОБИ

Определение 1.3. Дробь $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, числитель и знаменатель которой являются многочленами, называется *рациональной дробью*. Если степень числителя n меньше степени знаменателя m, $n < m$, то рациональная дробь $R(x)$ называется *правильной*, а в противном случае (при выполнении неравенства $n \geq m$) – *неправильной*.

Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Это можно сделать, например, используя деление многочлена на многочлен «уголком». Отсюда следует, что для интегрирования любой рациональной дроби надо уметь интегрировать многочлены и правильные рациональные дроби.

Дроби вида $\dfrac{A}{(x-a)^\alpha}$ и $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta}$, где a, p, q, A, M, N − вещественные числа, α, β − натуральные числа, $p^2 - 4q < 0$ (уравнение $x^2 + px + q = 0$ не имеет вещественных корней), называются *элементарными рациональными дробями*.

***Теорема* 1.5** (*о разложении правильной рациональной дроби*). Всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы элементарных рациональных дробей.

Знаменатель правильной рациональной дроби $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – многочлен степени m, разлагается на линейные и квадратичные множители:

$$Q_m(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdots (x-a_s)^{k_s} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\alpha_1} \cdots (x^2 + p_r x + q_r)^{\alpha_r} . \qquad (1.6)$$

В разложении (1.6) все множители различны, а показатели линейных и квадратичных множителей – натуральные числа, все квадратичные множители не имеют вещественных корней. Вид элементарных рациональных дробей, в сумму которых разлагается рациональная дробь $R(x)$, определяется видом множителя разложения (1.6). Так, каждому множителю вида $(x-a)^k$ соответствует *k* дробей в разложении $R(x)$:

$$\frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{x-a} . \qquad (1.7)$$

Каждому множителю вида $(x^2 + px + q)^{\alpha}$ соответствует α дробей:

$$\frac{M_{\alpha} x + N_{\alpha}}{(x^2 + px + q)^{\alpha}} + \frac{M_{\alpha-1} x + N_{\alpha-1}}{(x^2 + px + q)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} . \qquad (1.8)$$

Пример 1.13. Представить правильную рациональную дробь

$$\frac{2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4}{x^5 + x^4 - x - 1}$$

в виде суммы элементарных дробей.

Решение. Разложим знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители:

$$x^5 + x^4 - x - 1 = x^4\left(1 + x\right) - \left(x + 1\right) = (x+1)(x^4 - 1) = (x+1)(x^2+1)(x^2-1) .$$

Дискриминант многочлена $x^2 - 1$ положителен, поэтому преобразования надо продолжить:

$$x^5 + x^4 - x - 1 = (x+1)^2 (x-1)(x^2+1) .$$

Учитывая вид элементарных дробей (1.7) и (1.8), составляем равенство

$$\frac{2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4}{(x+1)^2 (x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx + E}{x^2+1} .$$

Коэффициенты *A*, *B*, *C*, *D* и *E* найдем *методом неопределённых коэффициентов*. Для этого умножим обе части последнего равенства на выражение $(x+1)^2 (x-1)(x^2+1)$, получим

$$2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = A(x-1)(x^2+1) +$$
$$+ B(x+1)(x-1)(x^2+1) + C(x+1)^2(x^2+1) + (Dx+E)(x+1)^2(x-1) . \qquad (1.9)$$

Равенство (1.9) выполняется при любых значениях переменной x. Подставим такие значения, чтобы множители $x-1$ и $x+1$ обратились в ноль:

$$x=1: \quad 2+2-4+4+4=C(1+1)^2\left(1^2+1\right) \Rightarrow C=1,$$

$$x=-1: \quad 2-2-4-4+4=A(-1-1)((-1)^2+1) \Rightarrow A=1.$$

Раскроем частично скобки в правой части равенства (1.9):

$$2x^4+2x^3-4x^2+4x+4=A(x^3-x^2+x-1)+B(x^4-1)+$$
$$+C(x^4+2x^3+2x^2+2x+1)+(Dx+E)(x^3+x^2-x-1).$$

Остальные коэффициенты найдём, учитывая тот факт, что многочлены равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной. Приравняем коэффициенты при степенях x^4, x^3, x^2 :

$x^4: \quad 2=B+C+D,$

$x^3: \quad 2=A+2C+D+E,$

$x^2: \quad -4=-A+2C-D+E.$

Подставляя известные $A=1$ и $C=1$, получим систему трёх уравнений с тремя неизвестными B, D, E :

$$\begin{cases} B+D=1, \\ D+E=-1, \\ -D+E=-5, \end{cases}$$

решив которую, найдём $B=-1, D=2, E=-3$. Итак,

$$\frac{2x^4+2x^3-4x^2+4x+4}{x^5+x^4-x-1}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{2x-3}{x^2+1}.$$

Задача решена.

1.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Рассмотрим алгоритм интегрирования рациональных дробей:

1) определяем, является ли рациональная дробь правильной;

2) если дробь неправильная, то представляем её в виде суммы целой части (т.е. многочлена) и правильной рациональной дроби;

3) знаменатель правильной дроби раскладываем на произведение (1.6) линейных множителей и квадратных трёхчленов, не имеющих вещественных корней;

4) правильную дробь представляем в виде суммы элементарных рациональных дробей, учитывая вид (1.7) и вид (1.8);

5) находим интеграл от каждого слагаемого.

Из вышеизложенного следует, что надо уметь интегрировать элементарные рациональные дроби.

Элементарные рациональные дроби можно разделить на четыре типа, называемые *простейшими рациональными дробями*:

$\dfrac{A}{x-a}$ − простейшая дробь I типа, $a, A \in R$;

$\dfrac{A}{(x-a)^n}$ − простейшая дробь II типа, $a, A \in R, n \in N, n > 1$;

$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ − простейшая дробь III типа, $p, q, A, B \in R,\ p^2 - 4q < 0$;

$\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ − простейшая дробь IV типа,

$p, q, A, B \in R,\ p^2 - 4q < 0,\ n \in N,\ n > 1$.

Интегрирование простейших дробей I и II типов не представляет каких-либо сложностей:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int (x-a)^{-1} d(x-a) = A\ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n} d(x-a) = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Для интегрирования дроби III типа применим приём, описанный в примере 1.10, т.е. выделяем полный квадрат, чтобы узнать, какую замену переменной следует сделать, и используем то, что $q - p^2/4 > 0$:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Ax+B}{(x+p/2)^2 + (q-p^2/4)}dx = \left| \begin{array}{ll} t = x + p/2 & \\ x = t - p/2 & D = B - Ap/2 \\ dx = dt & s = \sqrt{q - p^2/4} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{At+D}{t^2+s^2}dt = \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+s^2)}{t^2+s^2} + D\int \frac{dt}{t^2+s^2} = \frac{A}{2}\ln\left|t^2+s^2\right| + \frac{D}{s}\operatorname{arctg}\frac{t}{s} + C =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{B-Ap/2}{\sqrt{q-p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} + C.$$

Рассмотрим простейшую рациональную дробь IV типа. Сначала, так же, как и в случае дроби III типа, делаем замену переменной ($n>1$):

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \left| \begin{matrix} t=x+p/2 & \\ x=t-p/2 & D=B-Ap/2 \\ dx=dt & s=\sqrt{q-p^2/4} \end{matrix} \right| = \int \frac{At+D}{(t^2+s^2)^n}dt =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+s^2)}{(t^2+s^2)^n} + D\int \frac{dt}{(t^2+s^2)^n} = \frac{A}{2}\frac{(t^2+s^2)^{-n+1}}{-n+1} + D\int \frac{dt}{(t^2+s^2)^n} .$$

Оставшийся интеграл можно взять по рекуррентной формуле. Обозначим $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+s^2)^n}$, тогда (вывод формулы приведён в [5, с. 202])

$$I_n = \frac{2n-3}{2s^2(n-1)}I_{n-1} + \frac{t}{2s^2(n-1)(t^2+s^2)^{n-1}} . \qquad (1.10)$$

Применяя рекуррентную формулу нужное количество раз, придём к интегралу $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+s^2} = \frac{1}{s}\mathrm{arctg}\frac{t}{s}$, тем самым найдём требуемый интеграл.

Пример 1.14. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{-6x^2-36x-38}{(x-1)(x+3)^2}dx$.

Решение. Разложим правильную рациональную дробь (подынтегральную функцию) на сумму простейших дробей и применим метод неопределённых коэффициентов:

$$\frac{-6x^2-36x-38}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{x+3} .$$

Умножаем левую и правую части этого выражения на $(x-1)(x+3)^2$:

$$-6x^2-36x-38 = A(x+3)^2 + B(x-1) + C(x-1)(x+3) .$$

Для того чтобы обратить некоторые множители при коэффициентах в ноль, подставим $x=1$ и $x=-3$ в обе части равенства, а затем приравняем коэффициенты при x^2 :

$$x=1: \quad -6\cdot1-36\cdot1-38=16A \quad \Rightarrow \quad A=-5 ,$$

$$x=-3: \quad -6\cdot9-36\cdot(-3)-38=-4B \quad \Rightarrow \quad B=-4 ,$$

$$x^2: \quad -6=A+C \quad \Rightarrow \quad C=-1 .$$

Учитывая найденные значения коэффициентов в разложении подынтегральной функции, берём интеграл:

$$\int \frac{-6x^2-36x-38}{(x-1)(x+3)^2}dx = \int\left(\frac{-5}{x-1}+\frac{-4}{(x+3)^2}+\frac{-1}{x+3}\right)dx =$$

$$= -5\ln|x-1| + \frac{4}{x+3} - \ln|x+3| + C \ .$$

Пример 1.15. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{4x^2+7x+7}{(x+2)(x^2+2x+3)}dx$.

Решение. Знаменатель подынтегральной функции уже разложен на линейный и квадратичный множители (квадратный трёхчлен x^2+2x+3 не имеет вещественных корней). Поэтому, учитывая вид простейших дробей (1.7) и вид (1.8), имеем:

$$\frac{4x^2+7x+7}{(x+2)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3} \ ,$$

$$4x^2+7x+7 = A(x^2+2x+3)+(Bx+C)(x+2) \ .$$

Подставим $x=-2$ в обе части равенства, приравняем коэффициенты при x^2 , x^0 :

$x=-2:\quad 4\cdot 4+7\cdot(-2)+7=3A \quad\Rightarrow\quad A=3$,

$x^2:\quad 4=A+B \quad\Rightarrow\quad B=1$,

$x^0:\quad 7=3A+2C \quad\Rightarrow\quad C=-1$.

Теперь можем найти интеграл:

$$\int \frac{4x^2+7x+7}{(x+2)(x^2+2x+3)}dx = \int\left(\frac{3}{x+2}+\frac{x-1}{x^2+2x+3}\right)dx =$$

$$3\int\frac{d(x+2)}{x+2} + \int\frac{(x+1)-2}{(x+1)^2+1}dx == 3\ln|x+2| + \frac{1}{2}\int\frac{d((x+1)^2+1)}{(x+1)^2+1} - 2\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} =$$

$$= 3\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln((x+1)^2+1) - 2\operatorname{arctg}(x+1) + C \ .$$

Пример 1.16. Найти неопределённый интеграл $\int\frac{2x^4+2x^3-4x^2+4x+4}{x^5+x^4-x-1}dx$.

Решение. В примере 1.13 найдено разложение подынтегральной функции на сумму простейших дробей, используем его:

$$\int\frac{2x^4+2x^3-4x^2+4x+4}{x^5+x^4-x-1}dx = \int\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{2x-3}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \int (x+1)^{-2} d(x+1) - \int \frac{d(x+1)}{x+1} + + \int \frac{d(x-1)}{x-1} + \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - 3\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{-1}{x+1} - \ln|x+1| + \ln|x-1| + \ln|x^2+1| - 3\,\mathrm{arctg}\,x + C\ .$$

Пример 1.17. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx$.

Решение. В знаменателе подынтегральной функции квадратный трёхчлен, не имеющий вещественных корней, поэтому ее разложение на простейшие дроби имеет вид (1.8)

$$\frac{3x^2+4x+5}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}\ .$$

Находим коэффициенты числителей дробей:

$$3x^2+4x+5 = Ax+B+(Cx+D)(x^2+2x+2)\ ,$$

$x^3:\quad 0 = C,$

$x^2:\quad 3 = 2C + D,$

$x^1:\quad 4 = A + 2C + 2D,$

$x^0:\quad 5 = B + 2D\ .$

Решением системы являются $A=-2, B=-1, C=0, D=3$, следовательно,

$$\int \frac{3x^2+4x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx = \int\left(\frac{-2x-1}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{3}{x^2+2x+2}\right)dx = \begin{vmatrix} t = x+1 \\ x = t-1 \\ dx = dt \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{(-2t+1)dt}{(t^2+1)^2} + 3\int \frac{dt}{t^2+1} = -\int (t^2+1)^{-2} d(t^2+1) + \int (t^2+1)^{-2} dt + 3\,\mathrm{arctg}\,t =$$

$$= (t^2+1)^{-1} + 3\,\mathrm{arctg}\,\mathrm{t} + \int (t^2+1)^{-2} dt\ .$$

Для последнего интеграла применяем формулу (1.10), в которой $n=2, s=1$:

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}I_1 + \frac{t}{2(t^2+1)} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,t =$$

$$= (t^2+1)^{-1} + 3\,\mathrm{arctg}\,t + \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,t + C = \frac{t+2}{2(t^2+1)} + \frac{7}{2}\mathrm{arctg}\,t + C =$$

$$= \frac{x+3}{2(x^2+2x+2)} + \frac{7}{2}\mathrm{arctg}(x+1) + C\ .$$

1.6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Если требуется интегрировать выражения вида $\sin\alpha x\sin\beta x$, $\sin\alpha x\cos\beta x$, $\cos\alpha x\cos\beta x$, где α,β − вещественные числа, $\alpha\neq\beta$, то следует преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму с помощью формул:

$$\sin x\cos y = 0{,}5\big(\sin(x+y)+\sin(x-y)\big),$$
$$\cos x\cos y = 0{,}5\big(\cos(x+y)+\cos(x-y)\big),$$
$$\sin x\sin y = -0{,}5\big(\cos(x+y)-\cos(x-y)\big).$$

Пример 1.18.

$$\int\sin 2x\cos 3x\,dx = 0{,}5\Big(0{,}2\int\sin 5x\,d(5x)-\int\sin x\,dx\Big)=0{,}5\cos x-0{,}1\cos 5x+C.$$

При интегрировании выражений вида $\sin^n x\cos^m x$, где n, m – целые числа, следует различать случаи.

1. Хотя бы одно из чисел n или m – нечётное число, тогда разбиваем нечётную степень на произведение двух сомножителей: сомножитель в чётной степени и в первой степени. Сомножитель в первой степени подводим под знак дифференциала, а сомножитель в чётной степени, используя основное тригонометрическое тождество, преобразуем в сопряжённую функцию ($\sin x$ в $\cos x$ или $\cos x$ в $\sin x$).

