ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

♦ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ♦

УДК 338.2
ББК У291.21я73-5
М336

Р е ц е н з е н т

Доктор физико-математических наук, профессор
С.М. Дзюба

С о с т а в и т е л и:

В.Г. Матвейкин, ***Б.С. Дмитриевский***, ***А.М. Чаус***

М336 Оптимальное управление в экономике : метод. указания / сост. : В.Г. Матвейкин, Б.С. Дмитриевский, А.М. Чаус. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – 40 с. – 100 экз.

Посвящены вопросам обучения основным приёмам решения задач оптимального управления на промышленном предприятии в области экономики.

Предназначены для студентов 3-го курса специальности 080801 "Прикладная информатика в экономике".

УДК 338.2
ББК У291.21я73-5

© ГОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет" (ТГТУ), 2009

Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет"

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Методические указания для студентов 3-го курса
специальности 080801 "Прикладная информатика в экономике"

Тамбов
Издательство ТГТУ
2009

Учебное издание

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

С о с т а в и т е л и:
МАТВЕЙКИН Валерий Григорьевич,
ДМИТРИЕВСКИЙ Борис Сергеевич,

ЧАУС Андрей Михайлович

Методические указания

Редактор З.Г. Ч е р н о в а
Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Р ы ж к о в а

Подписано в печать 28.01.2009
Формат 60 × 84/16. 2,32 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 23

Издательско-полиграфический центр ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Оптимальное управление с давних времен интересует людей. И интерес этот понятен – каждому человеку хочется добиться в жизни как можно большего при имеющихся у него ограничениях и возможностях: полученного образования, физических возможностей, географического положения, способностей, экономического (материального) состояния, социальной обстановки и т.д. Понятно, что наилучший результат достигается при действиях, которые можно назвать оптимальными. Многие достижения в технике, освоении космоса и других областях были бы невозможными без развития теории оптимального управления.

Взаимосвязь оптимального управления в экономике с другими дисциплинами приведена на рис. 1.

Теория оптимального управления предполагает чёткую постановку задачи – что считать оптимальным управлением, каков должен быть результат, в каких пределах могут изменяться управляющие воздействия. Кроме того, должно быть математически строго описано поведение системы (объекта) в начале и в процессе управления.

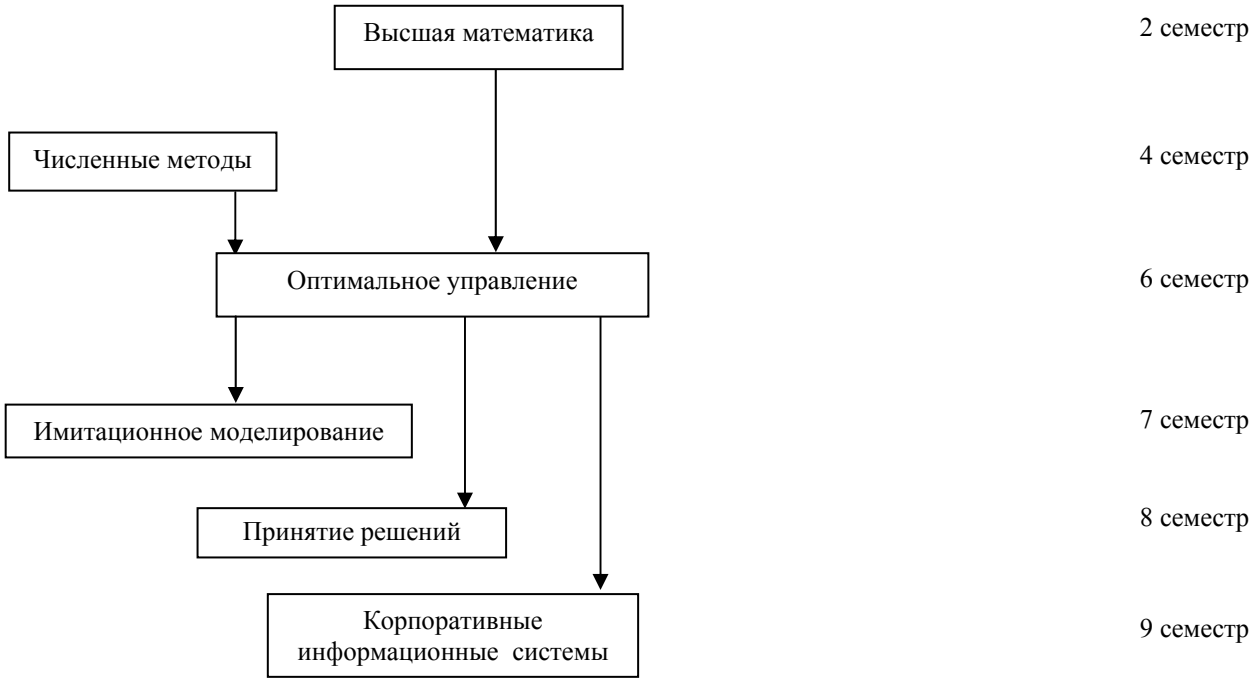

Рис. 1. Взаимосвязь оптимального управления в экономике с другими дисциплинами

В реальных ситуациях оптимальное управление не всегда может быть найдено. Но теория оптимального управления дает некую потенциальную границу достижимого результата; она позволяет определить теоретическую траекторию оптимального управления и поведение системы при таком управлении при некоторых допущениях, упрощениях и ограничениях.

Зная эти теоретические результаты, можно оценить – насколько реальный результат отличается от идеального и по возможности скорректировать управление системой для улучшения ее показателей.

Методические указания к лабораторным и практическим занятиям по теории оптимального управления в экономических системах призваны помочь студентам освоить задачи оптимизации наиболее важной области математических моделей и методов. Применение методов оптимизации предполагает предварительное описание некоторого объекта или процесса, составление его математической модели, выбор соответствующего математического метода решения, его алгоритмическую реализацию, а также анализ результатов решения.

В данной работе в сжатой и доступной форме изложены краткие теоретические сведения по курсу "Теория оптимального управления в экономических системах". Основные теоретические положения наглядно проиллюстрированы решением большого числа примеров и задач.

1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Математическое программирование – это область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Для практического решения экономической задачи математическими методами ее прежде всего следует записать с помощью математических выражений (уравнений, неравенств и т.п.), т.е. составить экономико-математическую модель данной задачи. Для этого необходимо:

1) ввести переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ величины, числовые значения которых однозначно определяют одно из возможных состояний исследуемого явления;

2) выразить взаимосвязи (присущие исследуемому параметру) в виде математических ограничений (уравнений, неравенств), налагаемых на неизвестные величины. Эти соотношения определяют систему ограничений задачи, которая образует область допустимых решений (область экономических возможностей). Решение (план) $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющее системе ограничений задачи, называют допустимым (базисным);

3) записать критерий оптимальности в форме целевой функции $z = z(X)$, которая позволяет выбрать наилучший вариант из множества возможных;

4) составить математическую формулировку задачи отыскания экстремума целевой функции при условии выполнения ограничений, накладываемых на переменные. Допустимый план, доставляющий целевой функции экстремальное значение, называется оптимальным и обозначается X_{opt} или X^*.

1.2. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ИХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ. ПРИВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

1.2.1. Каноническая форма записи задач линейного программирования

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \quad \text{(целевая функция), (1.1)}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{(система ограничений), (1.2)}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad \text{(ограничения на переменные). (1.3)}$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы ограничений

$C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ – матрица-строка коэффициентов целевой функции;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных.

Тогда каноническую форму записи задачи ЛП (1.1) – (1.3) можно представить в следующем матричном виде, эквивалентном первоначальному:

$$Z = CX \to \max; \quad (1.4)$$

$$AX = B\ ; \tag{1.5}$$

$$X \geq O\ , \tag{1.6}$$

где O – нулевая матрица-столбец той же размерности, что и матрица X.

Замечание. Не ограничивая общности, можно полагать, что свободные члены неотрицательны, т.е. $b_i \geq 0,\ i = \overline{1,\ m}$, иначе ограничительные уравнения можно умножить на (–1).

