МАТЕМАТИКА

III часть

ИЗДАТЕЛЬСТВО ФГБОУ ВПО «ТГТУ»

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Часть III

Задания контрольных работ

Составители:
МОРДОВИНА Елена Евгеньевна,
ПЕТРОВА Елена Анатольевна

Редактор Л.В. Комбарова

Инженер по компьютерному макетированию М.С. Анурьева

Подписано в печать 02.12.2011.
Формат 60 × 84 / 16. 1,39 усл. печ. л. Тираж 50 экз. Заказ № 544

Издательско-полиграфический центр ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет»

МАТЕМАТИКА

Часть III

Задания контрольных работ
для студентов заочного отделения специальности 010502
«Прикладная информатика (в областях)»

Тамбов
Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
2011

УДК 51
ББК В12я73
М792

Рекомендованно Редакционно-издательским советом университета

Р е ц е н з е н т
Заведующий кафедрой алгебры и геометрии
ФГБОУ ВПО «ТГУ им. Г.Р. Державина»,
доктор физико-математических наук, профессор
А.И. Булгаков

С о с т а в и т е л и:
Е.Е. Мордовина, Е.А. Петрова

М792 Математика : задания контрольных работ: в III ч. Ч. III. / сост. : Е.Е. Мордовина, Е.А. Петрова. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2011. – 24 с. – 50 экз.

Содержат 10 вариантов типовых заданий для контрольной работы за третий семестр обучения с указанием теоретического материала, необходимого для её выполнения, список рекомендуемой литературы, а также примеры выполнения всех заданий.

Предназначены для студентов заочного отделения специальности 010502 «Прикладная информатика (в областях)». Могут быть использованы также для самостоятельной подготовки студентов дневного отделения.

УДК 51
ББК В12я73

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Студент-заочник специальности «Прикладная информатика (в областях)» в третьем семестре обучения должен выполнить контрольную работу по разделам «Интегрирование функции одной переменной» и «Дифференциальные уравнения».

Номер своего варианта каждый студент определяет по последней цифре номера своей зачётной книжки (номера учебного шифра студента). При этом цифра 0 соответствует варианту № 10. Например, если номер зачётной книжки студента 5312, то он выполняет 2-й вариант, т.е. решает задания 1.2, 2.2, 3.2 и т.д.

Успешному выполнению контрольной работы способствует предварительное изучение теоретических вопросов, указанных на страницах 7, 8. Найти теоретический материал можно в рекомендуемой литературе и в приложении (частично).

Контрольная работа должна быть аккуратно оформлена, содержать достаточно подробные решения всех заданий с необходимыми к ним пояснениями и рисунками. Условие задания должно быть написано перед его выполнением. При оформлении контрольной работы следует сохранять нумерацию заданий, данную в варианте. Замена заданий другими не допускается.

Примеры выполнения всех заданий контрольной работы представлены на страницах 8 – 21.

П р и м е ч а н и е. *Задание, помеченное звёздочкой, не предназначено для обязательного решения, но его наряду с остальными должны уметь выполнять студенты, претендующие на экзаменационные оценки «хорошо» и «отлично».*

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. а) $\int x\ln x dx$;

б) $\int \sin^2 x\cos x dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$;

г) $\int \frac{x+3}{x(x+1)}dx$.

1.2. а) $\int e^{-\frac{x}{2}}xdx$;

б) $\int \frac{6x+7}{(2x-1)(x+4)}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$;

г) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x\,dx}{1+x^2}$.

1.3. а) $\int \arccos x dx$;

б) $\int \frac{2x+3}{x+3x^2}dx$;

в) $\int \sin 5x\cos 3x dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt{1+x}}$.

1.4. а) $\int x\cos x dx$;

б) $\int \frac{2x+1}{x^2+x}dx$;

в) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}$.