2. Если n и m – чётные числа, применяем формулы понижения степени:

$$2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha,\quad 2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha.$$

Пример 1.19.

$$\int\frac{\sin^3(4x-1)}{\cos^8(4x-1)}dx=\left|\begin{matrix} t=4x-1 & \\ x=(t+1)/4 & dx=dt/4\end{matrix}\right|=\frac{1}{4}\int\sin t\frac{\sin^2 t}{\cos^8 t}dt=$$
$$=-\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^8 t}d(\cos t)=\big(z=\cos t\big)=-\frac{1}{4}\int(z^{-8}-z^{-6})dz=\frac{1}{28z^7}-\frac{1}{20z^5}+C=$$
$$=\frac{1}{28\cos^7(4x-1)}-\frac{1}{20\cos^5(4x-1)}+C.$$

Пример 1.20.

$$\int\sin^2(5x+2)\cos^4(5x+2)dx=\frac{1}{5}\int\sin^2(5x+2)\cos^4(5x+2)d(5x+2)=$$
$$=\big(t=5x+2\big)=\frac{1}{5}\int\sin^2 t\cos^4 t\,dt=\frac{1}{5}\int\frac{1-\cos 2t}{2}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2dt=$$
$$=\frac{1}{40}\int(1-\cos^2 2t)(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{40}\int\sin^2 2t(1+\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{1}{80}\int(1-\cos 4t)dt+\frac{1}{80}\int\sin^2 2td(\sin 2t)=\frac{1}{80}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t+\frac{1}{3}\sin^3 2t\right)+C_1=$$

$$=\frac{x}{16}-\frac{1}{320}\sin(20x+8)+\frac{1}{240}\sin^3(10x+4)+C\ .$$

Если подынтегральное выражение является рациональной дробью от $\operatorname{tg} x$ (или от $\operatorname{ctg} x$), то замена переменной вида $t=\operatorname{tg} x$ ($t=\operatorname{ctg} x$) приведёт к интегралу от рациональной дроби аргумента *t*.

Пример 1.21.

$$\int\frac{\operatorname{tg}^2+1}{2\operatorname{tg} x-3}dx=\left|\begin{matrix} t=\operatorname{tg} x & x=\operatorname{arctg} t \\ dx=dt/(1+t^2) & \end{matrix}\right|=\int\frac{t^2+1}{2t-3}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2t-3)}{2t-3}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|2t-3|+C=\frac{1}{2}\ln|2\operatorname{tg} x-3|+C\ .$$

Если требуется найти интеграл от рациональных дробей, аргументами которых являются тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$, то часто применяется универсальная тригонометрическая подстановка $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Пример 1.22.

$$\int\frac{-11\sin x-3\cos x-12}{3\sin x+2\cos x+2}dx=\left|\begin{matrix} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & x=2\operatorname{arctg} t \\ dx=\frac{2dt}{t^2+1} & \end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{-11\frac{2t}{t^2+1}-3\frac{1-t^2}{t^2+1}-12}{3\frac{2t}{t^2+1}+2\frac{1-t^2}{t^2+1}+2}\frac{2dt}{t^2+1}=\int\frac{-9t^2-22t-15}{(6t+4)(t^2+1)}2dt=$$

$$=\int\left(\frac{A}{3t+2}+\frac{Bt+C}{t^2+1}\right)dt\ .$$

Находим A,B,C из равенства

$$-9t^2-22t-15=A(t^2+1)+(Bt+C)(3t+2)\ .$$

$$t=-2/3:\quad -9\cdot 4/9+22\cdot 2/3-15=A\cdot 13/9\quad\Rightarrow\quad A=-3\ ,$$

$$t^2:\quad -9=A+3B\quad\Rightarrow\quad B=-2\ ,$$

$$t^0:\quad -15=A+2C\quad\Rightarrow\quad C=-6\ .$$

Подставляем значения коэффициентов:

$$\int\left(-\frac{3}{3t+2}-\frac{2t+6}{t^2+1}\right)dt=\frac{-3}{3}\int\frac{d(3t+2)}{3t+2}+\frac{-2}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}-6\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=-\ln|3t+2|-\ln\left|t^2+1\right|-6\operatorname{arctg}t+C=-\ln\left|3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\right|-\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right|-3x+C\,.$$

1.7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Рассмотрим некоторые приёмы интегрирования функций, содержащих радикалы. Пусть требуется найти интеграл

$$\int R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx\,,$$

где $R-$ рациональная функция от двух аргументов; m $-$ натуральное число; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ $-$ константы, удовлетворяющие условию $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. В этом случае делаем следующую замену переменной:

$$t=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\,,\quad x=\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m}\,,\quad dx=\frac{m(\alpha\delta-\beta\gamma)\,t^{m-1}}{(\alpha-\gamma t^m)}dt\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx=\int R\left(\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m},\ t\right)\frac{m(\alpha\delta-\beta\gamma)t^{m-1}}{\left(\alpha-\gamma t^m\right)}dt\,,$$

получили интеграл от рациональной дроби.

Если надо найти интеграл $\int R\left(x,\ \sqrt[m]{x^k},\sqrt[n]{x^l}\right)dx$, где m, n $-$ натуральные числа, то находим наименьшее общее кратное чисел m и n, пусть это будет p. Тогда $\frac{p}{m}=m_1$ и $\frac{p}{n}=n_1$ – натуральные числа, следовательно, замена переменной $x=t^p$ позволяет избавиться от иррациональностей:

$$\int R\left(x,\ \sqrt[m]{x^k},\ \sqrt[n]{x^l}\right)dx=\int R(t^p,\ t^{m_1k},\ t^{n_1l})pt^{p-1}dt\,,$$

получили интеграл от рациональной дроби.

Пример 1.23.

$$\int\frac{-10\sqrt[6]{x}-27}{6\sqrt[6]{x^5}\,(\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-27)}dx=\left|\begin{matrix}x=t^6 & t=\sqrt[6]{x}\\ dx=6t^5dt & \end{matrix}\right|=\int\frac{-10t-27}{6t^5(t^2+6t-27)}6t^5dt=$$

$$=\int\frac{-10t-27}{(t+3)^2-36}dt=\left|\begin{matrix}z=t+3 & \\ t=z-3 & dt=dz\end{matrix}\right|=\int\frac{-10z+3}{z^2-36}dz=$$

$$=-5\int\frac{d(z^2-36)}{z^2-36}+3\int\frac{dz}{z^2-6^2}=-5\ln\left|z^2-36\right|+\frac{3}{12}\ln\left|\frac{z-6}{z+6}\right|+C=$$

$$=-5\ln\left|\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-27\right|+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-3}{\sqrt[6]{x}+9}\right|+C.$$

При интегрировании выражений вида $R(x,\sqrt{a^2-x^2})$, $R(x,\sqrt{a^2+x^2})$, $R(x,\sqrt{x^2-a^2})$ применяют тригонометрические подстановки, позволяющие избавиться от радикалов. Для выражений вида $R(x,\sqrt{x^2-a^2})$ делаем замену переменной $x=1/a\sin t$, для выражений $R(x,\sqrt{a^2+x^2})$ осуществляем замену $x=a\,\mathrm{tg}\,t$, и для выражений $R(x,\sqrt{a^2-x^2})$ применяем подстановку $x=a\sin t$.

Пример 1.24.

$$\int\frac{5x^2-4x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\left|\begin{matrix}x=\sin t & t=\arcsin x\\ & dx=\cos t dt\end{matrix}\right|=\int\frac{5\sin^2 t-4\sin t}{\cos t}\cos t dt=$$

$$=\frac{5}{2}\int(1-\cos 2t)dt-4\int\sin t dt=\frac{5}{2}t-\frac{5}{4}\sin 2t+4\cos t+C=$$

$$=\frac{5}{2}\arcsin x-\frac{5}{4}\sin(2\arcsin x)+4\cos(\arcsin x)+C.$$

1.8. УПРАЖНЕНИЯ

1.8.1. Первообразными функции $y=(2x-3)\cos x$ являются …

а) $2\cos x-(2x-3)\sin x+5$; *б*) $2\cos x+(2x-3)\sin x-1$;
в) $-2\cos x+(2x-3)\sin x$; *г*) $2\cos x+(2x-3)\sin x$.

1.8.2. Укажите все верные утверждения (C – произвольная постоянная) …

а) $\left(\int\cos 5x dx\right)'=\cos 5x$; *б*) $\int 2\log_7 x dx=2\int\log_7 x dx$;

в) $\int d\,\mathrm{ctg}\,3x=(\mathrm{ctg}\,3x)'+C$; *г*) $\int x^3e^{2x}dx=\int x^3dx\int e^{2x}dx$.

1.8.3. Найдите неопределённые интегралы, воспользовавшись свойствами интегралов, таблицей, формулами алгебры и тригонометрии:

1) $\int(4x^3-\sqrt{x})dx$; 2) $\int(x^2+\sqrt[3]{x^2})^2dx$;

3) $\int\frac{3x-4x^2}{x^3}dx$; 4) $\int\frac{2\sqrt[4]{x^3}-3x^5}{x^2}dx$;

5) $\int \frac{3x\sin x - 4x^3}{2x}dx$; 6) $\int (2^x + x^2)dx$;

7) $\int \frac{8^x + 3^x x^3}{3^x}dx$; 8) $\int (2\cos x - 3e^x)dx$;

9) $\int (\mathrm{tg}^2 x + \frac{1}{tg^2 x})dx$; 10) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx$.

1.8.4. Найдите неопределённые интегралы по формуле изменения функции, стоящей под знаком дифференциала:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-4x^2}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+4x^2}}$; 3) $\int \frac{dx}{4+4x^2}$; 4) $\int \frac{dx}{4-4x^2}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+3x^2}}$; 6) $\int \frac{dx}{3+2x^2}$; 7) $\int \frac{dx}{4x^2-25}$; 8) $\int (3x-2)^{11}dx$;

9) $\int \frac{dx}{5x+7}$; 10) $\int \frac{dx}{(2x+3)^5}$; 11) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-5x)^4}}$; 12) $\int \sqrt[4]{(7x-2)^3}dx$;

13) $\int \sin(3x-4)dx$; 14) $\int e^{-7x+12}dx$.

1.8.5. Найдите неопределённые интегралы, воспользовавшись приёмом подведения функции под знак дифференциала:

1) $\int \frac{2x-20}{(2x+4)(x-4)}dx$; 2) $\int \frac{x}{\sqrt{8x^2-4}}dx$; 3) $\int x\sin(2x^2+3)dx$;

4) $\int x^2 2^{-x^3}dx$; 5) $\int \frac{-3x+13}{\sqrt{-x^2+4x+12}}dx$; 6) $\int \frac{x^3dx}{x^8-16}$;

7) $\int \cos x\sqrt{9\sin x - 2}dx$; 8) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{2e^x-4}}$; 9) $\int \frac{(5\mathrm{tg}x-3)^7 dx}{\cos^2 x}$;

10) $\int \frac{\ln x dx}{x}$; 11) $\int \frac{dx}{x(2\ln x-5)^3}$; 12) $\int \frac{\sqrt{x^3}+4x^5\ln(9x)dx}{9x^6}$;

13) $\int \mathrm{tg}x\ln(\cos x)dx$; 14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$; 15) $\int \frac{dx}{\sin 2x\ln(3\mathrm{tg}x)}$.

1.8.6. Найдите неопределённые интегралы, воспользовавшись приёмами интегрирования выражений с квадратными трёхчленами:

1) $\int \frac{-2x+7}{-x^2+4x-8}dx$; 2) $\int \frac{x-5}{2x^2+12x+10}dx$; 3) $\int \frac{-6x-4}{-x^2-6x}dx$;

4) $\int \frac{5x+5}{-3x^2+18x-39}dx$; 5) $\int \frac{-2x+2}{\sqrt{x^2-6x+58}}dx$; 6) $\int \frac{-6x-11}{\sqrt{-x^2-6x+7}}dx$;

7) $\int \frac{x-4}{\sqrt{x^2-6x-5}}dx$; 8) $\int \frac{-8x^2+28x-2}{\sqrt{-4x^2+16x}}dx$; 9) $\int \frac{-2x^2-10x-12}{\sqrt{x^2+6x+10}}dx$;

10) $\int \frac{16x^2-92x+78}{\sqrt{-4x^2+32x-48}}dx$; 11) $\int \frac{54x^2-135x+37}{\sqrt{-9x^2+36x-32}}dx$.

1.8.7. Найдите неопределённые интегралы от рациональных дробей:

1) $\int \frac{2x-20}{(2x+4)(x-4)}dx$; 2) $\int \frac{6x+2}{(4x-3)(2x+5)}dx$;

3) $\int \frac{-8x+22}{(2x-7)(2x-4)}dx$; 4) $\int \frac{-14x-2}{(3x+6)(4x-5)}dx$;

5) $\int \frac{-27x^2-63x+18}{(3x-2)(3x+7)}dx$; 6) $\int \frac{6x^3+31x^2-68x-5}{(x+7)(2x-3)}dx$;

7) $\int \frac{-2x^3+7x+21}{(2x-6)(x+1)}dx$; 8) $\int \frac{-7x^2-3x-5}{(x+2)(x-1)^2}dx$;

9) $\int \frac{14x^2+52x+46}{(x-1)(x+3)^2}dx$; 10) $\int \frac{-2x^2-4x+24}{(x-4)(x-2)^2}dx$;

11) $\int \frac{5x+53}{(3x-2)(x^2+2x+17)}dx$; 12) $\int \frac{-10x^2-40x+70}{(3x+3)(x^2-8x+41)}dx$;

13) $\int \frac{4x^2+29x+71}{(x+3)(x^2+8x+25)}dx$; 14) $\int \frac{-12x^3+8x^2-31x+26}{(4x^2-8x+5)^2}dx$.

1.8.8. Найдите неопределённые интегралы от тригонометрических функций:

1) $\int \sin x\cos^4 x dx$; 2) $\int \sin^2 x dx$; 3) $\int \mathrm{tg}^3 x dx$; 4) $\int \sin^2 x\cos^3 x dx$;

5) $\int \sin^4 x\cos^2 x dx$; 6) $\int \mathrm{ctg}^4 x dx$; 7) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$; 8) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$;

9) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$; 10) $\int \frac{dx}{1+\mathrm{ctg}x}$; 11) $\int \frac{\mathrm{ctg}x}{1+\mathrm{tg}^2 x}dx$; 12) $\int \frac{dx}{(\mathrm{tg}x+1)\sin 2x}$.

1.8.9. Найдите неопределённые интегралы, воспользовавшись методом замены переменной:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$; 3) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$;

4) $\int \frac{(\sqrt[4]{x}+1)dx}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}$; 5) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$; 6) $\int \sqrt{\frac{1+x}{x}}\frac{dx}{x^2}$;

7) $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$; 8) $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}dx$; 9) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$;

10) $\int \frac{dx}{6\sin x+8\cos x+10}$; 11) $\int \frac{-\sin x-8\cos x-3}{\sin x-2\cos x-2}dx$;

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1}$; 13) $\int \frac{3dx}{-6\sin x-8\cos x+10}$; 14) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

1.8.10. Найдите неопределённые интегралы, воспользовавшись методом интегрирования по частям:

1) $\int x\cos x dx$; 2) $\int x^2\sin x dx$; 3) $\int (4x-2)\cos 2x dx$; 4) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$;

5) $\int (4-3x)e^{-2x}dx$; 6) $\int (x^2+2)e^{3x}dx$; 7) $\int \sin x e^x dx$; 8) $\int \arcsin x dx$;

9) $\int x^2\ln x dx$; 10) $\int x^2 \mathrm{arctg} x dx$; 11) $\int \mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}dx$; 12) $\int x\ln^2 x dx$.