1.2.2. Симметричная форма записи задач линейного программирования

$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$	$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = \overline{1,\ m}$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ i = \overline{1,\ m}$
$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,\ n}$	$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,\ n}$

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)\ ; \tag{1.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = \overline{1,\ m_1}\ ; \tag{1.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = \overline{m_1 + 1,\ m_2}\ ; \tag{1.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{m_2 + 1,\ m}\ ; \tag{1.10}$$

$$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,\ n_1} \tag{1.11}$$

x_j – произвольного знака,

$$j = \overline{n_1 + 1,\ n}\ . \tag{1.12}$$

1.2.3. Приведение задачи к каноническому виду

Задачи ЛП могут представляться по-разному, но все их можно привести к каноническому виду, в котором целевая функция z должна быть максимизирована, а все ограничения должны быть заданы в виде равенств с неотрицательными переменными. Приведём произвольную задачу ЛП (1.7) – (1.12) к каноническому виду, используя следующие правила:

1) минимизация целевой функции z равносильна максимизации целевой функции $(-z)$. Так, если целевая функция исходной задачи исследуется на минимум, $z \to \min$, т.е. то можно рассмотреть функцию с противоположным знаком, которая будет стремиться к максимуму:

$$-z \to \max\ ;$$

2) ограничения-неравенства вида $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$ преобразуются в ограничения-равенства путём прибавления к левым частям *дополнительных* (*балансовых*) неотрицательных переменных $x_{n+i} \geq 0$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{\text{in}}x_n + x_{n+i} = b_i,\ ai = \overline{1, m_1}\ ;$$

3) ограничения-неравенства вида $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$ преобразуются в ограничения-равенства путём вычитания от левых частей дополнительных неотрицательных переменных $x_{n+i} \geq 0$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i,\ \ ai = \overline{m_1 + 1, m_2}\ ;$$

4) дополнительные переменные в целевую функцию вводятся с коэффициентами, равными нулю:

$$c_{n+i} = 0,\ i = \overline{1, m_2}\ ;$$

5) переменные любого знака заменяются разностью двух других неотрицательных переменных:

$$x_j = x_j^1 - x_j^2\ ,$$

где $x_j^1 > 0,\ ax_j^2 > 0$.

Замечание. Вводимые дополнительные переменные имеют определённый экономический смысл, прямо связанный с содержанием задачи. Так, в задачах об использовании ресурсов они показывают величину неиспользованного ресурса, в задачах о смесях – потребление соответствующего компонента сверх нормы.

1.3. НАХОЖДЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО ОПОРНОГО ПЛАНА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пусть в системе ограничений имеется единичный неотрицательный базис. Например, задача ЛП имеет вид

$$\begin{cases} z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max; \\ x_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ x_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ ..... \\ x_m + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0;\ j = \left(\overline{1, n}\right);\quad b_i \ge 0;\ i = \left(\overline{1, m}\right).$$

Говорят, что ограничение-равенство канонической задачи ЛП имеет *предпочтительный вид*, если при неотрицательности его правой части $\left(b_i \ge 0,\ i = \overline{1, m}\right)$ левая часть содержит переменную с единичным коэффициентом, которая во все остальные ограничения входит с коэффициентами, равными нулю. Если каждое ограничение канонической задачи ЛП имеет предпочтительный вид (т.е. *система ограничений приведена к единичному неотрицательному базису*), то *начальный опорный план* (т.е. неотрицательное базисное решение) строится следующим образом. Предпочтительные переменные выбираются в качестве *базисных,* а все остальные – в качестве *свободных* переменных. Свободные переменные приравниваются нулю: $x_j = 0, 1,\ j = \overline{m+1, n}$, тогда базисные переменные будут равны свободным членам: $x_j = b_j,\ j = \overline{1, m}$. Начальный опорный план задачи будет иметь вид

$$X_0 = \left(b_1, b_2, ..., b_m, \underbrace{0, 0, ..., 0}_{n-m} \right).$$

Если задача ЛП представлена в симметричном виде, т.е.

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max\ ;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0;\ j = \overline{(1, n)};\quad b_i \ge 0;\ i = \overline{(1, m)},$$

то привести систему ограничений к единичному неотрицательному базису можно, прибавляя к левым частям ограничительных неравенств балансовые неотрицательные переменные $x_{n+i} \ge 0,\ ai = \overline{(1, m)}$:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max\ ;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2; \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0;\ j = \overline{(1,\ n)};\quad b_i \ge 0;\ i = \overline{(1,\ m)}.$$

Полученная система ограничений эквивалентна исходной и имеет предпочтительный вид. Аналогично свободные переменные приравниваются нулю, а предпочтительные (базисные) переменные равны свободным членам. Начальный опорный план задачи будет иметь вид

$$X_0 = (0;\ 0;\ ...;\ 0;\ b_1;\ b_2;\ ...;\ b_m),\ z(X_0) = 0.$$

Когда задача ЛП представлена в следующей симметричной форме

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ge b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ge b_2; \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0;\ j = \overline{(1,\ n)};\quad b_i \ge 0;\ i = \overline{(1,\ m)}$$

привести задачу к каноническому виду можно, рассматривая целевую функцию с противоположным знаком и вычитая из левых частей системы ограничений балансовые переменные $x_{n+i} \ge 0,\ i = \overline{(1, m)}$:

$$z = -c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2; \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0;\ j = \overline{(1,\ n+m)};\quad b_i \ge 0;\ i = \overline{(1,\ m)}.$$

Тогда начальный план

$$X_0 = \left(\underbrace{0;\ 0;\ ...;\ 0;}_{n}\ -b_1, -b_2, ..., -b_m \right),\quad z(X_0) = 0$$

будет являться базисным решением задачи и называться *псевдопланом*. Псевдоплан не может быть опорным решением, так как содержит отрицательные компоненты.

Для получения предпочтительного вида вводят неотрицательные *искусственные переменные* и рассматривают вспомогательную *w*-задачу:

$$w = -x'_{n+1} - x'_{n+2} - ... - x'_{n+m} \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x'_{n+1} = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x'_{n+2} = b_2; \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n - x'_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{(1,n)},\quad x'_{n+i} \ge 0,\ i = \overline{(1,m)},\quad b_i \ge 0,\ i = \overline{(1,m)}.$$

Ее начальный опорный план будет иметь вид

$$X_0 = \left(\underbrace{0;\ 0;\ ...;\ 0;}_{n}\ b_1,\ b_2,\ ...,\ b_m \right), \quad w(X_0) = -b_1 - b_2 - ... - b_m .$$

Замечание. Если некоторые из ограничительных уравнений системы имеют предпочтительный вид (т.е. содержат базисную переменную), то искусственные переменные в них не вводят (что упрощает решение задачи).

1.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим задачу линейного программирования симметричного вида относительно двух переменных:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max; \tag{1.13}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le b_2; \\ ..... \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{1.14}$$

$$x_j \ge 0, \quad aj = 1,2. \tag{1.15}$$

1.4.1. Геометрическая интерпретация области допустимых значений

1. Любое из неравенств (1.14) на плоскости Ox_1x_2 определяет некоторую полуплоскость.
2. Система неравенств (1.14)–(1.15) определяет выпуклое множество (выпуклый многоугольник, неограниченную выпуклую многоугольную область, пустую область или точку), которое совпадает с многогранником решений *D*.

1.4.2. Геометрическая интерпретация целевой функции

- Уравнение $z = c_1 x_1 + c_2 x_2$ при фиксированном значении $z = z_0$ определяет на плоскости Ox_1x_2 прямую $z_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2$. При изменении *z* получают семейство параллельных прямых, называемых *линиями уровня.*
- Вектор коэффициентов целевой функции $\vec{c} = (c_1;\ c_2)$ называется *градиентом функции.* Он перпендикулярен линиям уровня.
- Градиент функции $\vec{c} = (c_1;\ c_2)$ показывает направление наибольшего возрастания целевой функции.
- Антиградиент $-\vec{c} = (-c_1;\ -c_2)$ показывает направление наибольшего убывания целевой функции.