1.5. а) $\int xe^{-\frac{x}{3}}dx$;

б) $\int \frac{3x+8}{(x-1)(x+3)}dx$;

в) $\int \sin^3 x dx$;

г) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

1.6. а) $\int x\ln(x+1)dx$;

б) $\int \frac{x+2}{(x-1)(x+1)}dx$;

в) $\int \frac{\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}$;

г) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$.

1.7 а) $\int \arcsin x dx$;

б) $\int \frac{4x+5}{(x-1)(x+2)}dx$;

в) $\int \cos^2 x dx$;

г) $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}dx$.

1.8. а) $\int \sqrt{x}\ln x dx$;

б) $\int \frac{5x-2}{x^2-x}dx$;

в) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$;

г) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

1.9. а) $\int (1-x)\sin x dx$;

б) $\int \frac{dx}{x(x-1)}$;

в) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$;

г) $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}$.

1.10. а) $\int e^{2x}(x+1)dx$;

б) $\int \frac{3x+4}{x^2+4x}dx$;

в) $\int \sin 3x \cos 5x dx$;

г) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

2.1. $y=\sqrt{x},\ y=x^3$.

2.2. $y=x^2,\ \ y=2-x^2$.

2.3. $y^2=x, \quad x^2=y$.

2.4. $y^2=x+1, \quad x=0$.

2.5. $y^2=9x, \quad y=3x$.

2.5. $y^2=4x,\ \ x^2=4y$.

2.7. $y=x^3,\ \ 8x-y^2=0$.

2.8. $y^2=4-x,\ \ x=0$.

2.9. $y=x^3, y=1, x=0$.

2.10. $y=2x-x^2, \quad y=0$.

Примечание. Задание 2 выполняется с рисунком.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

3.1. а) $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$;

б)* $x^2y'=y^2+xy$;

в) $y''=4\cos 2x$.

3.2. а) $xy'=y^2$;

б)* $xdy-ydx=ydy$;

в) $y''=\sin^3 x$.

3.3. а) $\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$;

б)* $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$;

в) $y''=2\sin x\cos^2 x$.

3.4. а) $x^2y'+y^2=0$;

б)* $xy'+2\sqrt{xy}=y$;

в) $y''=\frac{1}{\cos^2 x}$.

3.5. а) $y'x^3=2y$;

б)* $xy'\cos\frac{y}{x}=y\cos\frac{y}{x}-x$;

в) $y''=\cos^3 x$.

3.6. а) $y'=(2y+1)\mathrm{ctg}x$;

б)* $xy'=y-\frac{x^2}{y}$;

в) $y''=2\sin 4x$.

3.7. а) $(x+1)y' + xy = 0$;

б)* $y^2dx + x^2dy = xydy$;

в) $y''' = \sin^2 x$.

3.8. а) $(1+y^2)dx - xydy = 0$;

б)* $yy' = 2y - x$;

в) $y''' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

3.9. а) $xy' - 1 = y$;

б)* $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$;

в) $y''' = \sin^2 x \cos x$.

3.10. а) $y' \cos x + y \sin x = 0$;

б)* $x^2 y' = x^2 + y^2 + xy$;

в) $y''' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

4. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

4.1. $y'' + 4y' + 4y = 0$;
$y(0) = 1,\ y'(0) = 3$.

4.2 $y'' - 4y' + 3y = 0$;
$y(0) = 6,\ y'(0) = 10$.

4.3. $y'' - 2y' + y = 0$;
$y(0) = 2,\ y'(0) = -1$.

4.4. $y'' - 2y' - 3y = 0$;
$y(0) = -1,\ y'(0) = 2$.

4.5. $y'' + 6y' + 9y = 0$;
$y(0) = 3,\ y'(0) = 1$.

4.6. $y'' + 8y' + 16y = 0$;
$y(0) = 2,\ y'(0) = 0$.

4.7. $y'' - 25y = 0$;
$y(0) = 2,\ y'(0) = 5$.

4.8. $y'' + 2y' + y = 0$;
$y(0) = 5,\ y'(0) = -1$.