1.8.11. Найдите неопределённые интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 2) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$; 3) $\int \frac{2\mathrm{ctg}x+1}{(2\sin x+\cos x)^2}dx$;

4) $\int \frac{-x^2-30x+40}{(x+2)(x-2)^2}dx$; 5) $\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2}{x^3}dx$; 6) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

7) $\int \cos(4-x)dx$; 8) $\int \frac{-5\sin x-15\cos x}{3\sin x+\cos x+1}dx$; 9) $\int \mathrm{arctg} dx$;

10) $\int \frac{dx}{\sin^2(5x)}$; 11) $\int x^3\sqrt{x^2-3}dx$; 12) $\int \frac{\sqrt[3]{8x^7}+2x\log_9(6x)dx}{3x^2}$;

13) $\int x2^x dx$; 14) $\int x\ln(3x-1)dx$; 15) $\int \frac{xdx}{x^2+5}$;

16) $\int \frac{-2x^3+15x^2-90x+237}{(x^2-6x+25)^2}dx$; 17) $\int \frac{dx}{(tgx+1)\sin 2x}$;

18) $\int \frac{6x^2+24x+17}{\sqrt{x^2+6x+8}}dx$; 19) $\int \frac{7x+5}{x^2+4x+8}dx$;

20) $\int \frac{18x^3-42x^2-14x+56}{(3x-5)(2x-4)}dx$; 21) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$.

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим задачу о вычислении площади криволинейной трапеции. Возьмём непрерывную функцию $y = f(x)$, определённую на отрезке $[a, b]$, такую что $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

Определение 2.1. *Криволинейной трапецией* называется часть плоскости, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, отрезком $[a,b]$ оси абсцисс (основание трапеции), прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 2.1).

Найдём площадь S криволинейной трапеции. Для этого разобьём отрезок $[a, b]$ на n частичных промежутков точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Тогда криволинейная трапеция разобьётся на n элементарных трапеций с основаниями $[x_{i-1}, x_i]$ (рис. 2.1).

Положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ произвольным образом выберем точку ξ_i. Рассмотрим прямоугольник с основанием $[x_{i-1}, x_i]$ и высотой $f(\xi_i)$. Тогда площадь S_i криволинейной трапеции с основанием $[x_{i-1}, x_i]$ приближённо будет равна площади этого прямоугольника

$$S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Площадь S всей трапеции равна сумме площадей S_i элементарных трапеций

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \tag{2.1}$$

Выражение, стоящее в правой части приближённого равенства, называется *интегральной суммой*.

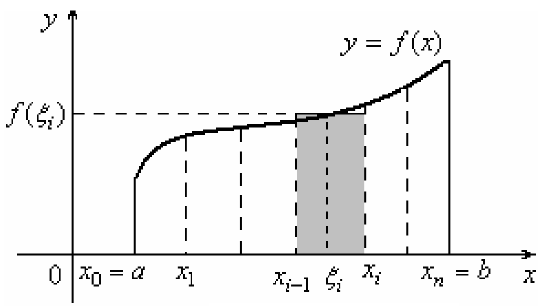

Рис. 2.1

Площадь S криволинейной трапеции найдена приближённо. Приближённое равенство (2.1) тем точнее, чем меньше длины Δx_i. Обозначим

$$\lambda = \max_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i .$$

Тогда точное значение площади получится, если $\lambda \to 0$:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i .$$

Отвлекаясь от геометрической задачи, рассмотрим функцию $y = f(x)$, определённую на отрезке $[a, b]$. Выполним те же шаги, что и в задаче о площади криволинейной трапеции: разобьём отрезок $[a, b]$ на части $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$, выберем произвольным образом точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Определение 2.2. Число $I = \int_a^b f(x)dx$ называется определённым интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся положительное число δ, такое, что если $\lambda < \delta$, то

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon ,$$

независимо от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части и от выбора точек ξ_i.

Будем писать

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i . \tag{2.2}$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Возвращаясь к задаче о площади криволинейной трапеции, можно записать формулу для вычисления площади:

$$S = \int_a^b f(x)dx ,$$

и определить *геометрический смысл определённого интеграла* от непрерывной неотрицательной функции $f(x)$, как площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$.

Определение 2.3. Функция $f(x)$, для которой существует определённый интеграл на отрезке $[a,\ b]$, называется *интегрируемой* на отрезке $[a,\ b]$.

Рассмотрим условия интегрируемости функции:

1) (*необходимое условие интегрируемости*) если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\ b]$, то она ограничена на этом отрезке;

2) (*достаточное условие интегрируемости*) если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она интегрируема на этом отрезке;

3) (*достаточное условие интегрируемости*) если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.

Ограниченность интегрируемой функции следует из того, что за счет выбора точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,\ n}$, интегральную сумму для неограниченной функции можно сделать сколь угодно большой, и тогда предел (2.2) не будет существовать.

2.2. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Будем предполагать, что все рассматриваемые функции интегрируемы на соответствующих отрезках. По определению 2.2 можно показать справедливость следующих свойств.

Свойство 1. Определённый интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy = \dots\ .$$

Свойство 2. Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0\,.$$

Свойство 3 (*ориентированность*). Если пределы интегрирования переставить местами, то определённый интеграл изменит знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,.$$

Свойство 4 (*аддитивность*). Определённый интеграл от суммы функций равен сумме их интегралов:

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\ .$$

Замечание. Свойство 4 распространяется на случай суммы любого конечного числа функций.

Свойство 5 (*однородность*). Постоянный множитель c можно выносить за знак определённого интеграла:

$$\int_a^b c\, f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx\cdot$$

Свойство 6 (*аддитивность по отрезку*). Интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по частям этого отрезка:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\ .$$

Замечание. Свойство 6 справедливо при любом расположении точек a, b и c, то есть точка c может не принадлежать отрезку $[a,\ b]$.

Далее рассмотрим свойства определённых интегралов, связанные с оценкой интегралов.

Свойство 7 (*монотонность*). Неравенство между функциями на отрезке $[a,\ b]$, где $a<b$, можно интегрировать. Например,

$$f(x)\ge g(x)\ \ \forall x\in[a,\ b\,] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx\ .$$

Пример 2.1. Не вычисляя интегралов $\int_0^{\pi}\sin^4 xdx$ и $\int_0^{\pi}\sin^7 xdx$, выяснить, какой из них больше.

Решение. Поскольку функция $\sin x$ на отрезке $[0,\ \pi]$ удовлетворяет двойному неравенству $0\le \sin x\le 1$, то

$$\sin^4 x \ge \sin^7 x\quad \forall x\in[0,\pi]\quad \Rightarrow\quad \int_0^{\pi}\sin^4 xdx \ge \int_0^{\pi}\sin^7 xdx\,.$$

Задача решена.

Свойство 8 (*положительность*). Если функция сохраняет знак на отрезке $[a,\ b]$, где $a<b$, то интеграл имеет тот же знак, что и функция. Например,

$$f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a,\, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0 \; .$$

Свойство 8 является частным случаем свойства 7 при $g(x) \equiv 0$ на отрезке $[a, b]$.

Свойство 9 (*оценка интеграла*). Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,\, b]$, где $a < b$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) . \tag{2.3}$$

Замечание 1. Числа m и M существуют для любой интегрируемой функции, так как по необходимому условию интегрируемыми являются только ограниченные функции.

Замечание 2. Если $f(x) > 0$ на отрезке $[a,\, b]$, то неравенства (2.3) имеют простой геометрический смысл. Площадь криволинейной трапеции, значение определенного интеграла, больше площади прямоугольника с основанием, равным основанию трапеции, и высотой m, равной наименьшей ординате трапеции, и меньше площади прямоугольника с тем же основанием и высотой M, равной наибольшей ординате трапеции (рис. 2.2).

Иногда бывает весьма трудно найти точное значение интеграла, а, оценив его, мы узнаем, хотя бы грубо, его приближённое значение. С такого рода оценками приходится часто встречаться в математике.

Пример 2.2. Оценить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^6}$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{1}{1+x^6}$ убывает на отрезке $[0,\, 1]$, поэтому $m = f(1) = \frac{1}{2}$, $M = f(0) = 1$. Тогда по свойству 10 справедлива оценка

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^6} \leq 1 \cdot 1 \qquad \text{или} \qquad 0{,}5 \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^6} \leq 1 \; .$$

Задача решена.

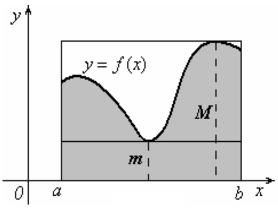

Рис. 2.2

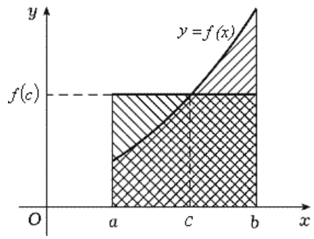

Рис. 2.3

Свойство 10 (*теорема о среднем*). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то существует точка $c \in \left(a,\ b\right)$, такая, что

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = f\left(c\right)\left(b-a\right). \tag{2.4}$$

Равенство (2.4) называется *формулой среднего значения*, а величина $f(c)$ в этой формуле называется *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$.

Многие величины часто характеризуются своими средними значениями; таковы, например, давление пара, сила и напряжение переменного тока и др.

Замечание. Геометрический смысл теоремы о среднем при $f(x) > 0$ на отрезке $[a,\ b]$: криволинейная трапеция под графиком функции $y = f(x)$ (величина определённого интеграла) равновелика прямоугольнику, имеющему высоту $f(c)$ и основание $b-a$ (рис. 2.3).

2.3. ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Пусть $x \in [a,\ b]$, рассмотрим функцию

$$\Phi\left(x\right) = \int_a^x f\left(t\right)dt\ , \tag{2.5}$$

которая называется *интегралом с переменным верхним пределом*.

Замечание. При каждом значении $x \in [a,\ b]$ интеграл с переменным верхним пределом (2.5) становится определённым интегралом. В частности, по свойству 2 имеем $\Phi\left(a\right) = 0$, а $\Phi\left(b\right) = \int_a^b f\left(t\right)dt$.

Функция $\Phi\left(x\right)$ обладает важным свойством: если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, тогда производная от интеграла (2.5) по его верхнему пределу равна подынтегральной функции:

$$\left(\Phi(x)\right)' = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x). \tag{2.6}$$

Действительно, найдём приращение функции $\Phi(x)$, используя свойства определённого интеграла – аддитивности по отрезку и теорему о среднем:

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$
$$= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x,$$

где точка c лежит между x и $x+\Delta x$. Тогда по определению производной

$$\left(\Phi(x)\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(c) = f(x).$$

Последнее равенство следует из непрерывности функции $f(x)$.

Формула (2.6) показывает, что функция $\Phi(x)$ является первообразной функции $f(x)$. Таким образом можно найти первообразную любой непрерывной функции. Тогда множество всех первообразных непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ имеет вид

$$\Phi(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C. \tag{2.7}$$

***Теорема* 2.1** (*основная теорема интегрального исчисления*). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и функция $F(x)$ является некоторой её первообразной на этом отрезке, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{2.8}$$

Формула (2.8) называется *формулой Ньютона–Лейбница*, а также *основной формулой интегрального исчисления*.

Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, её первообразная $F(x)$ имеет вид (2.7)

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + \overline{C},$$

где $\overline{C}$ – некоторое число. На основании замечания к формуле (2.5) $F(a) = \overline{C}$,

$$F(b)=\int_a^b f(t)dt+\overline{C} \quad \Rightarrow \quad F(b)=\int_a^b f(t)dt+F(a) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a).$$

А поскольку определённый интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, то заменим переменную t на переменную x.

Теорема доказана.

Разность $F(b) - F(a)$ принято условно записывать в виде $F(x)\Big|_a^b$. Тогда формула (2.8) принимает вид $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$.

Формула (2.8), с одной стороны, устанавливает связь между определённым и неопределённым интегралами, с другой стороны, даёт простой метод вычисления определённого интеграла. Итак, задача вычисления определённого интеграла сводится к задаче вычисления неопределённого интеграла, которая рассмотрена в главе 1.

Пример 2.3. Вычислить интеграл $\int_0^3 \frac{dx}{2x+3}$.

Решение.

$$\int_0^3 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln(2x+3)\Big|_0^3 = \frac{1}{2}\ln 9 - \frac{1}{2}\ln 3 = 0{,}5\ln 3 .$$

Пример 2.4. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$.

Решение.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)\sin x dx = -\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x) d\cos x =$$

$$= \left(-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \left(-\cos(\pi/2) + \frac{\cos^3(\pi/2)}{3}\right) - \left(-\cos 0 + \frac{\cos^3 0}{3}\right) = \frac{2}{3} .$$

Пример 2.5. Найти среднее значение функции $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ на отрезке $[0,\ 2]$.

Решение. По теореме о среднем (свойство 10 определённого интеграла) среднее значение функции равно

$$f(c) = \frac{1}{2-0}\int_0^2 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} .$$

Вычислим определённый интеграл:

$$\int_0^2 \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{d\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = -\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}\Bigg|_0^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-1\right) = \frac{2}{5}.$$

Найдем среднее значение функции: $f(c) = \frac{1}{2}\frac{2}{5} = 0{,}2$. Задача решена.

2.4. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Распространим основные методы интегрирования – по частям и заменой переменной на определённый интеграл.

***Теорема* 2.2.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Пусть:

1) функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ и производная $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$;

2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ является отрезок $[a, b]$;

3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$,

тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\,. \tag{2.9}$$

Формула (2.9) носит название *формулы замены переменной в определённом интеграле.*

Замечание. При вычислении определённого интеграла по формуле (2.9) не требуется возвращения к старой переменной *x*. Достаточно из выражений $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$ найти пределы изменения новой переменной *t*.

Пример 2.6. Вычислить интеграл $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$.

Решение. Для того чтобы избавиться от иррациональности, сделаем подстановку $x = t^2$, тогда $\sqrt{x} = t$ и получим интеграл от рациональной функции:

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx = \left|\begin{array}{c} x = t^2 \qquad t = \sqrt{x} \\ dx = 2tdt \\ 4 \le x \le 9 \;\Rightarrow\; 2 \le t \le 3 \end{array}\right| = \int_2^3 \frac{t}{t-1}2tdt = 2\int_2^3 \frac{t^2}{t-1}dt =$$

$$= 2\int_2^3 \frac{t^2-1+1}{t-1}dt = 2\int_2^3 \frac{t^2-1}{t-1}dt + 2\int_2^3 \frac{dt}{t-1} = 2\int_2^3 (t+1)dt + 2\ln|t-1|\Big|_2^3 =$$

$$=2\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\Bigg|_2^3+2(\ln 2-\ln 1)=9-4+2(3-2)+2\ln 2=7+2\ln 2.$$

В случае введения подстановки $\varphi(x)=t$ пределы новой переменой определяются просто $\varphi(a)=t_1$, $\varphi(b)=t_2$, но функция должна быть строго монотонной на интервале (a, b) и иметь производную, не равную нулю ни в одной точке этого интервала.