1.4.3. Графическое решение задач линейного программирования

Суть графического метода решения задач ЛП основывается на следующих утверждениях:

1) совокупность опорных планов задачи ЛП совпадает с системой вершин многогранника решений;
2) целевая функция достигает оптимального значения в вершине многогранника решений.

Для практического решения задачи (1.13) – (1.15) необходимо:

1) построить с учётом системы ограничений область допустимых решений *D* (многогранник планов);
2) построить вектор градиента $\vec{c}$;
3) построить перпендикулярно к нему в области допустимых решений одну из прямых семейства $z = \text{const}$;
4) искомая точка экстремума X_{opt} найдется параллельным перемещением вспомогательной прямой $z = \text{const}$ в направлении вектора $\vec{c}$ (если ищется $z_{\max}$) и в направлении вектора $-\vec{c}$ (если ищется $z_{\min}$);
5) координаты точки X_{opt} можно определить, решив совместно уравнения прямых, пересекающихся в этой точке, или по чертежу.

Замечание. Если оптимальное значение целевая функция принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин. *Выпуклой линейной комбинацией* $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_k$ точек называется сумма

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_k X_k,$$

где $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ i = \overline{1,\ k}.$

1.4.4. Задача со многими переменными

Задачу со многими переменными можно решить графически, если в её канонической записи присутствуют не более двух свободных переменных. Чтобы решить такую задачу, необходимо:

1) выделить некоторый базис переменных в системе ограничительных уравнений;
2) опустить базисные переменные и перейти к эквивалентной системе неравенств;
3) выразить целевую функцию через свободные переменные;
4) полученную двумерную задачу рушить обычным графическим способом;
5) найдя две координаты оптимального решения, подставить их в ограничительные уравнения и определить остальные координаты оптимального плана.

2. СИМПЛЕКС-МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Одним из универсальных методов решения задач ЛП является симплекс-метод или метод последовательного улучшения плана. Если задача разрешима, то ее оптимальный план совпадает, по крайней мере, с одним из опорных решений системы ограничений. Именно этот опорный план и отыскивается симплекс-методом в результате упорядоченного перебора опорных решений. Упорядоченность понимается в том смысле, что при переходе от одного опорного плана к другому соответствующие им значения целевой функции возрастают (или, по крайней мере, не убывают). Так как общее число опорных решений конечно, то через определённое число шагов будет либо найден оптимальный опорный план, либо установлена неразрешимость задачи. Чтобы получить новый опорный план, первоначальный базис преобразовывают в новый. Для этого из первоначального базиса удаляют некоторую базисную переменную и вместо неё вводят другую из группы свободных.

С геометрической точки зрения перебор опорных планов можно толковать как переход по ребрам от одной вершины многогранника решений к другой по направлению к вершине X_{opt}, в которой целевая функция достигает оптимального значения.

2.1. ЭТАПЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Решение задачи ЛП складывается из нескольких этапов:

1. Задача должна быть приведена к каноническому виду, притом все элементы столбца свободных членов должны быть неотрицательными.
2. Найден начальный опорный план задачи.
3. Целевая функция выражена через свободные переменные и максимизирована.
4. По симплексному методу находится оптимальный план задачи.

2.2. НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ОПОРНОГО ПЛАНА

Пусть система ограничений имеет предпочтительный вид, т.е. найден начальный опорный план задачи. Не ограничивая общности, предположим:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{1n} x_n = b_1; \\ x_2 + a_{1m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{2n} x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{mm+1} x_{m+1} + \ldots + a_{mn} x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{(1,n)},\quad b_i \geq 0,\ \ i = \overline{(1,m)}.$$

Исключим базисные переменные из целевой функции. Для этого выразим их через свободные переменные из системы ограничительных уравнений:

$$x_i = b_i - (s_{im} x_{m+1} + \ldots + a_{in} x_n),\quad x_j \geq 0,\ \ j = \overline{(1,n)},$$

и подставим в выражение функции z. Получим приведенные коэффициенты целевой функции

$$z = z_0 - c'_{m+1} x_{m+1} - c'_{m+2} x_{m+2} - \ldots - c'_{m+n} x_{m+n} \to \max.$$

Составим исходную симплекс-таблицу, записывая приведенные коэффициенты целевой функции в z-строку с противоположными знаками, а константу z_0 своим знаком.

Симплекс-таблица

Б	З	x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_{m+k}	…	x_n
x_1	b_1	1	0	…	0	$a_{1,\,m+1}$	…	$a_{1,\,m+л}$	…	a_{1n}
x_2	b_2	0	1	…	0	$a_{2,\,m+1}$	…	$a_{2,\,m+л}$	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_l	b_l	0	0	…	0	$a_{l,\,m+l}$	…	$a_{l,\,m+л}$	…	a_{ln}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	b_m	0	0	…	1	$a_{m,\,m+1}$	…	$a_{m,\,m+л}$	…	a_{mn}
z	z_0	0	0	…	0	c'_m	…	c'_{m+k}	…	c'_n

1. Если в z-строке симплекс-таблицы, содержащей некоторый опорный план, нет отрицательных элементов (не считая свободного члена z_0, то данный план оптимален и задача решена. К тому же, если в z-строке симплексной таблицы, содержащей оптимальный план, нет нулевых элементов (не считая z_0, и элементов, соответствующих базису), то оптимальный план единственный. Если же в z-строке последней симплексной таблицы, содержащей оптимальный план, есть хотя бы один нулевой элемент, соответствующий свободной переменной, то задача ЛП имеет бесконечное множество решений.

2. Если в z-строке есть хотя бы один отрицательный элемент (не считая z_0), а в любом столбце с таким элементом есть хотя бы один положительный, то можно перейти к новому опорному плану, более близкому к оптимальному. Для этого столбец с отрицательным элементом c'_{m+k} в z-строке берут за разрешающий (если в z-строке отрицательных элементов несколько, то за разрешающий выбирают столбец с наименьшим элементом). Следовательно, столбец с номером $m+k$ станет *ведущим* или *разрешающим* и переменная x_{m+k} будет включена в базис.

3. Среди элементов ведущего столбца находят положительные. Если таковых нет, то задача не имеет решений в силу неограниченности целевой функции $(z \to \infty)$.

4. Для положительных элементов $a_{1,\,m+k}$ подсчитывают симплексные отношения (отношения свободных членов к соответствующим положительным элементам ведущего столбца) $b_i / a_{1,\,m+k}$, $i = \overline{(1,m)}$ и выбирают среди них наименьшее. Пусть минимальное симплексное отношение будет в строке *l*. Строка с номером *l* станет ведущей (разрешающей), а элемент $a_{1,\,m+k}$ *– ведущим.* Переменная x_1 выйдет из базиса.

5. Выполняют одну итерацию по замещению базисной переменной методом Жордана-Гаусса. Строят новую симплексную таблицу и переходят к первому пункту.

Замечание. Опорное решение называется *невырожденным,* если все его компоненты положительные, в противном случае оно называется *вырожденным*. Задача ЛП называется *невырожденной,* если все ее опорные планы невырожденные. Если среди опорных решений есть хотя бы одно вырожденное, то задача называется *вырожденной.* В этом случае возможен вариант, когда значение целевой функции при переходе от одного опорного плана к другому не улучшится и может произойти так называемое зацикливание. Для избежания этого фактора изменяют последовательность вычислений путем изменения разрешающего столбца.

2.3. МЕТОД ИСКУССТВЕННОГО БАЗИСА

Если начальный опорный план задачи находится методом искусственного базиса, то сначала надо решить симплекс-методом вспомогательную w-задачу. При этом необходимо в начальную симплексную таблицу включить и z-строку, соответствующую целевой функции исходной задачи. Для составления симплекс-таблицы из функции z исключают базисные переменные, а из функции – искусственные базисные переменные. В ходе решения возможны случаи:

1) в оптимальном решении w-задачи хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля (т.е. не вышла из базиса). Тогда исходная z-задача не имеет допустимых планов (т.е. ее система ограничений несовместна);

2) в оптимальном плане новой w-задачи все искусственные переменные равны нулю (т.е. вышли из базиса), а значит, и искусственная целевая функция равна нулю. Тогда значения оставшихся координат плана дадут начальный опорный план исходной задачи, которую можно решить симплекс-методом.