4.9. $y'' + y' = 0$;
$y(0) = 3,\ y'(0) = -2$

4.10. $y'' - 4y' + 4y = 0$;
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида:

5.1. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

5.2. $y'' + 4y' + 4y = 2 + 4x$.

5.3. $y'' - 4y' = 8 - 16x$.

5.4. $y'' - 2y' + y = e^{-x}$.

5.5. $y'' + 2y' = 2e^{-2x}$.

5.6. $y'' + y' - 2y = 3xe^{x}$.

5.7. $y'' + 6y' + 9y = 9x^2 + 12x + 2$.

5.8. $y'' - 5y' = 5x$.

5.9. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

5.10. $y'' - 2y' - 8y = e^{x}$.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

К заданию 1

1. Первообразная функции, неопределённый интеграл (основные определения). Таблица интегралов.
2. Свойства неопределённого интеграла.
3. Простейшие методы интегрирования: непосредственное и подведение под знак дифференциала.
4. Интегрирование методом замены переменной (методом подстановки).
5. Интегрирование по частям для неопределённого интеграла. Реализация метода для трёх групп интегралов.
6. Рациональные дроби (определение и разновидности). Интегрирование простейших рациональных дробей.
7. Интегрирование неправильной и правильной рациональных дробей. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших.

К заданию 2

8. Определение определённого интеграла, его геометрический смысл.
9. Основные свойства определённого интеграла.
10. Формула Ньютона–Лейбница.
11. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат.

К заданиям 3 – 5

12. Обыкновенное дифференциальное уравнение, его порядок и символическая запись, его решение, общее и частное решения, общий и частный интегралы уравнения первого порядка.
13. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделёнными и разделяющимися переменными, алгоритм их решения (*к заданию 3, а*).

14.* Однородные дифференциальные уравнения первого порядка, алгоритм их решения (*к заданию 3, б*).

15. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка: их простейшая разновидность, алгоритм решения (*к заданию 3, в*).
16. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами, алгоритм их решения.

Структура записи их общего решения в зависимости от разновидности корней характеристического уравнения (*К заданию 4*).

17. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Алгоритм их решения (*К заданию 5*).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для втузов в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1997. – Ч. I.
2. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа : учебник для вузов / А.Ф. Бермант. – М. : Наука, 1973.
3. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу : учеб. пособие для втузов / Г.И. Запорожец. – М. : Высш. шк., 1964.
4. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления в 2 т. : учеб. пособие для втузов / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1985.

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Найти неопределённые интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$; б) $\int e^{1-2x}\,dx$;

в) $\int \frac{(2+\ln x)^2}{x}\,dx$; г) $\int \cos^3 x\,dx$;

д) $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$; е) $\int \sin 3x \cos 2x\,dx$;

ж) $\int (1-x)e^{-3x}\,dx$; з) $\int \ln(x+1)\,dx$;

и) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+4\right)\sqrt{x}}$; к) $\int \frac{3x-2}{x^2-2x}\,dx$.

Выполнение заданий:

а) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int \frac{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)dx}{\cos^2 x \sin^2 x} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\mathrm{ctgx} + \mathrm{tgx} + C .$$

П р и м е ч а н и е. При решении данного примера применён метод непосредственного интегрирования. Для преобразования подынтегральной дроби сначала было использовано основное тригонометрическое тождество $\left(\cos^2 x + \sin^2 x = 1\right)$, затем почленное деление числителя на знаменатель. В результате таких преобразований заданный интеграл сведён к сумме двух табличных интегралов (таблица основных интегралов приведена в приложении).