Пример 2.7. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$.

Решение. Подынтегральная функция примет более простой вид, если сделать подстановку $t=\sqrt{e^x-1}$ (функция возрастает на интервале $(0;\ \ln 5)$). Пределы интегрирования переменной t будут $\sqrt{e^0-1}=0$ и $\sqrt{e^{\ln 5}-1}=2$.

$$\int\limits_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx=\left|\begin{array}{c} t=\sqrt{e^x-1}\quad e^x=t^2+1 \\ e^x dx=2tdt \\ 0\le x\le\ln 5\ \Rightarrow\ 0\le t\le 2\end{array}\right|=\int\limits_0^2\frac{t2tdt}{t^2+4}=2\int\limits_0^2\frac{t^2dt}{t^2+4}=$$

$$=2\int\limits_0^2\frac{t^2+4-4dt}{t^2+4}=2\int\limits_0^2\frac{(t^2+4)dt}{t^2+4}-8\int\limits_0^2\frac{dt}{t^2+4}=\left(2t-4\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^2=4-\pi.$$

***Теорема* 2.3.** Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными $u'(x)$ и $v'(x)$ на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b v\,du. \tag{2.10}$$

Формула (2.10) носит название *формулы интегрирования по частям* в определённом интеграле.

Пример 2.8. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{e-1}\ln(x+1)dx$.

Решение. Разобьём подынтегральное выражение на части $u=\ln(x+1)$ и $dv=dx$, далее применим формулу (2.10):

$$\int\limits_0^{e-1}\ln(x+1)dx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln(x+1) & du=\dfrac{dx}{x+1} \\ dv=dx & v=x\end{array}\right|=x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1}-\int\limits_0^{e-1}\frac{xdx}{x+1}=$$

$$=(e-1)\ln(e-1+1)-0-\int_0^{e-1}\frac{x+1-1}{x+1}dx=(e-1)\ln\mathrm{e}-\int_0^{e-1}\frac{x+1}{x+1}dx+\int_0^{e-1}\frac{dx}{x+1}=$$

$$=(e-1)-\int_0^{e-1}dx+\int_0^{e-1}\frac{dx}{x+1}=(e-1)-x\Big|_0^{e-1}+\ln(x+1)\Big|_0^{e-1}=$$

$$=(\mathrm{e}-1)-(\mathrm{e}-1)+0+\ln(\mathrm{e}-1+1)-\ln 1=1.$$

Пример 2.9. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} x^2\cos x dx$.

Решение. Разобьем подынтегральное выражение на части $u=x^2$ и $dv=\cos x dx$, далее применим формулу (2.10):

$$\int_0^{\pi} x^2\cos x dx=\begin{vmatrix} u=x^2 & dv=\cos x dx \\ du=2x dx & v=\sin x\end{vmatrix}= x^2\sin x\Big|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi} x\sin x dx=$$

Получили новый интеграл, подынтегральная функция которого представляет собой произведение многочлена первой степени и тригонометрической функции, следовательно, применим интегрирование по частям повторно:

$$=\begin{vmatrix} u=x & dv=\sin x dx \\ du=dx & v=-\cos x\end{vmatrix}=0-0+2x\cos x\Big|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}\cos x dx=-2\pi-0-2\sin x\Big|_0^{\pi}=-2\pi.$$

2.5. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При изучении определённого интеграла существенно использовались два обстоятельства: промежуток интегрирования конечный; подынтегральная функция $f(x)$ ограничена на промежутке. Обобщим понятие определённого интеграла на бесконечные промежутки и неограниченные функции.

2.5.1. Несобственные интегралы по бесконечному промежутку

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a, +\infty)$ и интегрируема в любой его части $[a, b]$ для любого $b > a$, т.е. существует определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Определение 2.4. *Несобственным интегралом первого рода* функции $f(x)$ в промежутке $[a, +\infty)$ называется предел

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx=\int_a^{+\infty} f(x)dx. \qquad (2.11)$$

В случае существования конечного предела (2.11) несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *сходящимся*, в противном случае (если предел (2.10) бесконечен или не существует) – *расходящимся*.

Аналогично определяется интеграл с бесконечным нижним пределом

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$$

и интеграл с бесконечными верхним и нижним пределами

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx .$$

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, если сходятся оба интеграла $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$ и $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$.

Для вычисления несобственного интеграла первого рода применяется формула Ньютона–Лейбница. Если функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a,+\infty)$ и $F(x)$ – какая-либо её первообразная, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty} ,$$

где $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. В случае несобственного интеграла с нижним бесконечным пределом применяется формула

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} .$$

Для несобственных интегралов справедливы многие свойства определённых интегралов. Например, для сходящихся интегралов

$$\int\limits_a^{+\infty}(\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx + \mu\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx .$$

Пример 2.10. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$, где a, λ – произвольные числа, причём $a > 0$.

Решение. Если $\lambda \neq 1$, то по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \left.\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1} & \text{при } \lambda > 1, \\ +\infty & \text{при } \lambda < 1. \end{cases}$$

Если $\lambda = 1$, то по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \ln x - \ln a = \infty \cdot$$

Таким образом, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ *сходится* при $\lambda > 1$ и *расходится* при $\lambda \le 1$.

Иногда необходимо установить факт сходимости или расходимости, не вычисляя сам интеграл. Для этого рассмотрим признаки сходимости.

***Теорема* 2.4** (*признак сравнения*). Пусть для непрерывных функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ на полуинтервале $[a, +\infty)$ выполняются неравенства $f(x) \ge \varphi(x) \ge 0$.

Тогда, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$; если же интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

При использовании этого признака требуется подобрать функцию $\varphi(x)$ или $f(x)$ для сравнения. Для таких целей удобна функция примера 2.10.

Пример 2.11**.** Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\left(1+e^x\right)}$.

Решение. Для любых значений аргумента x справедлива оценка

$$\frac{1}{x^2\left(1+e^x\right)} \le \frac{1}{x^2}.$$

Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, так как $\lambda = 2 > 1$. По признаку сравнения сходится и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\left(1+e^x\right)}$.

***Теорема* 2.5** (*предельный признак сравнения*). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны при $x \geq a$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, тогда интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ ведут себя одинаково по отношению к сходимости.

Пример 2.12. Исследовать интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{1+x^2}dx$ на сходимость.

Решение. Сравним данный интеграл с расходящимся интегралом $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$, $\lambda = \dfrac{1}{2} \leq 1$. Вычислим предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\sqrt{x}}{1+x^2}\bigg/\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = 1 \neq 0 < \infty .$$

По теореме 2.5 несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{1+x^2}dx$ расходится.

***Теорема* 2.6.** Если сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$, то сходится и несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

2.5.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Рассмотрим функцию $f(x)$, непрерывную на полуинтервале $[a, b)$ и терпящую бесконечный разрыв в точке $x = b$, т.е. $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$.

Определение 2.5. *Несобственным интегралом второго рода* функции $f(x)$ в промежутке от a до b называется предел

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx . \qquad (2.12)$$

В случае существования конечного предела (2.12) несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Если функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $(a, b]$ и терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $c \in (a, b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Для интеграла (2.12) справедлива формула Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, $F(b) = \lim\limits_{x\to b-0} F(x)$.

Пример 2.13. Вычислить интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$, $a < b$.

Решение. Это несобственный интеграл: в точке $x = b$ подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв. По формуле Ньютона–Лейбница при $\lambda \neq 1$ имеем

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} \frac{1}{(b-x)^{\lambda-1}}\Bigg|_a^b = \frac{1}{1-\lambda}\left(\lim_{x\to b-0} \frac{1}{(b-x)^{\lambda-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\lambda-1}}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda-1}\dfrac{1}{(b-a)^{\lambda-1}} & \text{при} \lambda < 1, \\ \infty \quad \text{при } \lambda > 1. \end{cases}$$

При $\lambda = 1$ получаем

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = -\ln|b-x|\Big|_a^b = -\lim_{x\to b-0} \ln|b-x| + \ln a = +\infty.$$

Поэтому интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ *сходится* при $\lambda < 1$ *и расходится* при $\lambda \geq 1$.

Признаки сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций аналогичны теоремам 2.4 – 2.6.

2.6. УПРАЖНЕНИЯ

2.6.1. Функция $y = f(x)$ непрерывна на всей числовой оси, a и b – действительные числа, тогда верно утверждение…

а) $\int\limits_{4a}^{4b} f(x)dx = 4\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$; *б*) $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{4} f(x)dx - \int\limits_{b}^{4} f(x)dx$;

в) $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{4} f(x)dx + \int\limits_{b}^{4} f(x)dx$; *г*) $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a+4}^{b+4} f(x)dx$.

2.6.2. Определённый интеграл $\int\limits_{-a}^{a} x^{11}\sin(11x)dx$, $a \neq 0$, равен ...

а) 0; *б*) $2\int\limits_{-a}^{0} x^{11}\sin(11x)dx$; *в*) $a\int\limits_{0}^{a} x^{11}\sin(11x)dx$; *г*) $\int\limits_{0}^{a} x^{11}\sin(11x)dx$.

2.6.3. Выясните, не вычисляя, какой из интегралов больше:

1) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x^2}$ или $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x^3}$; 2) $\int\limits_{0}^{1} e^{-x^2}dx$ или $\int\limits_{0}^{1} e^{-x}dx$; 3) $\int\limits_{1}^{2}\ln x\,dx$ или $\int\limits_{1}^{2}\ln^2 x\,dx$.

2.6.4. Определённый интеграл $\int\limits_{0}^{1} x^5 dx$ равен…

а) $\frac{5}{6}$; *б*) $\frac{1}{6}$; *в*) 6; *г*) 1.

2.6.5. Определённый интеграл $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{x^2+x}$ равен…

а) $\ln\frac{1}{3}$; *б*) $\ln\frac{3}{2}$; *в*) $\ln 3$; *г*) $\ln 2$.

2.6.6. Определённый интеграл $\int\limits_{e}^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$ равен …

а) 2; *б*) $\ln 2$; *в*) $\ln 3$; *г*) 1.

2.6.7. Найдите среднее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

1) $y = \sqrt{4-x^2}$, $[-1, 1]$; 2) $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$, $[3,\ 4]$; 3) $y = \sin x\cos^2 x$, $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

2.6.8. Вычислите определённые интегралы с помощью замены переменной:

1) $\int\limits_{1}^{9}\frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$; 2) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$; 3) $\int\limits_{2}^{3}x(3-x)^7\,dx$; 4) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2}{(x+1)^3}dx$;

5) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; 6) $\int\limits_{3}^{29}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+3}$; 7) $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{dx}{3+2\cos x}$.

2.6.9. Вычислите определённые интегралы с помощью формулы интегрирования по частям:

1) $\int\limits_{0}^{0,2}xe^{5x}dx$; 2) $\int\limits_{1}^{e}(x+1)\ln x dx$; 3) $\int\limits_{0}^{1}4x\arcsin x dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\pi/4}x\cos^2 x dx$.

2.6.10. Сходящимися являются несобственные интегралы (выберите несколько вариантов ответа):

1) $\int\limits_{1}^{+\infty}x^{-\frac{3}{5}}dx$; 2) $\int\limits_{1}^{+\infty}x^{-\frac{5}{3}}dx$; 3) $\int\limits_{1}^{+\infty}x^{-\frac{9}{7}}dx$; 4) $\int\limits_{1}^{+\infty}x^{-\frac{7}{9}}dx$.

2.6.11. Вычислите несобственные интегралы (или установите их расходимость):

1) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^4}$; 2) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx$; 3) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 4) $\int\limits_{0}^{\infty}x\sin x dx$;

5) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}x}{x^2}dx$; 6) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}$; 7) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$; 8) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

9) $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{x^2-4x+3}$; 10) $\int\limits_{0}^{1}x\ln x dx$; 11) $\int\limits_{0}^{1/e}\frac{dx}{x\ln^2 x}$; 12) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$.

2.6.12. Исследуйте сходимость интегралов:

1) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{x^3+1}$; 2) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^4}dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3}dx$; 4) $\int\limits_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln\ln x}$;

5) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$; 6) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{e^x-\cos x}$; 7) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

При решении задачи о площади криволинейной трапеции (параграф 2.1) получено понятие определённого интеграла. Этим приложения определённого интеграла не исчерпываются, он имеет широчайшее практическое применение в математике, физике и технике.

3.1. ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Площадь криволинейной трапеции (рис. 3.1), ограниченной сверху графиком непрерывной неотрицательной на отрезке $[a, b]$ функции $y = f(x)$, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$, снизу осью Ox, находится по формуле (см. параграф 2.1)

$$S = \int_a^b f(x)dx\,. \tag{3.1}$$

Если же $f(x)$ конечное число раз меняет знак на отрезке $[a, b]$, то интеграл разбивают на сумму интегралов по частичным отрезкам. Интеграл по всему отрезку $[a, b]$ даёт соответствующую алгебраическую сумму площадей, лежащих выше и ниже оси Ox (рис. 3.2).

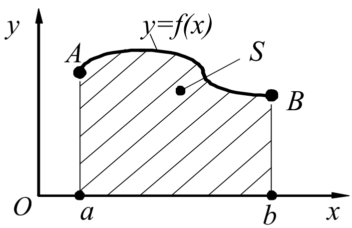

Рис. 3.1

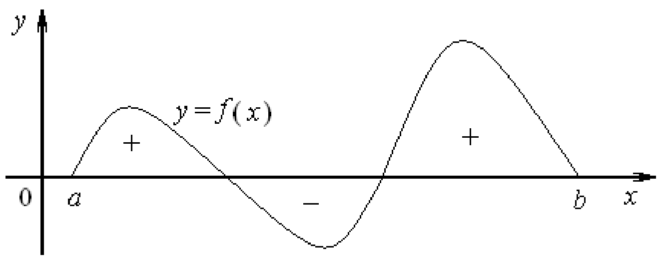

Рис. 3.2

Для нахождения площади нужно вычислить определённый интеграл от абсолютной величины функции $f(x)$:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx . \tag{3.2}$$

Рассмотрим часть плоскости, ограниченную сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – графиком функции $y = g(x)$, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 3.3). Площадь такой фигуры можно найти по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx . \tag{3.3}$$

Если верхняя граница $\overset{\cup}{AB}$ криволинейной трапеции (см. рис. 3.1) задана *параметрическими уравнениями*:

$$\overset{\cup}{AB} : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta], \;\; x(\alpha) = a, \; x(\beta) = b ,$$

функция $y(t)$ непрерывная и неотрицательная на отрезке $[\alpha, \beta]$, функция $x(t)$ имеет на этом отрезке непрерывную производную, тогда

$$S = \int_a^b f(x) dx = \begin{vmatrix} x = x(t) \;\; dx = x'(t)dt \\ y = f(x(t)) = y(t) \end{vmatrix} = \int_\alpha^\beta y(t) x'(t) dt \qquad \Rightarrow$$

площадь криволинейной трапеции находится по формуле

$$S = \int_\alpha^\beta y(t) x'(t) dt \; . \tag{3.4}$$

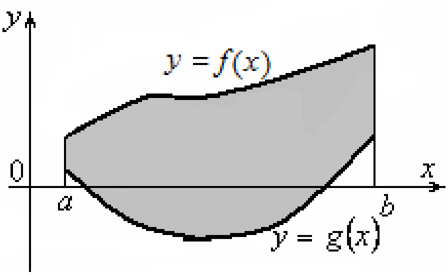

Рис. 3.3

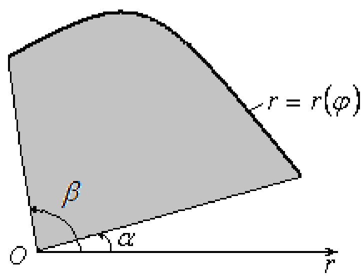

Рис. 3.4

Рассмотрим полярную систему координат на плоскости: полюс O и полярную ось Or. *Криволинейным сектором* называется часть плоскости, ограниченная лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и графиком непрерывной функции $r = r(\varphi)$ (рис. 3.4). Для нахождения площади криволинейного сектора также применяется определённый интеграл

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi \quad . \tag{3.5}$$

Пример 3.1. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и графиком функции $y = x^2 - 2x$ при $x \in [0, 3]$.