2.4. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

С любой задачей ЛП тесно связана другая линейная задача, называемая *двойственной*. Первоначальная задача называется *прямой* (или исходной). Пара симметричных двойственных задач имеет вид

Прямая задача	Двойственная задача
$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$	$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,\ m}$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \ge c_j,\ j = \overline{1,\ n}$
$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,\ n}$	$y_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,\ m}$

Экономически пара взаимно двойственных задач может быть интерпретирована, например, так.

Прямая задача, сколько и какой продукции $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}$ надо произвести, чтобы при заданных стоимостях единицы продукции $c_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}$ объёмах имеющихся ресурсов $b_j \ge 0,\ j = \overline{1,m}$ и нормах расходов $a_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ максимизировать выпуск продукции в стоимостном выражении?

Двойственная задача, какова должна быть оценка единицы каждого из ресурсов $y_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}$ чтобы при заданных количествах ресурсов $b_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}$ величинах стоимости единицы продукции $c_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}$ и нормах расходов $a_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ минимизировать общую оценку затрат на все ресурсы?

2.5. ПРАВИЛА ПОСТРОЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ К ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ОБЩЕМ ВИДЕ

Прямая задача	Двойственная задача
$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$	$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,\ m_1}$	$y_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,\ m_1}$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{m_1+1,\ m}$	y_i – произвольные, $i = \overline{m_1+1,\ m}$
$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,\ n_1}$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j,\ j = \overline{1,\ n_1}$
x_j – произвольные, $j = \overline{n_1+1,\ n}$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j,\ j = \overline{n_1+1,\ n}$

1. Упорядочивается запись исходной задачи: если целевая функция задачи исследуется на max, то ограничения должны иметь знак ≤ или =, а если на min, то ограничения должны иметь знак ≥ или =.

2. Каждому ограничению исходной задачи ставится в соответствие двойственная переменная $y_i,\ i = \overline{1,m}$ и наоборот, т.е. число переменных двойственной задачи равно числу ограничений прямой задачи, а число ограничений двойственной задачи равно числу переменных исходной задачи.

3. Если целевая функция прямой задачи исследуется на max, то целевая функция двойственной задачи исследуется на min, и наоборот.

4. Коэффициенты целевой функции прямой задачи становятся свободными членами системы ограничений двойственной задачи.

5. Свободные члены системы ограничений прямой задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной.

6. Матрицы коэффициентов систем ограничений прямой и двойственной задач являются транспонированными друг к другу.

7. Если на переменную $x_j\left(j=\overline{1,n_1}\right)$ прямой задачи наложено ограничение на знак, то *j*-е ограничение двойственной задачи записывается в виде неравенства, и наоборот.

8. Если переменная $x_j\left(j=\overline{n_1+1,n}\right)$ исходной задачи произвольная, то *j*-е ограничение двойственной задачи имеет знак равенства.

9. Если в прямой задаче имеются ограничения-равенства, то на соответствующие переменные двойственной задачи не налагаются условия неотрицательности.

2.6. ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

Симплекс-метод применяется для решения задач с неотрицательными свободными членами b_i и произвольными по знаку приведёнными коэффициентами целевой функции c_i'. Иногда бывает легче найти базис, удовлетворяющий признаку оптимальности все $(c_j' \ge 0),$ но не удовлетворяющий критерию допустимости (не все $(b_j \ge 0).$ Вариант симплекс-метода, применяемый для решения таких задач, называется *двойственным симплекс-методом.* С его помощью решаются задачи линейного программирования вида

$$z=-\sum_{j=1}^{n} c_j' x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i=\overline{1,\ m},$$

$$x_j \ge 0,\quad j=\overline{1,\ n},$$

где система ограничений имеет предпочтительный вид и все приведённые коэффициенты целевой функции $c_j' \ge 0,\ j=\overline{1,n}.$ При этом условие $b_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}$ не требуется. Определённую таким образом задачу будем называть *задачей в двойственной базисной форме.* Она имеет базисное, но не опорное решение.

Двойственный симплекс-метод, применяемый к задаче в двойственной базисной форме, приводит к последовательности задач с возрастающим значением целевой функции, неотрицательными коэффициентами $c_j',\ j=\overline{1,n}$ и значениями $b_i,\ i=\overline{1,m}$ любого знака.

Двойственный симплекс-метод называют методом последовательного улучшения оценок. Преобразования задачи выполняются до тех пор, пока не будет установлено, что исходная задача не имеет допустимого решения или будет получена задача с допустимым базисным планом (все $b_i \ge 0$), который одновременно будет и оптимальным.

Для решения задачи двойственным симплекс-методом необходимо использовать следующий порядок:

1. Составить исходную таблицу Гаусса, записывая приведенные коэффициенты целевой функции в *z*-строку с противоположными знаками, а константу z_0 со своим знаком.

2. Выяснить, имеется ли хотя бы одно отрицательное число в столбце значений свободных членов. Если все $b_i \ge 0,\ i=\overline{1,m},$ то полученное базисное решение и значение целевой функции, записанное в столбце свободных членов, дают оптимальное решение исходной задачи (так как по предположению все $c_j' \ge 0,\ j=\overline{1,n}$).

3. Среди отрицательных коэффициентов $b_i,\ i=\overline{1,m},$ выбрать минимальный. Пусть это b_1. Следовательно, строка с номером *l* – ведущая и переменную x_1 исключают из базиса.

4. В ведущей строке проверить знаки всех коэффициентов $a_{1j},\ j=\overline{1,n}.$ Если все $a_{1j} \ge 0,\ j=\overline{1,n},$ то исходная задача неразрешима в силу несовместности системы ограничений.

5. Среди отрицательных коэффициентов $a_{1j},\ j=\overline{1,n}$ ведущей строки выбрать минимальное *двойственное отношение* (отношение элементов *z*-строки, взятых со знаком минус, к соответствующим отрицательным элементам ведущей строки):

$$\min_{a_{1j}<0}\left(\frac{c_j'}{a_{1j}}\right)=\frac{c_k}{a_{1k}}.$$

Следовательно, столбец с номером *k* – ведущий, а элемент a_{1k} – разрешающий. Переменную x_k включить в базис.

6. Пересчитать таблицу методом Жордана-Гаусса с ведущим элементом a_{1k} и перейти к пункту 2.

3. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

3.1. ЗАДАЧА ДОЛГОСРОЧНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Для предприятия, обладающего определенными ресурсами и технологиями на момент начала планирования, разработать оптимальный план производства и сбыта, учитывающий ограничения, накладываемые внешней и внутренней средой. За критерий оптимальности задачи долгосрочного планирования производства и сбыта следует принимать общую чистую дисконтированную прибыль за весь горизонт планирования. Необходимость дисконтирования составляющих прибыли определяется требованиями рекомендаций по оценке эффективности инвестиционных проектов и составления бизнес-планов инвестиционных проектов. Дисконтирование денежных потоков позволяет учесть разновременность затрат и поступлений, сводя их к единому моменту времени с использованием некоторой ставки дисконтирования, определяемой участниками инвестиционного проекта.

Данная задача отличается от традиционной задачи распределения производственных ресурсов, решаемой методом линейного программирования следующим:

1. В качестве целевой функции используется общая чистая дисконтированная прибыль до исчисления налога на прибыль за весь период планирования, учитывающая *схему инвестиционных вложений*, что позволяет увидеть структуру себестоимости:

$$Q = \sum_{t=1}^{T} \left[d_t \sum_{i=1}^{n} q_{it} x_{it} - d_{t-1} I(b_{t-1}, b_t) \right] \to \max, \tag{3.1}$$

где t – номер интервала времени; T – число интервалов времени, на которые разбит горизонт планирования; d_t – коэффициент дисконтирования для t-го интервала времени; Q – общая прибыль предприятия за T интервалов времени; n – число планируемых к выпуску продуктов; q_{it} – прибыль от единицы i-го продукта за t-й интервал времени; x_{it} – объём продаж i-го продукта за t-й интервал времени; b_t – запас ресурсов предприятия на t-м интервале времени; $I(b_{t-1}, b_t)$ – величина инвестиций на увеличение запасов ресурсов от b_{t-1} до b_t. Прибыль от единицы i-го продукта на t-м интервале времени находим следующим образом:

$$q_{it} = p_{it} - c_{it} - s_{it}, \tag{3.2}$$

где p_{it} – значение цены единицы i-го продукта на t-м интервале времени; c_{it} – себестоимость i-го продукта на t-м интервале времени; s_{it} – *расходы на инновационную деятельность*, распределяемые на единицу i-го продукта за t-й интервал времени.