б) $$\int e^{1-2x}\,dx = \left[d\left(1-2x\right) = -2\,dx\right] = -\frac{1}{2}\int e^{1-2x} d\left(1-2x\right) = -\frac{1}{2}e^{1-2x} + C .$$

П р и м е ч а н и е. Здесь, а также в следующем примере, применён метод подведения под знак дифференциала. Он основан на использовании свойства инвариантности формул интегрирования и состоит в следующем. Пусть $\int f\left(x\right)dx = F\left(x\right) + C$ – табличный интеграл и подынтегральное выражение некоторого интеграла $\int p\left(x\right)dx$ удаётся привести к виду $f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx = f\left(g\left(x\right)\right)dg\left(x\right)$, то $\int p\left(x\right)dx = \int f\left(g\left(x\right)\right)dg\left(x\right) = F\left(g\left(x\right)\right) + C$.

Записи преобразований дифференциала, заключённые в квадратные скобки, являются вспомогательными и могут осуществляться мысленно.

в) $$\int \frac{\left(2+\ln x\right)^2}{x}dx = \left[d\left(2+\ln x\right) = \frac{dx}{x}\right] =$$

$$= \int \left(2+\ln x\right)^2 d\left(2+\ln x\right) = \frac{\left(2+\ln x\right)^3}{3} + C .$$

г) $\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cos x\, dx =$

$$= \int \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x\, dx = \left[d \sin x = \cos x\, dx\right] =$$

$$= \int \left(1 - \sin^2 x\right) d \sin x =$$

$$= \int d \sin x - \int \sin^2 x d \sin x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

П р и м е ч а н и е: При решении этого примера сначала была преобразована подынтегральная функция с использованием основного тригонометрического тождества, затем применён метод подведения под знак дифференциала.

д) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 - \cos x}{2} dx =$

$$= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos x\, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C\,.$$

П р и м е ч а н и е. Для преобразования подынтегральной функции здесь использована известная формула $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ или $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$ в нашем случае.

е) $\int \sin 3x \cos 2x\, dx =$

$$= \frac{1}{2} \int (\sin 5x + \sin x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 5x\, dx + \frac{1}{2} \int \sin x\, dx = \frac{1}{2 \cdot 5} \int \sin 5x\, d(5x) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x + C\,.$$

П р и м е ч а н и е. В этом примере для преобразования подынтегральной функции использована формула

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} \left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right),$$

где m, n – действительные числа.

ж) $\int (1-x)e^{-3x}\,dx = \begin{bmatrix} u = 1-x\ , & du = -dx \\ dv = e^{-3x}dx\ , & v = -\frac{1}{3}e^{-3x} \end{bmatrix} =$

$$= -\frac{1-x}{3}e^{-3x} - \frac{1}{3}\int e^{-3x}dx = \frac{x-1}{3}e^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x} + C\ .$$

П р и м е ч а н и е. При решении данного примера применён метод интегрирования по частям. Согласно этому методу, подынтегральное выражение сначала разложили на два множителя u и dv, нашли du и v (см. запись в квадратных скобках), затем применили известную формулу $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Заметим, что

$$v = \int e^{-3x}dx = [d(-3x) = -3dx] = -\frac{1}{3}\int e^{-3x}d(-3x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C_1,$$

но далее постоянную интегрирования C_1 для удобства принято полагать равной нулю, это не отражается на корректности записи окончательного ответа.

з) Здесь также применён метод интегрирования по частям.

$$\int \ln(x+1)dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x+1)\,, & du = \dfrac{dx}{x+1} \\ dv = dx\quad , & v = x \end{bmatrix} = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx\ .$$

Найдём отдельно последний интеграл.

$$\int \frac{x}{x+1}dx = \int \frac{(x+1)-1}{x+1}dx = \int dx - \int \frac{dx}{x+1} = \int dx - \int \frac{d(x+1)}{x+1} = x - \ln|x+1| + C_1.$$

Окончательно имеем

$$\int \ln(x+1)dx = x\ln(x+1) - x + \ln|x+1| + C\ .$$

и) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+4\right)\sqrt{x}} = \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{x = t^6} \\ dx = 6t^5\,dt \end{array}\right] = \int \frac{6t^5\,dt}{\left(t^2+4\right)t^3} =$

$$= 6\int \frac{t^2 dt}{t^2+4} = 6\int \frac{\left(t^2+4\right)-4}{t^2+4}dt = 6\int dt -$$

$$-24\int \frac{dt}{t^2+2^2} = 6t - \frac{24}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \left[t = \sqrt[6]{x}\right] = 6\sqrt[6]{x} - 12\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C\ .$$

П р и м е ч а н и е. В этом примере применён метод замены переменной (или метод подстановки). Используемая подстановка указана в квадратных скобках жирным шрифтом.