Решение. Графиком функции $y = x^2 - 2x$ является парабола, пересекающая ось Ox в точках $x = 0$ и $x = 2$, ветви кривой направлены вверх.

Изобразим схематично фигуру, ограниченную заданными линиями на плоскости Oxy (рис. 3.5).

Площадь фигуры представляет собой алгебраическую сумму интегралов, выражающих площади частей фигуры, лежащих выше и ниже оси Ox:

$$S = S_1 + S_2$$

$$S = -\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right)dx + \int_2^3 \left(x^2 - 2x\right)dx =$$

$$= \left(-x^3/3 + x^2\right)\Big|_0^2 + \left(x^3/3 - x^2\right)\Big|_2^3 =$$

$$= -\frac{8}{3} + 4 + \frac{27}{3} - 9 - \frac{8}{3} + 4 = 2\frac{2}{3} \text{ кв. ед.}$$

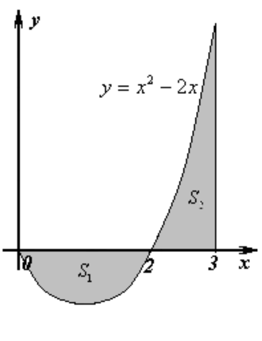

Рис. 3.5

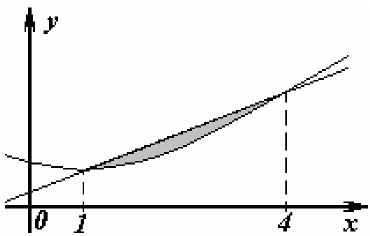

Рис. 3.6

Пример 3.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 3$ и $y = 3x - 1$.

Решение. Фигура, заданная линиями $y = x^2 - 2x + 3$ и $y = 3x - 1$, имеет вид, изображённый на рис. 3.8. Найдём абсциссы точек пересечения линий, решив систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3, \\ y = 3x - 1. \end{cases}$ Получим: $x_1 = 1, x_2 = 4$. Площадь фигуры находим по формуле (3.3)

$$S = \int_1^4 \left(3x - 1 - \left(x^2 - 2x + 3\right)\right)dx = \int_1^4 \left(-x^2 + 5x - 4\right)dx = -\frac{x^3}{3}\bigg|_1^4 + 5\frac{x^2}{2}\bigg|_1^4 - 4x\Big|_1^4 =$$

$$= \frac{9}{2} \text{ (ед. кв.).}$$

Пример 3.3. Найти площадь, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. Для упрощения преобразований при интегрировании функций перейдём к параметрическим уравнениям эллипса:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in [0;\ 2\pi].$$

Учитывая симметрию фигуры (рис. 3.7), вычислим площадь заштрихованной криволинейной трапеции. Для решения задачи используем формулу (3.4). При $x = 0$ имеем $t = \frac{\pi}{2}$, а при $x = a$ имеем $t = 0$, тогда

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin t\left(b\cos t\right)' dt = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\,dt = ab\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\left(t\,\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin 2t}{2}\bigg|_0^{\pi/2}\right) = \frac{\pi ab}{4} \text{ (кв. ед.).}$$

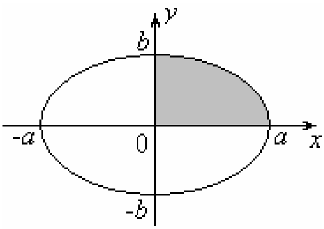

Рис. 3.7

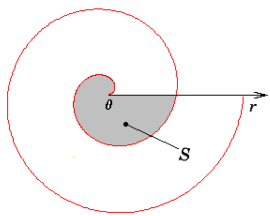

Рис. 3.8

Площадь всей фигуры равна $S = 4\dfrac{\pi ab}{4} = \pi ab$ кв. ед.

Пример 3.4. Найти площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $r = a\varphi$, $a > 0$ (рис. 3.8).

Решение. При изменении φ от 0 до 2π полярный радиус описывает кривую, ограничивающую криволинейный сектор. Применяем формулу (3.5):

$$S = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{6}\varphi^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \text{ кв. ед.}$$

3.2. ДЛИНА ДУГИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Пусть плоская кривая $\overset{\cup}{AB}$ (см. рис. 3.1) задана уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a, b]$. Тогда длину L кривой $\overset{\cup}{AB}$ можно найти по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx . \qquad (3.6)$$

Если кривая $\overset{\cup}{AB}$ задана параметрическими уравнениями

$$\overset{\cup}{AB} : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[\alpha, \beta]$, тогда, сделав в интеграле (3.6) замену переменной $x = x(t)$, $dx = x'(t)dt$, $f'(x) = y'(t)/x'(t)$, получим

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt . \qquad (3.7)$$

Если кривая $\overset{\cup}{AB}$ задана в полярных координатах: $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, функция $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha, \beta]$, тогда длину L кривой $\overset{\cup}{AB}$ можно найти по формуле

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + \left(r'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi . \qquad (3.8)$$

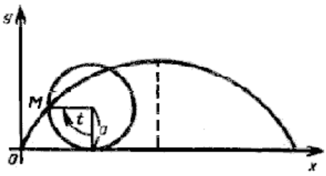

Рис. 3.9

Пример 3.4. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, заключенной между точками (0, 0) и (4, 8).

Решение. Длина дуги в этом случае вычисляется по формуле (3.6). Функция $y(x)$ определена для $x \geq 0$. Поскольку данные точки лежат в первой четверти, то $y = x^{3/2}$. Отсюда $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ и $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{9}{4}x}$. Следовательно,

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left[\left(1+\frac{9}{4}\cdot 4\right)^{3/2} - 1\right] = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)\,\text{ед.}$$

Пример 3.5. Вычислить длину дуги одной арки циклоиды $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1+\cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение. Циклоида – плоская кривая, которую описывает точка M окружности радиусом a, катящейся без скольжения по прямой линии (рис. 3.9). Кривая задана параметрическими уравнениями, поэтому используем формулу (3.7). Из уравнений циклоиды находим $y'(t) = a(1-\cos t)$, $x'(t) = -a\sin t$, подставляем в формулу (3.7):

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt = = a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\,dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = -4a[-1-1] = 8a \text{ (ед.).}$$

3.3. ОБЪЁМ ТЕЛА

Пусть тело T заключено между плоскостями $x = a$ и $x = b$, известна площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью $x = \text{const}$ (рис. 3.10), функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда объём V тела T можно найти по формуле

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \qquad (3.9)$$

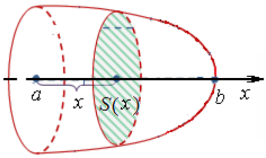

Рис. 3.10

Пример 3.6. Найти объём шара радиусом R .

Решение. Уравнение сферы с центром в начале координат имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 .$$

Пересечём шар плоскостью, перпендикулярной оси Ox на расстоянии x от начала координат (рис. 3.11), $-R \le x \le R$. В сечении получим круг, ограниченный окружностью

$$y^2 + z^2 = R^2 - x^2 .$$

Площадь этого круга равна $S(x) = \pi\left(R^2 - x^2\right)$. Тогда по формуле (3.9)

$$V = \int_{-R}^{R} \pi\left(R^2 - x^2\right)dx = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

В случае, когда тело образовано вращением криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y = f(x) \ge 0$, $x \in [a, b]$, вокруг оси Ox (рис. 3.12), сечением *тела вращения* плоскостью $x = \mathrm{const}$ будет круг радиусом $f(x)$. Поэтому $S(x) = \pi f^2(x)$ и по формуле (3.9) получим

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx . \qquad (3.10)$$

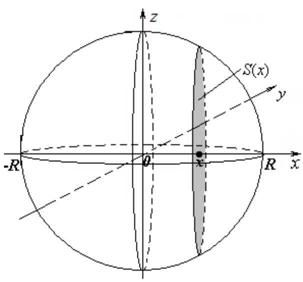

Рис. 3.11

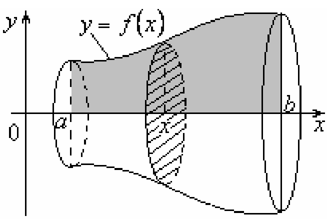

Рис. 3.12

Аналогично, если тело образовано вращением криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной функции $x = \varphi(y) \geq 0$, $y \in [c; d]$, вокруг оси Oy, объем *тела вращения* можно найти по формуле

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy. \qquad (3.11)$$

Пример 3.6. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры (рис. 3.13), ограниченной параболой $y = x^2$, осью Oy и прямой $y = 1$.

Решение. По формуле (3.11), учитывая, что $c = 0$, $d = 1$, $\varphi^2(y) = y$, имеем

$$V = \pi \int_0^1 y dy = \pi \frac{y^2}{2} \bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2} \text{ куб. ед.}$$

Пример 3.7. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (рис. 3.14).

Решение. Воспользуемся формулой (3.10). Так как функция задана параметрическими уравнениями, выразим $f^2(x)$ и dx:

$$f^2(x) = a^2 (1 - \cos t)^2, \quad dx = a(1 - \cos t) dt.$$

Первой арке циклоиды соответствует изменение переменной t от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi$. Следовательно, для искомого объёма получим

$$V = \pi \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5}{2} t - 4\sin t + \frac{3}{4} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3 \text{ куб. ед.}$$

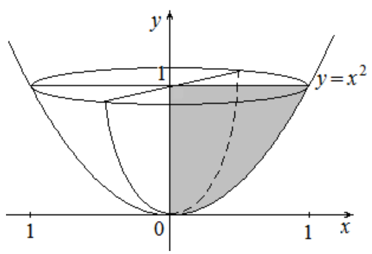

Рис. 3.13

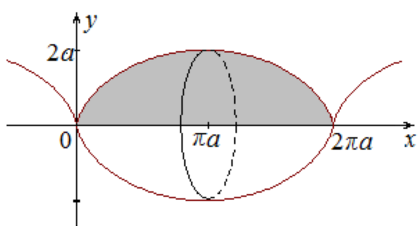

Рис. 3.14

3.4. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА В ЗАДАЧАХ ФИЗИКИ

Если материальная точка движется по прямой со скоростью $v(t)$, то *путь* s, пройденный точкой за отрезок времени $[t_0, T]$, равен

$$s = \int_{t_0}^{T} v(t)dt .$$

Эта формула раскрывает *физический смысл определённого интеграла*.

Работа, произведённая при перемещении материальной точки M из положения $x = a$ в положение $x = b$ по прямой линии под действием силы F, направленной параллельно перемещению, равна

$$A = \int_{a}^{b} F(x)dx . \qquad (3.12)$$

Здесь сила $F(x)$ является непрерывной функцией на отрезке $[a, b]$.

Пример 3.8. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину на 4 см, если известно, что от нагрузки в 1 Н она растянется на 1 см?

Решение. Согласно закону Гука, сила растяжения пружины на x см равна $F = kx$, где k – коэффициент пропорциональности. Коэффициент k найдём из условия: если x = 0,01 м, то F = 1 Н. Тогда $k = \frac{1}{0{,}01} = 100$ и пружина растягивается по закону $F = 100x$. Используя формулу (3.12), получим

$$A = \int_{0}^{0{,}04} 100x\,dx = 50x^2\Big|_0^{0{,}04} = 0{,}08 \text{ Дж}.$$

Рассмотрим некоторые механические характеристики плоской кривой. Пусть плоская кривая $\overset{\smile}{AB}$, заданная уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, представляет собой неоднородную материальную линию с линейной плотностью $\gamma = \gamma(x)$. Тогда *масса* кривой есть определённый интеграл

$$m = \int_{a}^{b} \gamma(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx .$$

Статические моменты плоской кривой относительно осей Ox и Oy равны

$$S_x = \int_{a}^{b} \gamma(x) f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx , \quad S_y = \int_{a}^{b} \gamma(x) x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx .$$

Определённый интеграл имеет многочисленные приложения и в других областях знаний. Например, в химии, *количество вступившего в реакцию вещества* за промежуток времени от t_0 до T равно определённому интегралу от скорости химической реакции:

$$m = \int_{t_0}^{T} v(t)dt .$$

3.5. УПРАЖНЕНИЯ

3.5.1. Площадь фигуры, изображённой на рис. 3.15, определяется как ...

а) $\int_0^1 (x^3 + 0{,}5)dx$; *б*) $\int_0^1 (x^3 - 1)dx$; *в*) $\int_0^1 (1 - x^3)dx$; *г*) $\int_0^1 (1{,}5 - x^3)dx$.

3.5.2. Найдите площадь фигуры, изображённой на рис. 3.16.
3.5.3. Площадь фигуры, изображённой на рис. 3.17, определяется как ...

а) $\left|\int_a^0 f(x)dx\right| + \int_0^b (f(x) - g(x))dx$; *б*) $\int_a^b f(x)dx - \int_0^b g(x)dx$;

в) $\int_a^0 f(x)dx + \int_0^b (f(x) - g(x))dx$; *г*) $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

3.5.4. Найдите площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = -x$ от параболы $y = 2x - x^2$.

3.5.5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

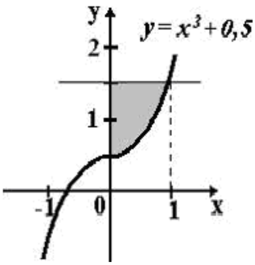

Рис. 3.15

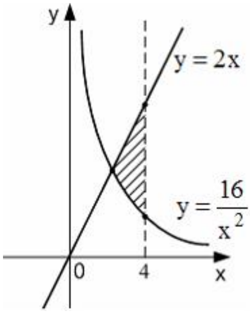

Рис. 3.16

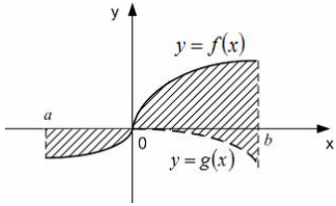

Рис. 3.17

3.5.6. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=(x-1)^2$ и гиперболой $2x^2-y^2=2$.