При этом существуют ограничения на значения цены от единицы выпускаемой продукции на t-м интервале времени:

$$\begin{cases} p_{it}^{\min} \le p_{it} \le p_{it}^{\max}, \ i = 1, 2, ..., n; \\ x_{it}^{\max} = f_{it}(p_{it}), \end{cases} \tag{3.3}$$

где $p_{it}^{\min}$ – минимальное значение цены единицы i-го продукта на t-м интервале времени; $p_{it}^{\max}$ – максимальное значение цены единицы i-го продукта на t-м интервале времени; $f_{it}(p_{it})$ – *значение функции спроса* на i-й продукт на t-м интервале времени, определяемое исходя из цены единицы i-го продукта на t-м интервале времени.

Таким образом, коэффициенты в уравнениях целевой функции априори не заданы и их надо определять в ходе решения.

2. Имеются *ограничения* как *на объем продаж*, так и *на расход ресурсов* для t-го интервала времени:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_{it} \le b_{jt}, \ j = 1, 2, ..., m; \\ x_{it}^{\min} \le x_{it} \le x_{it}^{\max}, \ i = 1, 2, ..., n; \end{cases} \tag{3.4}$$

$$b_{jt}^{\max} \ge b_{jt} \ge b_{jt-1}.$$

Здесь a_{ji} – расход j-го ресурса на производство единицы i-го продукта; m – число ресурсов, необходимых для производства n продуктов; $x_{it}^{\max}$ – максимальный объём продаж i-го продукта за t-й интервал времени; $x_{it}^{\min}$ –

минимальный объём продаж *i*-го продукта за *t*-й интервал времени; $b_{jt}^{\max}$ – максимально допустимый расход *j*-го ресурса, определяемый исходя из условия выполнения максимальной производственной программы ($x_t^{\max}$).

Таким образом, и коэффициенты при неизвестных в уравнениях ограничений и свободные члены априори не заданы и их необходимо определять в ходе решения.

3. В целевой функции учитываются *инвестиции на увеличение запасов ресурсов*:

$$I(b_{t-1}, b_t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} [(b_{jt} - b_{jt-1}) \Delta I_{jt}^{+}], \ \ \forall\, j \ni b_{jt} > b_{jt-1}; \\ 0, \ \ \forall\, j \ni b_{jt} = b_{jt-1}; \\ \sum_{j=1}^{m} [(b_{jt} - b_{jt-1}) \Delta I_{jt}^{-}], \ \ \forall\, j \ni b_{jt} < b_{jt-1}, \end{cases} \tag{3.5}$$

где ΔI_{jt}^{+} – величина инвестиций, необходимая для увеличения запаса *j*-го ресурса в *t*-й интервал времени на единицу; ΔI_{jt}^{-} – ликвидационная стоимость "лишнего" ресурса, получаемая предприятием при уменьшении запаса *j*-го ресурса в *t*-й интервал времени на единицу.

Это означает, что свободный член в уравнении целевой функции априори не задан.

Таким образом, разработка плана производства предприятия на долгосрочную перспективу представлена в виде квазистатической математической модели (3.1) – (3.5).

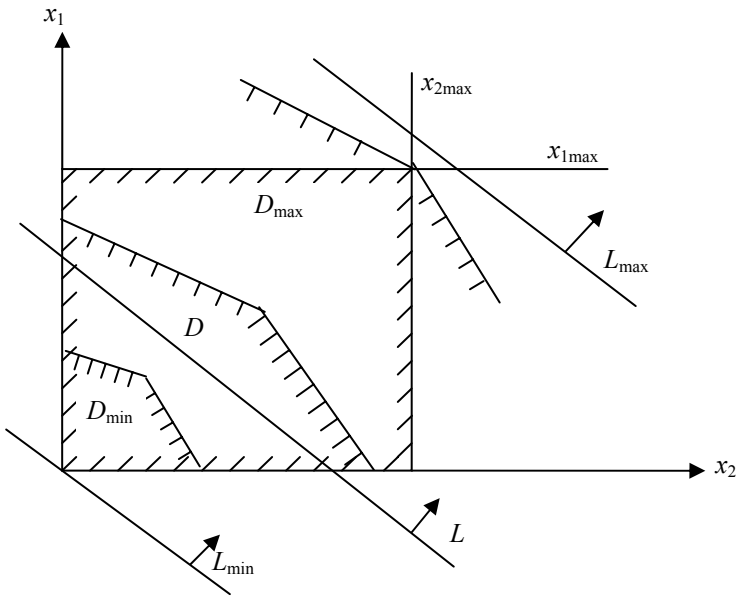

Рис. 1. Графическая иллюстрация задачи долгосрочного планирования

Графическая иллюстрация данной задачи приведена на рис. 1. На нем представлены три различных варианта взаимного расположения системы ограничений и целевой функции:

1-й вариант соответствует "минимальному" расходу ресурсов. Допустимая область *D* – min. При этом величина инвестиций в увеличение запаса ресурсов равна нулю. Тогда целевая функция имеет вид $L_{\min}$. На рисунке приведено ее начальное положение, от которого мы можем увеличивать инвестиции.

2-й вариант соответствует "максимальному" расходу ресурсов. Допустимая область – $D_{\max}$. При этом определена некоторая величина инвестиций в увеличение запаса ресурсов. Целевая функция имеет вид: $L_{\max}$. На рисунке приведено ее начальное положение, от которого мы можем увеличивать инвестиции, и оно расположено выше допустимой области $D_{\max}$, т.е. решение задачи в данном случае не существует.

3-й вариант является промежуточным между первым и вторым ("минимальным" и "максимальным"). Свободный член в уравнении целевой функции определяет начальное положение линии уровня целевой функции *L*, от которого мы можем увеличивать инвестиции). Допустимая область *D* расположена между начальным положением линии *L* и ограничениями. Ее и надо определить в ходе решения.

3.2. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Транспортная задача (ТЗ) является важнейшей частной задачей линейного программирования, имеющей обширные практические приложения не только к проблемам транспорта. Она выделяется в линейном программировании определённостью экономической характеристики, особенностями математической модели, наличием специфических методов решения.

Простейшая формулировка транспортной задачи по критерию стоимости следующая: в m пунктах отправления $A_1, A_2, ..., A_m$ (будем называть их *поставщиками*) находится соответственно $a_1, a_2, ..., a_m$ единиц однородного груза (*ресурсов*), который должен быть доставлен n *потребителям* $B_1, B_2, ..., B_n$ в количествах $b_1, b_2, ..., b_n$ единиц соответственно (назовем их *потребностями).* Известны транспортные издержки c_{ij} перевозок единицы груза из i-го пункта отправления j-й пункт потребления ($i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$).

Требуется спланировать перевозки (т.е. указать, сколько единиц груза должно быть отправлено от i-го поставщика j-му потребителю) так, чтобы:

1) весь груз из пунктов отправления был вывезен;
2) потребности каждого пункта потребления были полностью удовлетворены;
3) суммарные издержки на перевозки были минимальными.

Для наглядности условия транспортной задачи представим в виде таблицы, которая называется транспортной или распределительной.