Интеграл $\int \frac{dt}{t^2+2^2}$ см. в дополнении к таблице интегралов в приложении.

к) Заметим, что подынтегральная функция интеграла $\int \frac{3x-2}{x^2-2x}dx$ является правильной рациональной дробью. В соответствии с правилом разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей имеем

$$\frac{3x-2}{x^2-2x} = \frac{3x-2}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}\ , \qquad (1)$$

где неизвестные пока постоянные A и B находим методом неопределённых коэффициентов. Один из вариантов его реализации заключается в следующем.

Приведя правую часть равенства (1) к общему знаменателю, получим

$$\frac{3x-2}{x(x-2)} = \frac{A(x-2)+Bx}{x(x-2)}\ ,$$

отсюда

$$A(x-2) + Bx = 3x - 2\ . \qquad (2)$$

Придавая x значения, равные корням знаменателя рассматриваемой дроби, т.е. $x = 0$, $x = 2$ из равенства (2), имеем:

при $x = 0$ $\qquad -2A = -2$,

при $x = 2$ $\qquad 2B = 4$.

Отсюда $A = 1$, $B = 2$.

Таким образом, $\dfrac{3x-2}{x(x-2)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x-2}$.

Итак,

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x}dx = \int \frac{3x-2}{x(x-2)}dx = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2}\right)dx = \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x-2} = \int \frac{dx}{x} +$$

$$+ 2\int \frac{d(x-2)}{x-2} = \ln|x| + 2\ln|x-2| + C.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = -\sqrt{x}$, $y = x$, $x = 1$;

б) $y^2 = 2 - x$, $x = 0$.

Выполнение заданий:

а) Фигура, площадь которой требуется вычислить, изображена на рис. 1. Её площадь S вычисляется по формуле (3) (см. п. 2 прил.), т.е.

$$S = \int_0^1 \left(x - \left(-\sqrt{x}\right)\right)dx = \int_0^1 \left(x + \sqrt{x}\right)dx = \left.\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6} \text{ (кв. ед.)}.$$

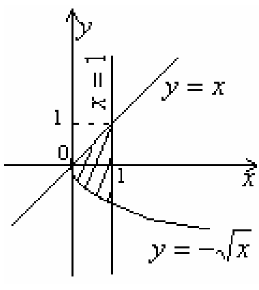

Рис. 1

б) Площадь S фигуры, изображённой на рис. 2, равна удвоенной площади криволинейной трапеции ABO, изображённой на том же рисунке. Применяя формулу (1) (см. п. 2 прил.), имеем

$$S = 2\int_0^2 \sqrt{2-x}\,dx = \left[d(2-x) = -dx\right] =$$

$$= -2\int_0^2 (2-x)^{\frac{1}{2}} d(2-x) = -2\cdot\left.\frac{(2-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^2 = \frac{4}{3}\sqrt{2^3} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ (кв. ед.).}$$

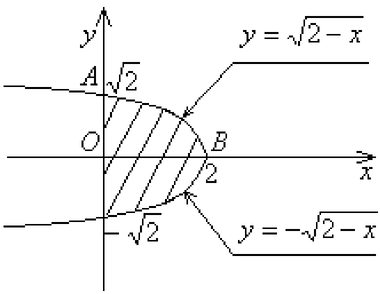

Рис. 2

П р и м е ч а н и е. Определённый интеграл, с использованием которого находили площади плоских фигур, вычисляется по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – какая-либо первообразная для непрерывной на $[a,\ b]$ функции $f(x)$.

3. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

а) $x\,y\,y' = 1 - x^2$;

б) $(y-2x)y' = -2y$;

в) $y'' = x + \sin x$.

Выполнение заданий:

а) Запишем заданное дифференциальное уравнение в виде $xy\dfrac{dy}{dx}=1-x^2$. Оно является уравнением с разделяющимися переменными и легко преобразуется к уравнению с разделёнными переменными $y\,dy=\dfrac{1-x^2}{x}dx$ (при условии, что $x\neq 0$).

Интегрируя обе части последнего уравнения, имеем

$$\int y\,dy=\int\frac{dx}{x}-\int x\,dx\text{, откуда }\frac{y^2}{2}=\ln|x|-\frac{x^2}{2}+\tilde{C}\,,$$

где $\tilde{C}$ – произвольная постоянная.

Полученный общий интеграл данного дифференциального уравнения можно преобразовать к виду $\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{x^2}{2}=\ln|x|+\tilde{C}$ или $y^2+x^2=2\ln|x|+2\tilde{C}$.

Применяя свойство логарифмов и полагая $2\tilde{C}=C$, окончательно имеем $y^2+x^2=\ln x^2+C$.

б)* Заданное дифференциальное уравнение запишем в виде $y'=-\dfrac{2y}{y-2x}$ или в виде

$$y'=\frac{2y}{2x-y}\,. \qquad (1)$$

Заметим, что оно является однородным относительно x и y, так как при любом постоянном λ для правой части этого уравнения $(y'=f(x,y))$ справедливо тождество $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$. Действительно, для нашего случая имеем

$$\frac{2\lambda y}{2\lambda x-\lambda y}=\frac{2\lambda y}{\lambda(2x-y)}=\frac{2y}{2x-y}\,.$$

Решение такого дифференциального уравнения осуществляется с использованием подстановки $z = \frac{y}{x}$. Другими словами, решение такого дифференциального уравнения ищем в виде

$$y = z(x)x \ . \tag{2}$$

Тогда по правилу дифференцирования произведения двух функций имеем

$y' = z'x + z$ или

$$y' = \frac{dz}{dx}x + z \ . \tag{3}$$

Подставляя (3) и (2) в (1), получим уравнение $\frac{dz}{dx}x + z = \frac{2z\,x}{2x - z\,x}$ или $\frac{dz}{dx}x = \frac{2z\,x}{x(2-z)} - z$.

После преобразования правой части последнего уравнения имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{z^2}{2-z} \ .$$

Преобразовав его к дифференциальному уравнению с разделёнными переменными, получим

$$\frac{2-z}{z^2}dz = \frac{dx}{x} \ . \tag{4}$$

Интегрируя обе части уравнения (4), имеем

$$2\int \frac{dz}{z^2} - \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \ ,$$

откуда

$$-\frac{2}{z} - \ln|z| = \ln|x| + C \ .$$

С учётом используемой подстановки $z = \frac{y}{x}$ имеем $-\frac{2\,x}{y} - \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + C$ или окончательно $-\frac{2\,x}{y} = \ln|y| + C$.

Таким образом получен общий интеграл дифференциального уравнения (1).

в) Так как $y'' = \dfrac{d(y')}{dx}$, то заданное уравнение перепишем в виде $\dfrac{d(y')}{dx} = x + \sin x$ или $d(y') = (x + \sin x)dx$.

Интегрируя обе части последнего уравнения $\left(\int d(y') = \int (x + \sin x)dx\right)$, получим $y' = \dfrac{x^2}{2} - \cos x + C_1$, или $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{2} - \cos x + C_1$, или $dy = \left(\dfrac{x^2}{2} - \cos x + C_1\right)dx$.

Проинтегрировав обе части последнего уравнения $\left(\int dy = \int \dfrac{x^2}{2}dx - \int \cos x\,dx + C_1 \int dx\right)$, имеем общее решение $y = \dfrac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$ заданного дифференциального уравнения.

4. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 10y' + 25y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.

Выполнение задания

Согласно теории линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{1}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные; y_1, y_2 – линейно независимые частные решения заданного уравнения.

Для нахождения последних составляем характеристическое уравнение, которое для нашего случая имеет вид

$$k^2 - 10k + 25 = 0, \tag{2}$$

и вычисляем его корни.

Заметим, что $k^2 - 10k + 25 = (k-5)^2$. Из уравнения $(k-5)^2 = 0$ находим $k = 5$.

Так как уравнение (2) имеет единственный действительный двукратный корень $k = 5$, то линейно независимыми частными решениями заданного уравнения будут функции $y_1 = e^{5x}$, $y_2 = xe^{5x}$.

Тогда общее решение (1) данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}. \tag{3}$$

Для получения частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям находим

$$y' = 5C_1 e^{5x} + C_2 e^{5x} + 5C_2 x e^{5x}. \tag{4}$$

Подставляя условие $y(0) = 2$ в (3), имеем $2 = C_1 e^0 + C_2 0 e^0 = C_1$, откуда $C_1 = 2$.

Подставляя условие $y'(0) = 4$ в (4), имеем $4 = 5C_1 e^0 + C_2 e^0 + 5C_2 0 e^0 = 5C_1 + C_2$.

Из уравнения $5C_1 + C_2 = 4$ находим $C_2 = 4 - 5C_1$. С учётом найденного значения $C_1 = 2$ имеем $C_2 = 4 - 10 = -6$. Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в (3), получим искомое частное решение

$$y = 2e^{5x} - 6xe^{5x} = e^{5x}(2 - 6x).$$

5. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида:

а) $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$,

б) $y'' - y' = 2(1 - x)$.

Выполнение заданий:

а) Согласно теории общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = y_{\text{о}} + y_{\text{ч}}, \tag{1}$$

где $y_{\text{о}}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, т.е. уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = 0\,, \qquad (2)$$

$y_{\text{ч}}$ – какое-нибудь частное решение заданного неоднородного уравнения.

Для нахождения $y_{\text{о}}$ составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \qquad (3)$$

и вычислим его корни k_1, k_2 через дискриминант D.

$$D = (-3)^2 - 4\cdot 2 = 1\,,\ k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}\,.$$

Итак, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.

Так как характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$, то линейно независимыми частными решениями уравнения (2) будут являться функции $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$. Тогда

$$y_{\text{о}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}\,. \qquad (4)$$

Для нахождения $y_{\text{ч}}$ обратим внимание на правую часть заданного уравнения $f(x) = 10e^{-x} = P_0(x)e^{ax}$, где $P_0(x) = 10$ – многочлен нулевой степени, $a = -1$.

Заметим, что число $a = -1$ не является корнем характеристического уравнения (3). Поэтому $y_{\text{ч}}$ ищем в виде

$$y_{\text{ч}} = Ae^{-x}\,, \qquad (5)$$

где A – пока неизвестная постоянная, которую найдём методом неопределённых коэффициентов.

Для этого запишем

$$y'_{\text{ч}} = -Ae^{-x}\,,\ y''_{\text{ч}} = Ae^{-x}\,. \qquad (6)$$

Так как $y_ч$ является частным решением заданного уравнения, то подставив (5) и (6) в заданное уравнение вместо y, получим

$$Ae^{-x} - 3\left(-Ae^{-x}\right) + 2Ae^{-x} = 10e^{-x} \text{ или } 6Ae^{-x} = 10e^{-x},$$

откуда $6A = 10$. Следовательно, $A = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.

Подставив найденное значение A в (5), имеем

$$y_ч = \frac{5}{3}e^{-x}. \tag{7}$$

Далее, подставив (4) и (7) в (1), окончательно имеем $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{5}{3}e^{-x}$.

б) Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = y_о + y_ч, \tag{1}$$

где $y_о$ – общее решение уравнения

$$y'' - y' = 0, \tag{2}$$

$y_ч$ – какое-нибудь частное решение заданного уравнения.

Для нахождения $y_о$ составим и решим характеристическое уравнение

$$k^2 - k = 0. \tag{3}$$

$$(3) \Leftrightarrow k(k-1) = 0,$$

откуда $k_1 = 0$, $k_2 = 1$.

Линейно независимыми частными решениями уравнения (2) будут функции $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = e^x$. Тогда

$$y_о = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1 + C_2e^x. \tag{4}$$

Правая часть заданного уравнения имеет вид

$$f(x) = 2(1 - x) = (2 - 2x)e^{0x} = P_1(x)e^{ax},$$

где $P_1(x) = 2 - 2x$ – многочлен (в данном случае двучлен) первой степени, $a = 0$.

Так как число $a = 0$ является однократным корнем характеристического уравнения (3), то $y_ч$ ищем в виде

$$y_ч = (Ax + B)xe^{0x} = Ax^2 + Bx, \tag{5}$$

где A и B – пока неизвестные постоянные.

Далее находим

$$y'_ч = 2Ax + B, \ y''_ч = 2A. \tag{6}$$

Подставив (5) и (6) в заданное уравнение вместо y, получим

$$2A - (2Ax + B) = 2 - 2x \text{ или } (2A - B) - 2Ax = 2 - 2x.$$

На основе этого равенства имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2A - B = 2; \\ 2A = 2, \end{cases}$$

откуда $A = 1$, $B = 0$.

Подставив найденные значения A и B в (5), имеем

$$y_ч = x^2. \tag{7}$$

Подставив (4) и (7) в (1), имеем искомое решение

$$y = C_1 + C_2e^x + x^2.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Таблица основных интегралов

1. $\int x^a\, dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$ $\quad$ ($a \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$).

$\int dx = x + C$ $\quad$ (частный случай формулы 1 при $a = 0$).

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ $\quad$ ($a > 0$ и $a \neq 1$).

4. $\int e^x\, dx = e^x + C$ $\quad$ (частный случай формулы 3).

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$.

10. $\int \dfrac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1$.

Дополнение к таблице интегралов

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + C_1$.

12. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + C_1$.

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

14. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$.

2. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

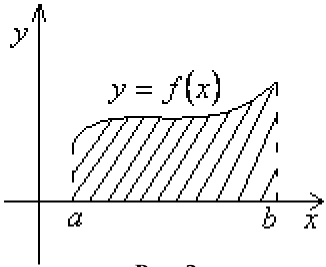

Рис. 3

Площадь S фигуры, ограниченной графиком непрерывной функции $y = f(x)$ $\left(f(x) \geq 0\right)$, осью абсцисс и вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, т.е. площадь криволинейной трапеции, изображённой на рис. 3, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx\,. \qquad (1)$$

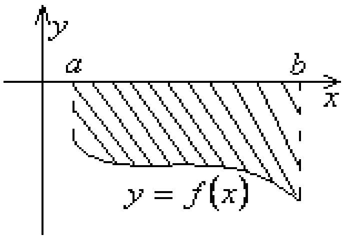

Рис. 4

Площадь S криволинейной трапеции, изображённой на рис. 4, вычисляется по формуле

$$S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|, \qquad (2)$$

так как здесь $f(x) \leq 0$.

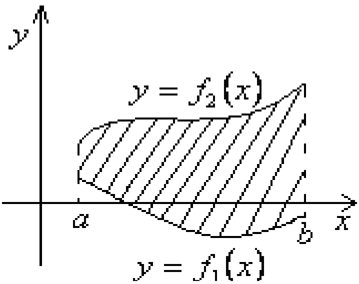

Рис. 5

Площадь S фигуры, изображённой на рис. 5, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx\,. \qquad (3)$$

СОДЕРЖАНИЕ