3.5.7. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x/\pi$ и $y=\sin x$.

3.5.8. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2e^{-x}$, $y=0$ и $x=2$.

3.5.9. Найдите площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и отрезком оси абсцисс (см. рис. 3.9).

3.5.10. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми $x=3t^2$, $y=3t-t^3$.

3.5.11. Площадь фигуры, ограниченной линиями $r=4\cos\varphi$ и $r=6\cos\varphi$, равна ...

а) 5π; *б*) 2π; *в*) 4π; *г*) 6π.

3.5.12. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной трилистником $r=2\sin 3\varphi$.

3.5.13. Длина дуги линии $y=1-\ln(x^2-1)$, если $9\le x\le 16$, равна ...

а) $7+\ln\dfrac{12}{17}$; *б*) $5+\ln\dfrac{68}{75}$; *в*) $5+\ln\dfrac{75}{68}$; *г*) $7+\ln\dfrac{75}{68}$.

3.5.14. Найдите длину дуги линии $y=\ln\sin x$, $\pi/3\le x\le \pi/2$.

3.5.15. Найдите длину дуги линии $x=t^2,\ y=t-t^3/3$, $0\le t\le 3/2$.

3.5.16. Найдите длину дуги линии $x=3\cos^3 t$, $y=3\sin^3 t$, лежащей в первой четверти.

3.5.17. Найдите длину дуги линии $x=6at^5$, $y=5a(1-t^8)$ от точки $A(0;\,0)$ до точки $B(6a;\,0)$.

3.5.18. Длина дуги линии $r=10\sin\varphi$ равна ...

а) 5π; *б*) 10π; *в*) 15π; *г*) 20π.

3.5.19. Объём тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2+5x-6$, $y=0$, равен ...

а) $\pi/30$; *б*) $\pi/5$; *в*) $\pi/6$; *г*) $2\pi/15$.

3.5.20. Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной линиями $y=x^3+1$, $y=1-x$, $y=0$.

4. РЯДЫ

4.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СВОЙСТВА

Понятие «ряд» является одним из основных понятий математического анализа. Оно является обобщением понятия суммы, которое определено для конечного количества слагаемых. При рассмотрении бесконечного количества слагаемых возникает вопрос об определении суммы, возможностях её вычисления, о выполнении свойств, известных для конечных сумм (например, переместительного и распределительного законов), о новых свойствах, характерных для бесконечных сумм.

Рассмотрим бесконечную числовую последовательность

$$a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ... .$$

Определение 4.1. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (4.1)$$

называется *числовым рядом*, при этом числа $a_1,\ a_2,\ ...$ – *членами ряда* (первым, вторым и т.д.); а a_n – *общим членом* ряда.

Определение 4.2. Суммы n первых членов ряда называются *частичными суммами* ряда.

$S_1 = a_1$ – первая частичная сумма ряда;

$S_2 = a_1 + a_2$ – вторая частичная сумма ряда;

… … … … … … … …

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ – n-я частичная сумма ряда.

Таким образом, получаем последовательность частичных сумм $S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$.

Определение 4.3. Числовой ряд (4.1) называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм, т.е. существует конечный предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n\ . \qquad (4.2)$$

Этот предел S называется *суммой* ряда.

Если число S является суммой ряда, будем писать

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ .$$

Определение 4.4. Числовой ряд (4.1) называется *расходящимся*, если последовательность его частичных сумм расходится, т.е. не имеет предела или является бесконечно большой.

При изучении рядов основными задачами являются исследование сходимости и нахождение суммы ряда. Рассмотрим решение этих двух задач на примере ряда *геометрической прогрессии*

$$b + bq + bq^2 + \ldots + bq^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} bq^n \,,\; b \neq 0 \,. \tag{4.3}$$

Исследуем ряд (4.3) на сходимость. Используя формулу суммы n членов геометрической прогрессии, получаем выражение для n-й частичной суммы ряда:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} bq^k = b\frac{1-q^n}{1-q} \,.$$

Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, и существует конечный предел (4.2)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} b\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{b}{1-q} \,,$$

т.е. в этом случае ряд сходится и его сумма равна $S = \dfrac{b}{1-q}$.

Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = +\infty$, и последовательность $\left\{1-q^n\right\}$ является неограниченной, т.е. по необходимому условию сходимости не имеет предела, поэтому не существует конечный предел частичных сумм, и ряд расходится.

Если $q = 1$, тогда $S_n = nb$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} nb = \infty$ и, следовательно, данный ряд расходится. Если $q = -1$, тогда частичные суммы с чётными номерами равны нулю: $S_{2m} = 0$, а частичные суммы с нечётными номерами – $S_{2m-1} = b$. Такая последовательность не имеет предела и, следовательно, ряд расходится.

Итак, ряд геометрической прогрессии (4.3) сходится в том и только в том случае, когда для его знаменателя выполняется неравенство $|q| < 1$, и сумма ряда в этом случае равна $S = \dfrac{b}{1-q}$.

Пример 4.1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{3}{n^2 - 3n + 2}$.

Решение. Разложим общий член ряда, как правильную рациональную дробь, на сумму простых дробей. Учитывая, что корни квадратного уравнения $n^2-3n+2=0$ есть $x_1=1$, $x_2=2$, разложим знаменатель на множители, преобразуем числитель и почленно разделим его на знаменатель:

$$\frac{3}{n^2-3n+2}=\frac{3}{(n-1)(n-2)}=3\frac{(n-1)-(n-2)}{(n-1)(n-2)}=\frac{3}{n-2}-\frac{3}{n-1}.$$

Представив каждый член частичной суммы ряда как разность соответствующих дробей, получим выражения для n-й частичной суммы ($n\geq 3$):

$$S_n=\frac{3}{2\cdot 1}+\frac{3}{3\cdot 2}+\frac{3}{4\cdot 3}+\frac{3}{(n-1)(n-2)}=3-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{3}{3}+\frac{3}{3}-\frac{3}{4}+\ldots+\frac{3}{n-2}-\frac{3}{n-1}=$$
$$=3-\frac{3}{n-1}.$$

Сумма ряда есть предел частичных сумм, поэтому

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{3}{n-1}\right)=3.$$

Итак, сумма ряда равна 3.

Рассмотрим *свойства рядов*:

1) сходимость или расходимость ряда (4.1) не изменится, если добавить или отбросить конечное число членов ряда;

2) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda a_n$ также сходится и его сумма равна λS (здесь $\lambda\neq 0$ – число);

3) если ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся и их суммы равны S_a и S_b соответственно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ также сходится и его сумма равна $S_a\pm S_b$;

4) при сложении сходящегося и расходящегося рядов получается расходящийся ряд, а при сложении двух расходящихся рядов можно получить как сходящийся, так и расходящийся ряд.

Для исследования рядов на сходимость разработаны различные признаки (достаточные условия), которые зависят от вида числового ряда (знакопостоянные, знакочередующиеся ряды и др.). Однако есть одно общее условие, которое должно выполняться для любого сходящегося ряда – необходимое условие сходимости.

***Теорема* 4.1** (*необходимое условие сходимости ряда)*. Если числовой ряд (4.1) сходится, то его общий член a_n стремится к нулю при $n\to\infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 . \qquad (4.4)$$

Следствие (*достаточное условие расходимости*). Если необходимое условие сходимости ряда (4.4) не выполняется, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то числовой ряд (4.1) расходится.

Пример 4.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{20n+7}$.

Решение. Проверим необходимое условие сходимости (4.4):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{20n+7} = \frac{1}{20} \neq 0 .$$

Необходимое условие не выполняется, следовательно, ряд расходится.

Замечание. Условие $a_n \to 0$ является необходимым, но не является достаточным для сходимости ряда.

Например, для *гармонического* ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ необходимое условие сходимости выполняется, но ряд является расходящимся. Покажем это. Из свойства монотонности определённого интеграла имеем

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{k} = \frac{1}{k}$$

при любом $k \in N$. Тогда для частичной суммы ряда получаем оценку

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{n=1}^{k} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{n+1} = \ln(n+1),$$

т.е. $S_n > \ln(n+1)$ при любом $n \in N$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, и гармонический ряд расходится.

4.2. ЗНАКОПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РЯДЫ

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с положительными (неотрицательными) членами, так как при умножении на «–1» из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами. Рассмотрим признаки сходимости знакоположительных рядов: признаки сравнения, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Каждый признак сходимости оказывается эффективным только для рядов определённого типа.

***Теорема* 4.2** (*признак сравнения*). Пусть при любом $n \in N$ для числовых рядов (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ выполняется условие

$$0 \le a_n \le b_n \,. \tag{4.5}$$

Если ряд (B) с большими членами сходится, то сходится и ряд (A), с меньшими членами. Если же ряд (A) расходится, то расходится и ряд (B).

Замечание. По свойствам числовых рядов неравенство (4.5) может выполняться, начиная с некоторого номера $\overline{n}$, при этом заключение теоремы остаётся верным.

Пример 4.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$.

Решение. Сравним исследуемый ряд с гармоническим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Из расходимости гармонического ряда, согласно признаку сравнения, неравенство $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$ даёт расходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$.

Пример 4.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)3^n}$.

Решение. Сравним данный ряд с рядом геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. Имеем

$$\frac{n}{(n+1)3^n} = \frac{n}{n+1}\frac{1}{3^n} < \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \;\Rightarrow\; \frac{n}{(n+1)3^n} < \left(\frac{1}{3}\right)^n .$$

Ряд геометрической прогрессии со знаменателем $q = \dfrac{1}{3}$, $|q| < 1$, сходится, тогда по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)3^n}$ тоже сходится.

***Теорема* 4.3** (*предельный признак сравнения*). Пусть для числовых знакоположительных рядов (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ($a_n > 0,\ b_n > 0$) существует конечный отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = h \ne 0 \,, \tag{4.6}$$

тогда ряды (A) и (B) ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Замечание 1. При использовании признаков сравнения требуется выбрать эталонный ряд, о котором известно, сходится он или расходится. В качестве такого ряда можно взять ряд геометрической прогрессии (пример 4.4) или гармонический ряд (пример 4.3). К эталонным рядам относится также обобщённый гармонический ряд, который будет рассмотрен позже.

Замечание 2. С помощью предельного признака сравнения легко исследуются ряды, общие члены которых являются рациональной или иррациональной алгебраической дробью.

Пример 4.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+10n}$.

Решение. Общий член ряда представляет собой рациональную алгебраическую дробь. По наибольшим степеням числителя и знаменателя выбираем для сравнения гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Составим предел (4.6)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n^2+10n} \frac{n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n}{n^2+10n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2 \neq 0 .$$

Предел (4.6) представляет собой конечное, отличное от нуля число, поэтому оба ряда ведут себя одинаково по отношению к сходимости. А поскольку гармонический ряд расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+10n}$ также расходится.

При исследовании числовых рядов по признакам сравнения приходится использовать некоторый эталонный ряд. Следующие признаки: Даламбера, Коши и интегральный позволяют исследовать сходимость ряда, используя только вид его общего члена.

***Теорема* 4.4** (*признак Даламбера*[1]). Пусть для числового знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D, \tag{4.7}$$

то при $D<1$ ряд сходится, а при $D>1$ ряд расходится.

Замечание 1. При $D=1$ признак Даламбера не даёт ответа на вопрос о сходимости ряда.

Замечание 2. По признаку Даламбера обычно исследуются ряды, общий член которых представляет собой дробь, числитель и знаменатель которой имеют различный характер роста. Например, последовательности n^p; a^n, $a>1$; $n!$; n^n, как функции натурального аргумента *n*, имеют различный характер роста.

---

[1] Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783) – французский математик.

Пример 4.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{(n+1)!}$.

Решение. Числитель и знаменатель общего члена ряда, согласно замечанию 2, имеют различный характер роста. Применим признак Даламбера. Для этого найдём предел (4.7):

$$a_n=\frac{3^n}{(n+1)!};\ a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+2)!}\quad\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+2)!}\frac{(n+1)!}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)!}{(n+1)!(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(n+2)}=0\ .$$

Предел $D=0$ меньше единицы, следовательно, ряд сходится.

***Теорема* 4.5** (*признак Коши*[2]). Пусть для числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ с неотрицательными членами, $a_n\geq 0$, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=K\ , \tag{4.8}$$

то при $K<1$ ряд сходится, а при $K>1$ ряд расходится.

Замечание 1. При $K=1$ признак Коши не даёт ответа на вопрос о сходимости ряда.

Замечание 2. По признаку Коши, который также называют радикальным признаком сходимости, обычно исследуются ряды, общий член которых представляет собой выражение вида $a_n=(f(n))^n$, так как в этом случае легко извлекается корень n-й степени.

Пример 4.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n^2+2}{n^2+10n+5}\right)^n$.

Решение. Общий член ряда имеет вид $a_n=(f(n))^n$, поэтому, согласно замечанию 2, можно применять признак Коши. Для этого найдём предел (4.8)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n^2+2}{n^2+10n+5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{n^2+10n+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2}=3\,.$$

Ряд расходится, так как $K=3>1$.

Пример 4.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+3}\right)^n$.

[2] Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) – французский математик.

Решение. Общий член ряда имеет вид $a_n = \left(f(n)\right)^n$, воспользуемся признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+3} = 1 .$$

$K = 1$, следовательно, о сходимости ряда ничего сказать нельзя. Проверим необходимое условие сходимости (4.4):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3-2}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n+3}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-2}n\left(\frac{-2}{n+3}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+3}} = e^{-2} \neq 0 .$$

Необходимое условие не выполняется, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n$ расходится.

***Теорема* 4.6** (*интегральный признак*). Пусть $f(x)$ непрерывная положительная неубывающая функция на полуинтервале $[1;\ +\infty)$, тогда ряд

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

и несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Применим интегральный признак для исследования на сходимость *обобщённого гармонического* ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$. Все условия теоремы 4.6. для этого ряда при $\alpha > 0$, очевидно, выполняются. Пусть $\alpha \neq 1$, рассмотрим интеграл

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{1}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} .$$

Предел, а следовательно, и интеграл, сходятся при $\alpha > 1$ и расходятся при $\alpha < 1$. При $\alpha = 1$ имеем

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_{1}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty ,$$

интеграл расходится. На основании интегрального признака можно сделать вывод о сходимости обобщённого гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$: при $\alpha > 1$ ряд сходится, а при $\alpha \le 1$ ряд расходится.

4.3. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Определение 4.5. Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{4.9}$$

содержащий бесконечное количество как положительных, так и отрицательных слагаемых, называется *знакопеременным*.

Примером знакопеременного ряда может служить ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{18} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{50} - \frac{1}{36} - \frac{\sqrt{2}}{98} - 0 + \frac{\sqrt{2}}{162} + \ldots. \tag{4.10}$$

Поставим в соответствие ряду (4.9) ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots. \tag{4.11}$$

Этот ряд является знакоположительным, для исследования его на сходимость существуют различные признаки, изложенные в параграфе 4.2.

***Теорема* 4.7.** Пусть дан знакопеременный ряд (4.9). Если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов (4.11), тогда данный ряд (4.9) тоже сходится.