Транспортная таблица

Поставщик	Потребитель				Запас
	B_1	B_1		B_n	
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	…	x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	…	x_{2n} c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	…	x_{mn} c_{mn}	a_m
Потребность	b_1	b_1		b_n	

Здесь количество груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, равно $x_{ij}\ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$. Предполагается, что все $x_{ij} \ge 0\ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$. Запас груза в i-м пункте отправления определяется величиной $a_i \ge 0,\ i=\overline{1,m},$ а потребность j-го пункта назначения в грузе – $b_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}.$ Матрица $\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ называется *матрицей тарифов* (издержек или транспортных расходов). Планом транспортной задачи называется матрица перевозок $X=\left(x_{ij}\right)_{m\times n}$. Если в плане перевозок переменная x_{ij} принимает положительное значение, то его будем записывать в соответствующую клетку (i, j) и считать ее загруженной (занятой) или *базисной*, если же $x_{ij} = 0$, то клетку (i, j), как правило, оставляют *свободной.*

Составим *математическую модель* задачи транспортного типа. Общие суммарные затраты, связанные с реализацией плана перевозок, можно представить целевой функцией

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min\,. \tag{3.6}$$

Переменные x_{ij} должны удовлетворять ограничениям по запасам (3.7), по потребностям (3.8) и условиям неотрицательности (3.9). В математической записи это можно представить так:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,\ m}\ ; \tag{3.7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,\ n}\ ; \tag{3.8}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ \ i = \overline{1,\ m},\quad j = \overline{1,\ n}\ . \tag{3.9}$$

Таким образом, среди множества решений системы ограничений (3.7)–(3.8) требуется найти такое неотрицательное решение, которое минимизирует целевую функцию (3.6). Полученная задача является задачей линейного программирования. Решение ТЗ проводится с помощью общего приема последовательного улучшения плана, который реализован в симплексном методе.

В общем случае транспортная задача решается в три этапа:

1. Определение исходного опорного плана.
2. Оценка этого плана.
3. Переход к следующему плану путём однократной замены одной из базисных переменных на свободную.

Теорема. Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы в пунктах отправления были равны потребностям в грузе в пунктах назначения, т.е. выполнялось равенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\ . \tag{3.10}$$

Если условие (3.10) выполнено, то модель ТЗ называется *закрытой* (сбалансированной). Задача с отсутствием баланса между ресурсами и потребностями называется *открытой* $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$.

1. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то в математическую модель вводится фиктивный (n + 1)-й потребитель B_{n+1}, для которого потребность равна разности между суммарной мощностью поставщиков и фактическим спросом потребителей, т.е. $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. Все тарифы на доставку груза с фиктивными потребностями считают равными нулю, т.е. $c_{i,\,n+1} = 0,\ i = \overline{1,m}.$ Поэтому для новой задачи значение целевой функции не изменится. Иными словами, фиктивный потребитель не нарушит совместности системы ограничений. В транспортной таблице задачи предусматривается дополнительный столбец.

2. Если же $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводится фиктивный (m + 1)-й поставщик A_{m+1}. Для этого в транспортную таблицу добавляется одна строка, запас груза для которой записывают равным $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, а стоимости перевозок полагают равными нулю: $c_{i,\,m+1} = 0,\ i = \overline{1,n}.$ Поэтому в данном случае значение целевой функции не изменится, а система ограничений останется совместной.

Приведем алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов:

1. Сравнивают общий запас груза с суммарным спросом и в случае нарушения баланса приводят задачу к закрытой модели.
2. Условие задачи записывают в форме транспортной таблицы.
3. Строят начальный опорный план перевозок.
4. Проверяют условие для базисных клеток (их должно быть m+n-1). Если это условие не выполняется, то в одну из свободных клеток (как правило, в клетку с наименьшим тарифом) вписывают число 0, и такая клетка считается базисной. Однако число 0 записывают лишь в те свободные клетки, которые не образуют циклов с ранее занятыми клетками.
5. Вычисляют потенциалы u_i и v_j. Каждому поставщику (каждой строке) ставят в соответствие некоторое число u_i, называемое *потенциалом поставщика* A_i $(i = \overline{1,m})$, и записывают справа от таблицы, а каждому по-

требителю (или столбцу) – некоторое число v_j, называемое *потенциалом потребителя* B_j ($j = \overline{1,n}$), записывают под таблицей. Числа u_i и v_j выбирают так, чтобы в любой базисной клетке их сумма равнялась тарифу, т.е. $u_i + v_j = c_{ij}$. Так как количество всех потенциалов u_i и v_j – составляет $m + n$, а занятых клеток $m + n - 1$, то для определения чисел u_i и v_j – придется решать систему из $m + n - 1$ уравнений с $m + n$ неизвестными. Поэтому одному из неизвестных потенциалов придают произвольное значение. Тогда остальные определяются однозначно.

6. Для проверки оптимальности плана просматривают свободные клетки, для которых определяют оценки Δ_{ij} – разность между тарифом клетки и суммой потенциалов строки и столбца, т.е. $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$. Экономически оценка показывает, на сколько денежных единиц изменятся транспортные издержки от загрузки данной клетки единицей груза. Если все оценки неотрицательные, т.е. $\Delta_{ij} \geq 0$, то план оптимальный и остается подсчитать транспортные расходы. Иначе переходят к п. 7.

7. Из отрицательных оценок ($\Delta_{ij} \leq 0$) выбирают минимальную. Пусть это будет Δ_{ik}. Тогда клетку (l, k) вводят в число базисных, т.е. строят цикл по загруженным клеткам с началом в этой клетке и перераспределяют поставки так, чтобы баланс цикла сохранился. Для этого вершинам цикла приписывают чередующиеся знаки "+" и "–" (свободной клетке (l, k) приписывают положительный знак "+"). В "минусовых" клетках отыскивают наименьший груз w, т.е. $w = \min x_{ij} = x_{st}$, который и "перемещается" по клеткам замкнутого цикла, т.е. прибавляется к перевозкам x_{ij} – в клетках со знаком "+" (включая свободную) и вычитается из перевозок x_{ij} в клетках со знаком "–". Следовательно, клетка (s, t) станет свободной и переменная x_{st} уйдет из базиса. Значение остальных базисных переменных переписываются. Таким образом, получают новую транспортную таблицу с улучшенным планом, для которого транспортные издержки изменятся на величину $\Delta_{lk} x_{st}$. Переходят к пункту 4.

Замечания.

1. При сдвиге по циклу вместо одной может освободиться сразу несколько клеток (вырожденная задача). Свободной оставляют только одну (с наибольшим тарифом), а в остальные освободившиеся клетки вписывают нули и считают их загруженными.

2. Если все оценки $\Delta_{ij} > 0$, то оптимальный план единственный. Если существует хотя бы одна оценка $\Delta_{ij} = 0$, то задача имеет множество оптимальных планов, которое представляет собой выпуклую линейную комбинацию оптимальных решений. Другие оптимальные планы можно получить, загружая по очереди клетки с нулевыми оценками.

4. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

4.1. ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ РЕСУРСОВ

Условия задачи

Есть три вида станков: A1, A2, A3. На этих станках последовательно обрабатываются детали трех видов: B1, B2, B3. Известно сколько часов каждая деталь изготавливается на каждом станке, сколько может проработать каждый станок и какая прибыль может быть получена при продаже одной детали каждого типа. Данные приведены в таблице. Требуется найти оптимальный план работы станков, т.е. установить, сколько деталей и каких видов надо выпустить, чтобы получить максимальную прибыль.

Задание 1: Построить математическую модель задачи; привести математическую модель задачи к каноническому виду; найти начальный опорный план задачи; решить задачу графическим способом; (если это невозможно – обосновать почему); решить задачу симплекс методом.

Задача 1.1

Станки	B1	B2	B3	Фонд времени, ч
A1	2	4	0	12
A2	7	2	2	8
A3	5	8	4	48
Прибыль	3	4	3	

Необходимо, чтобы станок A2 был загружен максимально.

Задача 1.2

Станки	B1	B2	B3	Фонд времени, ч
A1	3	2	4	198
A2	2	3	1	96
A3	6	5	1	228
Прибыль	48	30	29	

Необходимо, чтобы станок A1 был загружен максимально.

Задача 1.3

Станки	B1	B2	B3	Фонд времени, ч
A1	4	4	10	50
A2	3	12	2	40
A3	1	5	2	30
Прибыль	120	252	112	

Необходимо, чтобы станок A2 был загружен максимально.

Задача 1.4

Станки	B1	B2	B3	Фонд времени, ч
A1	3	2	0	18
A2	0	1	1	4
A3	1	2	0	10
Прибыль	2	5	1	

Необходимо, чтобы станок A2 был загружен максимально.

Задача 1.5

Станки	B1	B2	B3	Фонд времени, ч
A1	2	1	3	18
A2	2	0	0	10
A3	4	0	3	24
Прибыль	6	1	9	

Необходимо, чтобы станок A1 был загружен максимально.

Задача 1.6

Станки	B1	B2	B3	Фонд времени, ч
A1	0	1	1	8
A2	1	1	0	5
A3	0	2	1	12
Прибыль	1	5	2	

Необходимо, чтобы станок A2 был загружен максимально.

Задача 1.7

Станки	B1	B2	B3	Фонд времени, ч
A1	2	1	0	14
A2	1	1	0	8
A3	0	1	1	3
Прибыль	3	4	1	

Необходимо, чтобы станок A3 был загружен максимально.

Задача 1.8

Станки	B1	B2	B3	Фонд времени, ч
A1	0	1	1	7
A2	2	1	0	14
A3	1	1	0	10
Прибыль	4	5	1	

Необходимо, чтобы станок A1 был загружен максимально.

Задача 1.9

Станки	B1	B2	B3	Фонд времени, ч
A1	1	2	0	10
A2	2	1	0	8
A3	1	0	1	3
Прибыль	5	2	1	

Необходимо, чтобы станок A3 был загружен максимально.

Задача 1.10

Станки	B1	B2	B3	Фонд времени, ч
A1	3	5	0	30
A2	1	1	1	8
A3	0	2	0	8
Прибыль	3	3	1	

Необходимо, чтобы станок A2 был загружен максимально.

Задача 1.11

Станки	B1	B2	B3	Фонд времени, ч
A1	1	1	0	4
A2	0	2	3	24
A3	0	4	2	24
Прибыль	1	5	2	

Необходимо, чтобы станок A1 был загружен максимально.

Задача 1.12

Станки	B1	B2	B3	Фонд времени, ч
A1	3	0	4	36
A2	3	0	2	24
A3	1	1	0	6
Прибыль	7	1	4	

Необходимо, чтобы станок A3 был загружен максимально.

Задача 1.13

Станки	B1	B2	B3	Фонд времени, ч
A1	2	0	0	8
A2	2	3	1	18
A3	4	3	0	24
Прибыль	6	9	1	

Необходимо, чтобы станок A2 был загружен максимально.

Задача 1.14

Станки	B1	B2	B3	Фонд времени, ч
A1	2	1	4	20
A2	0	0	1	4
A3	3	0	2	18
Прибыль	3	1	6	

Необходимо, чтобы станок A1 был загружен максимально.

Задача 1.15

Станки	B1	B2	B3	Фонд времени, ч
A1	0	2	2	16
A2	1	1	0	4
A3	0	1	2	14
Прибыль	1	3	2	

Необходимо, чтобы станок A2 был загружен максимально.

Задача 1.16

Станки	B1	B2	B3	Фонд времени, ч
A1	1	2	0	14
A2	2	2	0	20
A3	1	0	1	8

Прибыль	4	3	1	

Необходимо, чтобы станок А3 был загружен максимально.

Задача 1.17

Станки	В1	В2	В3	Фонд времени, ч
А1	2	2	0	16
А2	0	2	1	10
А3	1	2	0	12
Прибыль	2	6	1	

Необходимо, чтобы станок А2 был загружен максимально.

Задача 1.18

Станки	В1	В2	В3	Фонд времени, ч
А1	0	2	0	10
А2	0	5	3	30
А3	1	1	1	8
Прибыль	1	2	2	

Необходимо, чтобы станок А3 был загружен максимально.

Задача 1.19

Станки	В1	В2	В3	Фонд времени, ч
А1	0	1	1	3
А2	1	1	0	8
А3	2	1	0	14
Прибыль	3	4	1	

Необходимо, чтобы станок А1 был загружен максимально.

Задача 1.20

Станки	В1	В2	В3	Фонд времени, ч
А1	1	1	0	7
А2	0	1	2	14
А3	0	1	1	10
Прибыль	1	5	4	

Необходимо, чтобы станок А1 был загружен максимально.

Задача 1.21

Станки	В1	В2	В3	Фонд времени, ч
А1	1	2	0	10
А2	1	0	1	3
А3	2	1	0	8
Прибыль	5	2	1	

Необходимо, чтобы станок А3 был загружен максимально.

Задача 1.22

Станки	В1	В2	В3	Фонд времени, ч
А1	6	10	0	60
А2	2	2	2	16
А3	0	4	0	16
Прибыль	6	6	2	

Необходимо, чтобы станок А2 был загружен максимально.

Задача 1.23

Станки	В1	В2	В3	Фонд времени, ч
А1	0	2	3	24
А2	1	1	0	4
А3	0	4	2	24
Прибыль	1	5	2	

Необходимо, чтобы станок А2 был загружен максимально.

Задача 1.24

Станки	В1	В2	В3	Фонд времени, ч
А1	3	4	0	36
А2	3	2	0	24
А3	1	0	1	6
Прибыль	7	4	1	

Необходимо, чтобы станок А3 был загружен максимально.

Задача 1.25

Станки	В1	В2	В3	Фонд времени, ч
А1	1	0	0	4
А2	1	1,5	0,5	9
А3	2	1,5	0	12
Прибыль	3	4,5	0,5	

Необходимо, чтобы станок А2 был загружен максимально.

Задача 1.26

Станки	В1	В2	В3	Фонд времени, ч
А1	4	2	8	40
А2	0	0	2	8
А3	6	0	4	36
Прибыль	6	2	12	

Необходимо, чтобы станок А1 был загружен максимально.

4.2. ЗАДАЧА О СМЕСЯХ

Условия задачи

Из двух видов сырья необходимо составить смесь, в состав которой должно входить не менее указанных единиц химического вещества B1, B2 и B3, соответственно. Цена 1 кг сырья каждого вида, а также количество единиц химического вещества, содержащегося в 1 кг сырья каждого вида, указаны в таблице. Составить смесь, имеющую минимальную стоимость.

Задание 2: построить математическую модель задачи; привести математическую модель задачи к каноническому виду; решить задачу двойственным симплекс методом; решить задачу графическим способом; дать экономическую интерпретацию полученных результатов.

Задача 2.1

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	1	2	12
B2	5	2	20
B3	0	4	12
Цена/1 кг	2	4	

Задача 2.2

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	0	5	10
B2	4	2	28
B3	2	5	30
Цена/1 кг	4	10	

Задача 2.3

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	2	1	14
B2	1	1	10
B3	2	0	6
Цена/1 кг	4	2	

Задача 2.4

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	4	2	20
B2	2	4	16
B3	6	0	18
Цена/1 кг	6	3	

Задача 2.5

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	3	0	12
B2	2	4	24
B3	3	2	24
Цена/1 кг	9	6	

Задача 2.6

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	3	2	24
B2	0	6	18
B3	3	4	36
Цена/1 кг	6	8	

Задача 2.7

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	4	0	12
B2	4	5	40
B3	4	2	28
Цена/1 кг	2	1	

Задача 2.8

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	1	2	10
B2	6	0	12
B3	3	2	18
Цена/1 кг	6	4	

Задача 2.9

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	5	2	30
B2	5	0	10
B3	2	2	18
Цена/1 кг	10	4	

Задача 2.10

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	2	2	20
B2	0	4	12
B3	1	2	14
Цена/1 кг	2	4	

Задача 2.11

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	0	8	16
B2	4	3	24
B3	2	3	18
Цена/1 кг	4	6	

Задача 2.12

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	0	7	14
B2	2	4	20
B3	3	2	18
Цена/1 кг	3	6	