Пользуясь теоремой 4.7, проверим сходимость ряда (4.10). Рассмотрим ряд из абсолютных величин его членов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left|\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right|$. Сравним данный знакоположительный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который является сходящимся, как обобщённый гармонический ряд при $\alpha = 2 > 1$. Из очевидного неравенства

$$\left|\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right| \le 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^2}\left|\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right| \le \frac{1}{n^2}$$

по признаку сравнения (теорема 4.2) получаем сходимость ряда, составленного из абсолютных величин. Тогда по теореме 4.7 сходится и ряд (4.10).

Определение 4.6. Знакопеременный ряд (4.9) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд из абсолютных величин его членов (4.11).

Определение 4.7. Знакопеременный ряд (4.9) называется *условно сходящимся*, если сам ряд (4.9) сходится, а ряд из абсолютных величин его членов (4.11) – расходится.

Рассмотрим *свойства абсолютно и условно сходящихся рядов*:

1) если знакопеременный ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму;

2) если знакопеременный ряд сходится условно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, либо сходится условно, либо расходится; более того, можно так переставить члены ряда, что ряд будет иметь любую наперёд заданную сумму.

Ряд (4.10) является абсолютно сходящимся. Если у знакопеременного ряда абсолютной сходимости нет, то остаются два варианта: условная сходимость или расходимость. Если ряд (4.11) расходится, то надо каким-то образом выяснить, сходится ли в этом случае ряд (4.9). Здесь может помочь признак Лейбница.

***Теорема* 4.8.** (*признак Лейбница*[3]). Если знакопеременный ряд (4.9) является знакочередующимся, т.е. может быть записан в виде

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \ ,$$

где $a_n > 0$; все его члены монотонно убывают по абсолютной величине: $a_{n+1} < a_n$, $n = 1,\ 2,\ 3\ \ldots$, и n-й член стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то данный знакопеременный ряд сходится.

Пример 4.9. Исследовать на абсолютную, условную сходимость или расходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

Решение. Проверим сначала абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из абсолютных величин его членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1}$, который исследуем по предельному признаку сравнения (теорема 4.3), сравнив с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Для этого найдём предел (4.6)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0 \ .$$

[3] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) – немецкий математик.

Так как предел (4.6) конечный и отличен от нуля, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ расходится, как и гармонический. Следовательно, абсолютной сходимости нет.

Проверим выполнение условий признака Лейбница. Исходный ряд является знакочередующимся, дробь $\frac{1}{2n+1}$ убывает с ростом n и предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0\,.$$

Следовательно, ряд сходится по признаку Лейбница. А так как абсолютной сходимости нет, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ сходится условно.

Если знакопеременный ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то он называется *рядом Лейбница*.

Рассмотрим *свойства ряда Лейбница*, имеющие большое практическое значение:

1) сумма ряда Лейбница меньше первого члена ряда, т.е. $S<a_1$, где $S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$;

2) разность $S-S_n=R_n$ называется *остатком ряда* и в свою очередь является суммой ряда Лейбница: $R_n=\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$, поэтому удовлетворяет условию $|R_n|<a_n$.

Последнее свойство даёт способ приближённого вычисления суммы ряда Лейбница. При замене суммы ряда его частичной суммой погрешность (остаток ряда) не превосходит первого отброшенного члена ряда по абсолютной величине.

Пример 4.10. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{5^n}$ сходится и найти его сумму с точностью до 0,001.

Решение. Покажем, что данный ряд является рядом Лейбница. Это обеспечит сходимость и даст способ вычисления суммы ряда с необходимой точностью. Чередование знаков членов ряда обеспечивает множитель $(-1)^n$. Покажем убывание членов ряда, взятых по абсолютной величине:

$$a_n=\frac{n}{5^n}\ \Rightarrow\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{5^{n+1}}\frac{5^n}{n}=\frac{n+1}{5n}<1\ \Rightarrow\ a_{n+1}<a_n$$

Проверяем последнее условие теоремы 4.8 (при вычислении предела применим правило Лопиталя):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{5^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{5^n \ln 5} = 0 .$$

Таким образом, все условия теоремы 4.8 выполняются, следовательно, исходный ряд является рядом Лейбница.

Для того чтобы найти сумму ряда, выпишем несколько первых членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{5^n} = -\frac{1}{5}+\frac{2}{25}-\frac{3}{125}+\frac{4}{625}-\frac{1}{625}+\frac{6}{15625}-\ldots .$$

Шестой член ряда меньше, чем 0,001, поэтому погрешность при замене S на S_5 не превышает $|R_5| < \frac{6}{15625} < 0{,}001$. Тогда, с точностью до 0,001, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{5^n} \approx -\frac{1}{5}+\frac{2}{25}-\frac{3}{125}+\frac{4}{625}-\frac{1}{625} = -\frac{87}{625} \approx -0{,}139 .$$

4.4. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ

Если в числовых рядах члены ряда – числа, то в функциональных – функции. Рассмотрим последовательность функций

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots .$$

определённых на некотором множестве X.

Определение 4.8. *Функциональным рядом* называется ряд, членами которого являются функции:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots . \qquad (4.12)$$

Подставляя значения аргумента $x \in X$ в слагаемые ряда (4.12), получаем числовые ряды, которые могут сходиться или расходиться.

Определение 4.9. Множество всех тех значений переменной $x \in X$, при которых функциональный ряд (4.12) сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда.

Так же как и для числовых рядов, рассматриваются частичные суммы функционального ряда $S_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$, $n = 1, 2, 3 \ldots$, и сумма ряда

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

Пример 4.11. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + x^2}$.

Решение. Пусть x – некоторое число, тогда данный ряд является знакоположительным числовым рядом. Общий член ряда – рациональная дробь, поэтому используем предельный признак сравнения (теорема 4.3). В качестве эталонного возьмём сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (обобщённый гармонический ряд, $\alpha = 3 > 1$). Найдём предел отношения общих членов рядов:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3 + x^2} \frac{n^3}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3 + x^2} = 1 \neq 0 ,$$

получили конечный предел, отличный от нуля. Следовательно, исходный ряд сходится при любом значении переменной x. Область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + x^2}$ – вся числовая ось, $x \in (-\infty; +\infty)$.

4.5. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Степенной ряд – частный случай функционального ряда (4.12), в котором слагаемые $u_n(x)$ являются степенными функциями.

Определение 4.10. *Степенным рядом* называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)^2 + \ldots + c_n (x - x_0)^n + \ldots , \quad (4.13)$$

числа c_0, c_1, c_2, …, c_n, … называются *коэффициентами* ряда.

Степенной ряд (4.13) называют также рядом по степеням $x - x_0$. Область сходимости степенного ряда не является пустым множеством, так как любой степенной ряд сходится при $x = x_0$ и его сумма равна $S = c_0$.

***Теорема* 4.9.** (*о радиусе сходимости*). Для любого степенного ряда (4.13) существует такое число $R \geq 0$ или $R = \infty$, что в интервале $(x_0 - R,\, x_0 + R)$ ряд сходится абсолютно, а за границами интервала, т.е. на множестве $(-\infty,\, x_0 - R) \cup (x_0 + R,\, +\infty)$, степенной ряд расходится.

Такое число R называется *радиусом сходимости*, а интервал $(x_0 - R,\, x_0 + R)$ – *интервалом сходимости* степенного ряда.

Замечание 1. Если $R = 0$, то интервал сходимости является пустым множеством, а область сходимости состоит только из одной точки $x = x_0$.

Замечание 2. Если $R=\infty$, то интервалом сходимости будет вся числовая ось $(-\infty;\ +\infty)$.

Замечание 3. Если $0<R<\infty$, тогда область сходимости степенного ряда будет сдержать интервал сходимости $(x_0-R,\ x_0+R)$ и, возможно, хотя бы одну из граничных точек $x=x_0-R$ или $x=x_0+R$. Вопрос о сходимости степенного ряда в граничных точках для каждого ряда решается индивидуально. На рисунке 4.1. показано поведение степенного ряда в каждой точке числовой оси.

Поскольку степенной ряд в каждой точке интервала сходимости сходится абсолютно, то для определения интервала сходимости исследуем его на абсолютную сходимость. Составляем ряд из абсолютных величин его членов и исследуем полученный знакоположительный ряд, например, по признаку Даламбера (теорема 4.4). В результате исследования получаем интервал, в котором должна находиться переменная *x*, обеспечивающий абсолютную сходимость степенного ряда. Для получения области сходимости остаётся проверить сходимость в граничных точках интервала.

Пример 4.12. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n}$.

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов исходного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-1|^n}{n\cdot 2^n}. \tag{4.14}$$

Исследуем полученный знакоположительный ряд по признаку Даламбера:

$$a_{n+1}=\frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\frac{n2^n}{|x-1|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|n}{(n+1)2}=\frac{|x-1|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|x-1|}{2}.$$

Ряд (4.14) сходится, если этот предел меньше единицы, т.е. при всех значениях аргумента *x*, таких, что

$$\frac{|x-1|}{2}<1 \quad \Leftrightarrow \quad |x-1|<2 \quad \Leftrightarrow \quad -2<x-1<2 \quad \Leftrightarrow \quad -1<x<3.$$

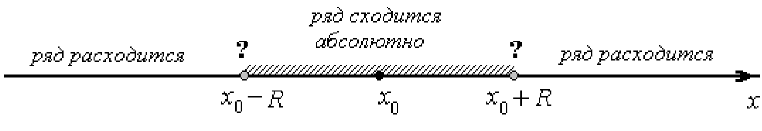

Рис. 4.1

Итак, если $x\in(-1;\,3)$, то ряд (4.14) сходится, следовательно, степенной ряд будет сходиться абсолютно. Если $\dfrac{|x-1|}{2}>1$, или в случае $x\in(-\infty,\,-1)\cup(3,\,+\infty)$, абсолютной сходимости не будет. Тогда по теореме (4.9) интервал $(-1;\,3)$ является интервалом сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n}$.

Исследуем поведение степенного ряда на границах интервала $(-1;\,3)$. Пусть $x=-1$, получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

который является знакочередующимся и сходится по признаку Лейбница (теорема 4.8). Действительно, последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ – убывающая бесконечно малая. Итак, в точке $x=-1$ степенной ряд сходится.

Пусть $x=3$, получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2)^n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Это гармонический расходящийся ряд, поэтому точка $x=3$ не принадлежит области сходимости.

Ответ: областью сходимости является промежуток $[-1;\,3)$.

В примере 4.12 радиусом сходимости степенного ряда является число $R=2$, что следует из неравенства $|x-1|<2$. Радиус сходимости степенного ряда (4.13) может быть найден по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Рассмотрим *свойства степенных рядов*:

1) в интервале сходимости $(x_0-R,\,x_0+R)$ сумма $S(x)$ степенного ряда (4.13) является непрерывной функцией;

2) степенной ряд (4.13) можно почленно интегрировать по промежутку $[0;\,x]\subset(x_0-R,\,x_0+R)$, т.е.

$$\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x c_n(x-x_0)^n dx=c_0(x-x_0)+\ldots+\frac{c_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}+\ldots,$$

при этом полученный почленным интегрированием ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный;

3) степенной ряд (4.13) внутри его интервала сходимости можно почленно дифференцировать, т.е.

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n(x-x_0)^n\right)'=c_1+2c_2(x-x_0)+\ldots+nc_n(x-x_0)^{n-1}+\ldots,$$

при этом полученный почленным дифференцированием ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный.

Возможность почленного дифференцирования и интегрирования степенных рядов делают их незаменимыми в приближённых вычислениях. Расширяют возможности практических приложений ряды специального вида – ряды Тейлора.

4.6. РЯДЫ ТЕЙЛОРА

Определение 4.11. Говорят, что функция $f(x)$ *разлагается в степенной ряд* на множестве *X*, если в каждой точке этого множества выполняется равенство

$$f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n+\ldots, \tag{4.15}$$

т.е. функция $f(x)$ является суммой степенного ряда на множестве *X*.

Из свойства 2 степенных рядов следует, что такая функция $f(x)$ должна быть бесконечное число раз дифференцируема.

***Теорема* 4.10.** (*о ряде Тейлора*). Если функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 разлагается в степенной ряд (4.15), то этот ряд является *рядом Тейлора*, т.е. справедливо равенство

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots.$$

Пример 4.13. Построить ряд Тейлора для функции $f(x)=\ln x$ по степеням $x-1$.

Решение. Ряд Тейлора для функции $f(x)$ по степеням $x-1$:

$$f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+\ldots.$$

Найдём производные функции $f(x)=\ln x$ и их значения в точке $x=1$:

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ f''(x)=-\frac{1}{x^2},\ f'''(x)=\frac{2}{x^3},\ f^{IV}(x)=-\frac{3!}{x^4},\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n},$$

$$f'(1)=1,\ f''(1)=-1,\ f'''(1)=2,\ f^{IV}(1)=-3!,\ \ldots,\ f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Подставим найденные значения в выражение для ряда Тейлора, получим

$$0+(x-1)-\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{2}{3!}(x-1)^3-\frac{3!}{4!}(x-1)^4+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}(x-1)^n+\ldots$$

или, после сокращения дробей,

$$\ln x\sim(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n+\ldots.$$

Задача построения ряда Тейлора решена. Значок ~ показывает, что пока неизвестно, можно ли записать равенство между функцией и её рядом Тейлора.

Задача построения ряда Тейлора для функции не является сложной. Гораздо труднее установить: для каких значений аргумента *x* можно записать равенство между функцией и её рядом Тейлора, т.е., при каких *x* функция разлагается в степенной ряд. Приведём одно из наиболее простых условий.

***Теорема* 4.11** (*достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора*). Если все производные функции $f(x)$ в некоторой δ-окрестности точки x_0 ограничены одним и тем же числом *M*:

$$\left|f^{(n)}(x)\right|<M\quad\forall n\in N\quad\forall x\in(x_0-\delta;\ x_0+\delta),$$

тогда функция $f(x)$ в этой окрестности $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ разлагается в степенной ряд (ряд Тейлора).

Если в ряде Тейлора положить $x_0=0$, то получим ряд по степеням *x*, или разложение функции $f(x)$ в ряд в окрестности нуля. Такой ряд называется *рядом Маклорена*

$$f(x)\sim f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots.$$

Рассмотрим ряды Маклорена для элементарных функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

Пусть $f(x)=e^x$, тогда

$$f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x,\ f'''(x)=e^x,\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=e^x,\ \ldots,$$

$$f(0)=1,\ f'(0)=1,\ f''(0)=1,\ f'''(0)=1,\ \ldots,\ f^{(n)}(0)=1,\ldots.$$

Поэтому ряд Маклорена для функции $f(x)=e^x$ имеет вид

$$e^x \sim 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots.$$

В силу того, что производная любого порядка равна $f^{(n)}(x)=e^x$, то на любом интервале $(-a;\ a)$ выполняется

$$\left|f^{(n)}(x)\right|<e^a \quad \forall n\in N \quad \forall x\in(-a;\ a).$$

Тогда по теореме 4.11 функция $f(x)=e^x$ на интервале $(-a;\ a)$ разлагается в ряд по степеням *x*. А так как число *a* может быть любым, то это разложение справедливо на всей числовой оси, т.е.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad \forall x\in(-\infty;+\infty).$$

Пусть $f(x)=\sin x$, тогда

$$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x,\ f^{IV}(x)=\sin x,$$

опять вернулись к функции $\sin x$, поэтому остальные производные будут повторяться. Найдём значения функции и её производных в точке $x_0=0$:

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f^{IV}(0)=0,\ldots.$$

Ряд Маклорена для функции $f(x)=\sin x$ имеет вид

$$\sin x\sim x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots.$$

В силу того, что производная любого порядка равна $\pm\sin x$ или $\pm\cos x$, то для всех действительных *x* выполняется неравенство

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le 1 \quad \forall n\in N \quad \forall x\in(-\infty;+\infty).$$

Тогда по теореме 4.11

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \qquad \forall x\in(-\infty;+\infty).$$

Аналогично можно получить ряды Маклорена для остальных функций:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad \forall\, x \in (-\infty;\, +\infty)\,;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots \qquad \forall\, x \in (-1;\, 1\,];$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots \qquad \forall\, x \in (-1;\, 1\,).$$

Имеем пять стандартных разложений в степенной ряд функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^{\alpha}$. Разложение в степенной ряд многих других элементарных функций можно получить, пользуясь этими стандартными разложениями.