Задача 2.13

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	2	5	30
B2	6	0	24
B3	4	2	28
Цена/1 кг	8	4	

Задача 2.14

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	0	4	8
B2	1	2	8
B3	3	1	9
Цена/1 кг	3	6	

Задача 2.15

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	4	2	28
B2	2	2	20

B3	4	0	12
Цена/1 кг	8	4	

Задача 2.16

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	2	1	10
B2	1	2	8
B3	3	0	9
Цена/1 кг	3	1,5	

Задача 2.17

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	0	3	12
B2	2	3	24
B3	4	2	24
Цена/1 кг	6	9	

Задача 2.18

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	6	0	18
B2	2	3	24
B3	4	3	36
Цена/1 кг	8	6	

Задача 2.19

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	2	0	6
B2	2	2,5	20
B3	2	1	14
Цена/1 кг	1	0,5	

Задача 2.20

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	2	4	20
B2	3	0	24
B3	6	4	36
Цена/1 кг	12	8	

Задача 2.21

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	2	5	30
B2	2	2	18
B3	0	5	10
Цена/1 кг	4	10	

Задача 2.22

Вещество	Количество единиц вещества на 1 кг сырья		Минимальная концентрация вещества
	I	II	
B1	2	1	14
B2	4	0	12
B3	2	2	20
Цена/1 кг	4	2	

4.3. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Условия задачи

Товары с m баз поставляются в n магазинов. Потребности магазинов в товарах равны b_j тыс. ед., $i=\overline{1,n}$. Запасы товаров на базах составляют a_i тыс. ед., $i=\overline{1,m}$. Затраты на перевозку 1 тыс. ед. товара в ден. ед. представлены матрицей затрат $C_{m\times n}$. Запланировать перевозку с минимальными затратами при заданном дополнительном условии.

Задание 3: составить математическую модель задачи; привести её к стандартной транспортной задаче (с балансом); построить начальный опорный план задачи; решить задачу (методом потенциалов).

Вариант 1

$$\vec{a} = (12;14;8;10),$$

$$\vec{b} = (9;11;7;6;9),$$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 & 8 \\ 9 & 5 & 8 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 7 \\ 7 & 4 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью освободить четвёртую базу

Вариант 2

$$\vec{a} = (15;10;11;12),$$

$$\vec{b} = (9;8;7;14;7),$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 7 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 5 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью освободить первую базу

Вариант 3

$$\vec{a} = (10;12;11;7),$$

$$\vec{b} = (8;9;9;6;5),$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью освободить третью базу

Вариант 4

$$\vec{a} = (20;14;10;6),$$

$$\vec{b} = (14;11;14;9;4),$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 9 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью удовлетворить потребности пятого магазина

Вариант 5

$$\vec{a} = (30; 25; 20; 15),$$
$$\vec{b} = (10; 20; 18; 12; 25),$$
$$C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 6 & 7 \\ 8 & 4 & 6 & 5 & 9 \\ 3 & 5 & 8 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 10 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью освободить третью базу

Вариант 6

$$\vec{a} = (15; 16; 13; 14),$$
$$\vec{b} = (12; 11; 9; 19; 8),$$
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 2 \\ 10 & 8 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью удовлетворить потребности четвёртого магазина

Вариант 7

$$\vec{a} = (16;11;12;13),$$

$$\vec{b} = (10;9;8;15;7),$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью освободить вторую базу

Вариант 8

$$\vec{a} = (20;15;12;13),$$

$$\vec{b} = (12;9;8;15;13),$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью освободить третью базу

Вариант 9

$$\vec{a} = (9;11;7;6;9),$$

$$\vec{b} = (12;14;8;10),$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью удовлетворить потребности третьего магазина

Вариант 10

$$\vec{a} = (9;8;7;14;7),$$

$$\vec{b} = (15;10;11;12),$$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 5 & 8 \\ 7 & 7 & 8 & 5 \\ 6 & 10 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 8 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью удовлетворить потребности четвёртого магазина

Вариант 11

$$\vec{a} = (14;11;14;9;4),$$

$$\vec{b} = (20;14;10;6),$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью освободить вторую базу

Вариант 12

$$\vec{a} = (8;9;9;6;5),$$

$$\vec{b} = (10;12;11;7),$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 9 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью освободить первую базу

Вариант 13

$$\vec{a} = (10;9;8;15;\ \underset{\cdot\cdot}{37}$$

$$\vec{b} = (16;11;12;13),$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью удовлетворить потребности третьего магазина

Вариант 14

$$\vec{a} = (12;\ 9;\ 8;\ 15;\ 13),$$

$$\vec{b} = (20;\ 15;\ 12;\ 13),$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью удовлетворить потребности первого магазина

Вариант 15

$$\vec{a} = (10; 20; 18; 12; 25),$$

$$\vec{b} = (30; 25; 20; 15),$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью удовлетворить потребности третьего магазина

Вариант 16

$$\vec{a} = (12; 9; 16; 5; 8),$$

$$\vec{b} = (8; 11; 12; 11),$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 7 & 6 \\ 5 & 6 & 10 & 7 \\ 1 & 1 & 8 & 8 \\ 8 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью удовлетворить потребности первого магазина

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе рассмотрен ряд задач оптимального управления как с точки зрения теории, так и с точки зрения практического их решения. При этом особое внимание уделено усвоению и закреплению студентами практических навыков по решению данного типа задач, а также пониманию их экономического смысла в практических условиях хозяйствования.

Изложение представленного материала не перегружено математическими конструкциями, выходящими за рамки математики для инженерных и экономических специальностей высших учебных заведений.

Следует отметить, что для более глубокого изучения вопросов, рассматриваемых в данной работе необходимо обратиться к списку литературы, в который включены работы, ставшие классическими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дякин, В.Н. Оптимизация управления промышленным предприятием / В.Н. Дякин, В.Г. Матвейкин, Б.С. Дмитриевский. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. – 84 с.

2. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учебное пособие для студентов эконом. спец. вузов / И.Л. Акулич. – Мн. : Выш. школа, 1986.

3. Ашманов, С.А. Линейное программирование / С.А. Ашманов. – М. : Наука, 1981.

4. Венцель, Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология / Е.С. Венцель. – М. : Наука, 1980.

5. Большакова, И.В. Линейное программирование : учебно-метод. пособие к контрольной работе для студ. эконом. факультета / И.В. Большакова. – Мн. : БНТУ, 2004.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ …… 3
1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ ……..... 4
1.1. Математические модели задач планирования и управления. Общая постановка задач оптимизации …….. 4
1.2. Различные формы записи задач линейного программирования и их эквивалентность. Приведение задачи к каноническому виду … 5
1.2.1. Каноническая форма записи задач линейного программирования …… 5
1.2.2. Симметричная форма записи задач линейного программирования …… 6
1.2.3. Приведение задачи к каноническому виду …….. 7
1.3. Нахождение начального опорного плана задачи линейного программирования ……... 8
1.4. Геометрическая интерпретация и графическое решение задач линейного программирования …… 11
1.4.1. Геометрическая интерпретация области допустимых значений …… 11
1.4.2. Геометрическая интерпретация целевой функции …… 11
1.4.3. Графическое решение задач линейного программирования 12
1.4.4. Задача со многими переменными …… 12
2. СИМПЛЕКС-МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ …….. 13
2.1. Этапы решения задачи линейного программирования симплекс-методом ……... 13
2.2. Нахождение оптимального опорного плана …… 14
2.3. Метод искусственного базиса …… 16
2.4. Двойственность в линейном программировании …… 16
2.5. Правила построения двойственной задачи к исходной задачи линейного программирования в общем виде ……... 17
2.6. Двойственный симплекс-метод …….. 18
3. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ …… 20
3.1. Задача долгосрочного планирования …… 20
3.2. Транспортная задача ……... 23
4. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ …….. 28
4.1. Задача об оптимальном распределении производственных ресурсов ……... 28
4.2. Задача о смесях …… 31
4.3. Транспортная задача ……... 35
ЗАКЛЮЧЕНИЕ ……... 39
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ …….. 39