Пример 4.14. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Решение. Производную функции $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ можно разложить в ряд Маклорена, пользуясь стандартным разложением для $(1+x)^{\alpha}$. Возьмём вместо переменной x квадрат переменной x^2 и $\alpha = -1$, тогда

$$\left(1+x^2\right)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots \ .$$

Проинтегрируем последнее равенство по отрезку $[\,0;\ x\,]$, где $x \in (-1;\, 1\,)$:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots\right) dx =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots .$$

Итак,

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad \forall\, x \in (-1;1\,).$$

Важность представления функции суммой степенного ряда видна хотя бы из того, что мы получаем возможность приближённо заменить функцию суммой нескольких первых членов степенного ряда, т.е. многочленом. Вычисление значений функции при этом сводится к вычислению значений многочлена, что можно сделать, производя только простейшие арифметические действия. Рассмотрим на примерах приложения степенных рядов в приближённых вычислениях: для вычисления значений функции и вычисления определённых интегралов.

Пример 4.15. Вычислить $\sqrt[5]{250}$ с точностью до 0,001.

Решение. Для решения задачи воспользуемся стандартным разложением в ряд функции $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, которое справедливо для значений $x\in(-1;\,1)$. Поэтому сначала преобразуем выражение $\sqrt[5]{250}$ к виду $(1+x)^{\alpha}$, где $|\,x\,|<1$.

$$\sqrt[5]{250}=\sqrt[5]{243+7}=\sqrt[5]{243\left(1+\frac{7}{243}\right)}=3\sqrt[5]{1+\frac{7}{243}}=3\left(1+\frac{7}{243}\right)^{1/5}.$$

Итак, $x=\frac{7}{243}<1$, $\alpha=\frac{1}{5}$. Имеем право использовать стандартное разложение:

$$3\left(1+\frac{7}{243}\right)^{\frac{1}{5}}=3\left(1+\frac{1}{5}\frac{7}{243}-\frac{1}{5}\frac{4}{5}\left(\frac{7}{243}\right)^{2}+\ldots\right)=3+\frac{3}{5}\frac{7}{243}-\frac{3}{5}\frac{4}{5}\left(\frac{7}{243}\right)^{2}+\ldots.$$

Это знакочередующийся ряд, сходящийся ряд, поэтому по необходимому условию сходимости $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Можно также показать убывание членов ряда, взятых по абсолютной величине. Следовательно, данный ряд является рядом Лейбница и его остаток не превосходит по абсолютной величине модуля первого отбрасываемого члена. Из неравенства

$$\frac{3}{5}\frac{4}{5}\left(\frac{7}{243}\right)^{2}<0{,}001$$

следует, что для вычисления значения $\sqrt[5]{250}$ с точностью до 0,001 можно ограничиться второй частичной суммой ряда:

$$\sqrt[5]{250}\approx3+\frac{3}{5}\frac{7}{243}=3+\frac{7}{5\cdot81}\approx3{,}017.$$

Пример 4.16. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{0,5}e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Первообразная функции $f(x)=e^{-x^2}$ не является элементарной, поэтому по формуле Ньютона–Лейбница этот интеграл найти нельзя. Разложим подынтегральную функцию в ряд, воспользовавшись стандартным разложением функции $f(x)=e^{x}$:

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots\quad\forall\,x\in(-\infty;+\infty).$$

Подставим этот ряд вместо подынтегральной функции, выписав несколько первых членов ряда, и проинтегрируем:

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2}dx = \int_0^{0,5}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right)dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{3\cdot 3!} + \ldots\right)\Bigg|_0^{0,5} =$$

$$= 0,5 - \frac{1}{8\cdot 3} + \frac{1}{32\cdot 5\cdot 2!} - \frac{1}{128\cdot 3\cdot 3!} + \ldots .$$

Данный знакочередующийся ряд является рядом Лейбница, так как он сходящийся с убывающими членами, взятыми по абсолютной величине. Из неравенства

$$\frac{1}{128\cdot 3\cdot 3!} = \frac{1}{2304} < 0,001$$

следует, что для вычисления интеграла с заданной точностью 0,001 достаточно ограничиться третьей частичной суммой ряда:

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2}dx \approx 0,5 - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} = \frac{443}{960} \approx 0,461 .$$

Замечание. В приближённых вычислениях важно определить, сколько членов ряда следует взять, чтобы найти его сумму с требуемой точностью. Самый простой случай – случай ряда Лейбница, рассмотренный в примерах 4.15 и 4.16. В случае, например, знакоположительных рядов дело обстоит сложнее. Тогда, как правило, стараются найти знакоположительный ряд с большими членами, который бы легко суммировался.

4.7. УПРАЖНЕНИЯ

4.7.1. Необходимый признак сходимости не выполнен для рядов (выберите несколько вариантов ответа).

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n^2+3}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{5n+11}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{1}{n^3+1}+2\right)$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$.

4.7.2. Сумма числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{7}\right)^n$ равна (выберите один вариант ответа)

а) $-\frac{2}{9}$; *б)* $-\frac{2}{5}$; *в)* $\frac{2}{5}$; *г)* $\frac{2}{9}$.

4.7.3. Сумма числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$ равна (выберите один вариант ответа) *а*) 1; *б*) $\frac{7}{12}$; *в*) 5; *г*) $\frac{3}{2}$.

4.7.4. Сумма числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+4)}$ равна (выберите один вариант ответа)

а) $\frac{1}{7}$; *б*) $\frac{1}{12}$; *в*) $\frac{1}{4}$; *г*) $\frac{1}{20}$.

4.7.5. С помощью предельного признака сравнения укажите сходящиеся числовые ряды (выберите несколько вариантов ответа).

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+3n-2}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+13}}$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-3}}$; *г*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5-3n^2+7}}$.

4.7.6. С помощью признака Даламбера укажите сходящиеся числовые ряды (выберите несколько вариантов ответа).

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^4+2}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{\sqrt{2^n n}}$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{3^{n-1}}$; *г*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$.

4.7.7. С помощью признака Коши укажите сходящиеся числовые ряды (выберите несколько вариантов ответа).

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+3}{3n+2}\right)^{n/3}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+17}\right)^{n^2}$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^{3n}$; *г*) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{2n}$.

4.7.8. Исследуйте на сходимость числовые ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 n}{n^2+1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0{,}01n+3}{100n-5}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+7n}{5^n+n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{n^2+3n-2}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+3}\right)^{3n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n+1}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(n+3)!}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+5}}{n+2}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{4^n}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}$; 14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(n^2-1)}{n!}$; 15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$; 16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3\sqrt{n+1}}$;

17) $\sum_{n=1}^{\infty}(3-(0{,}1)^n)^n$; 18) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{3n}$; 19) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\frac{n}{5^n}$; 20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

4.7.9. Укажите правильное утверждение относительно сходимости числовых рядов (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ и (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2^n}{n^2}$:

а) оба ряда сходятся;
б) оба ряда расходятся;
в) ряд (A) сходится, ряд (B) расходится;
г) ряд (A) расходится, ряд (B) сходится.

4.7.10. Установить характер сходимости или расходимость числовых рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\cdot 3^{-n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{5n-1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+3}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n}{5n+3}\right)^n$; 7) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln^3 n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^n}{(n+1)^2}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n-3}{2n+3}\right)^n$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+\sin^2 n}$; 14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^n}$; 15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{\sqrt{n^4+n+3}}$;

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{3^n}$.

4.7.11. Укажите условно сходящиеся числовые ряды (выберите несколько вариантов ответа).

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+4)$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n+3}$; *в*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$; *г*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^n}$.

4.7.12. Найдите суммы рядов с точностью до 0,01.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$.

4.7.13. Укажите интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{4^n}$.

а) $(0;\ 4)$; *б*) $(-1;\ 1)$; *в*) $(-4;\ 4)$; *г*) $(-4;\ 0)$.

4.7.14. Найдите области сходимости степенных рядов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n x^n}{3^n}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n(n+2)}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{5^n(n+2)}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^{2n}}{n}$;

5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,x^n}{2n+3}$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x-1)^n}{n^2+3}$; 7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^n\sqrt{2n+3}}$; 8) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}(x+1)^n}{(n+1)!}$;

9) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{2n+1}$; 10) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(n+1)^3}$; 11) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+3^n}$; 12) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(x-3)^n}{n^2+5}$.

4.7.15. Функция $f(x)=(x+1)\cos 4x$ разложена в ряд Маклорена, тогда коэффициент при x^2 равен

а) 0; *б*) -2; *в*) $0{,}5$; *г*) -8.

4.7.16. Укажите первые три (отличные от нуля) члена разложения функции $f(x)=\frac{1}{(x+1)^3}$ в ряд Маклорена.

а) $1+3x-6x^2$; *б*) $1-3x+12x^2$; *в*) $1+3x+12x^2$; *г*) $1-3x+6x^2$.

4.7.17. Найдите разложения функций $f(x)$ по степеням $x-x_0$.

1) $f(x)=\frac{1}{x},\ x_0=-2$; 2) $f(x)=\ln(2-2x),\ x_0=0$; 3) $f(x)=\cos x,\ x_0=\frac{\pi}{2}$;

4) $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=4$; 5) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{e^x}},\ x_0=0$; 6) $f(x)=\sin^2 x,\ x_0=0$.

4.7.18. Вычислите с помощью рядов с точностью до 0,001.

1) $\sqrt[3]{10}$; 2) $\ln 7$; 3) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 4) $\operatorname{arctg} 0{,}3$; 5) $\sqrt[4]{17}$; 6) $\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$;

7) $\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$; 8) $\int_0^{0,2}\frac{1-e^{-x}}{x}dx$; 9) $\int_0^{0,5}\frac{x-\sin x}{x^2}dx$; 10) $\int_0^1\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)dx$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии изложены основные понятия и теоремы интегрального исчисления функций одной переменной. Приведены необходимые сведения из теории числовых и функциональных рядов. Основные понятия и методы сопровождаются примерами, поясняющими эти понятия и методы. По каждой теме приведены задачи, решая которые, студент сможет более детально разобраться и лучше усвоить изучаемую тему.

Пособие предназначено для активного использования студентами 1 курса инженерных и экономических направлений высшего профессионального образования. Применяться может как на лекциях, так и практических занятиях; а также для самостоятельного выполнения домашнего задания; грамотного оформления решения и правильного обоснования; подготовки как к текущим традиционным контрольным работам, так и контрольным точкам в форме компьютерного тестирования; подготовки к предстоящим зачёту и экзамену.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бермант, А. Ф.** Краткий курс математического анализа для втузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – М. : Наука, 1967. – 736 с.

2. **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2003. – Ч. 1. – 304 с.

3. **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов. В 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2003. – 415 с.

4. **Кудрявцев, Л. Д.** Краткий курс математического анализа. В 2 т. : Т. 1 / Л. Д. Кудрявцев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 400 с.

5. **Ильин, В. А.** Основы математического анализа. В 2 ч. Ч. 1 : учебник для вузов / В. А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 648 с.

6. **Ильин, В. А.** Основы математического анализа. В 2 ч. Ч. 2 : учебник для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 464 с.

7. **Лунгу, К. Н.** Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федина, Ю. А. Шевченко. – М. : Айрис-пресс, 2005. – 576 с.

8. **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления : учебник. В 2 т. Т. 1 / Н. С. Пискунов. – СПб. : Мифрил. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1996. – 416 с.

9. **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов : учебник. В 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – 560 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ………………………………………………………………… 3

1. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ …………………………………….. 4

   1.1. Неопределённый интеграл, его свойства ……………………….. 4

   1.2. Таблица интегралов …………………………………………… 5

   1.3. Методы интегрирования ………………………………………. 7

   1.4. Разложение рациональной дроби на элементарные дроби ………. 13

   1.5. Интегрирование рациональных дробей ………………………… 15

   1.6. Интегрирование некоторых тригонометрических функций ……... 20

   1.7. Интегрирование некоторых иррациональных выражений ………. 22

   1.8. Упражнения …………………………………………………… 23

2. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ ……………………………………... 27

   2.1. Понятие определённого интеграла …………………………… 27

   2.2. Свойства определённого интеграла …………………………….. 29

   2.3. Основная формула интегрального исчисления ………………... 32

   2.4. Методы вычисления определённого интеграла ………………... 35

   2.5. Несобственные интегралы ……………………………………… 37

      2.5.1. Несобственные интегралы по бесконечному промежутку ... 37

      2.5.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций …. 40

   2.6. Упражнения ……………………………………………………… 41

3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА ………………… 44

   3.1. Площадь плоской фигуры ……………………………………. 44

   3.2. Длина дуги плоской кривой …………………………………….. 48

   3.3. Объём тела ……………………………………………………….. 49

   3.4. Приложения определённого интеграла в задачах физики ………. 52

   3.5. Упражнения …………………………………………………… 53

4. РЯДЫ ……………………………………………………………………... 55

   4.1. Числовые ряды. Основные понятия и свойства ………………... 55

   4.2. Знакоположительные ряды …………………………………… 58

   4.3. Знакопеременные ряды ……………………………………… 63

   4.4. Функциональные ряды. Область сходимости …………………. 66

   4.5. Степенные ряды ……………………………………………….. 67

   4.6. Ряды Тейлора …………………………………………………... 70

   4.7. Упражнения …………………………………………………… 75

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ………………………………………………………. 79

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ……………………………………………….. 79

Учебное электронное издание

ЖУКОВСКАЯ Татьяна Владимировна
МОЛОКАНОВА Елена Анатольевна
УРУСОВ Александр Иванович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И РЯДЫ

Учебное пособие

Редактор Л. В. Комбарова
Инженер по компьютерному макетированию М. С. Анурьева

ISBN 978-5-8265-1585-3

9 785826 515853

Подписано к использованию 16.06.2016.
Тираж 100 шт. Заказ № 279

Издательско-полиграфический центр
ФГБОУ ВО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14
Тел. 8(4752) 63-81-08
E-mail: izdatelstvo@admin.tstu.ru