Величина. Функция

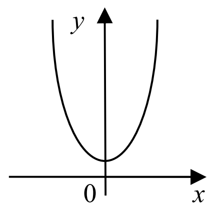
Что? **подставить** *куда*? (*во что*?) Значение переменной **подставить** в выражение. Что **подставить** в выражение? Куда **подставить** значение переменной?

Понятие	Определение	Примеры
Величина	– результат измерений	1 метр, 30 минут
Известная величина	– величина, значение которой известно	$m = 4$, $n = 10$ m, n – известные величины
Неизвестная величина	– величина, значение которой неизвестно; значение неизвестной величины можно найти	$2x - 10 = 0$, x – ? x– неизвестная величина
Постоянная величина (константа)	– величина, значение которой не изменяется (постоянно)	$\pi = 3{,}14159265\ldots$, $e = 2{,}71828182\ldots$ π, e– константы, постоянные величины
Переменная величина	– величина, значение которой изменяется; переменная величина может принимать различные значения	$y = 2x + 5$, $x \in \boldsymbol{R}$, x– переменная величина
Независимая величина (аргумент)	– величина, значения которой нельзя найти по какому-либо правилу	$y = 2x + 5$, $x \in \boldsymbol{R}$, x– независимая величина, аргумент
Зависимая величина (функция)	– величина, значения которой находят по заданному правилу	$y = 2x + 5$, y– зависимая величина, функция
Функция переменной x	– переменная y, такая, что, каждому допустимому значению x соответствует единственное значение y	$y = 2x + 5$, y– функция переменной x
Функция двух переменных x и y	– переменная z, такая, что, каждой паре допустимых значений x и y соответствует единственное значение z	$z = x^2 + y^2$ – функция двух переменных
Функция трёх переменных x, y и z	– переменная u, такая, что, каждой тройке допустимых значений x, y и z соответствует единственное значение u	$u = x^2 + y^2 + z^2$ – функция трёх переменных

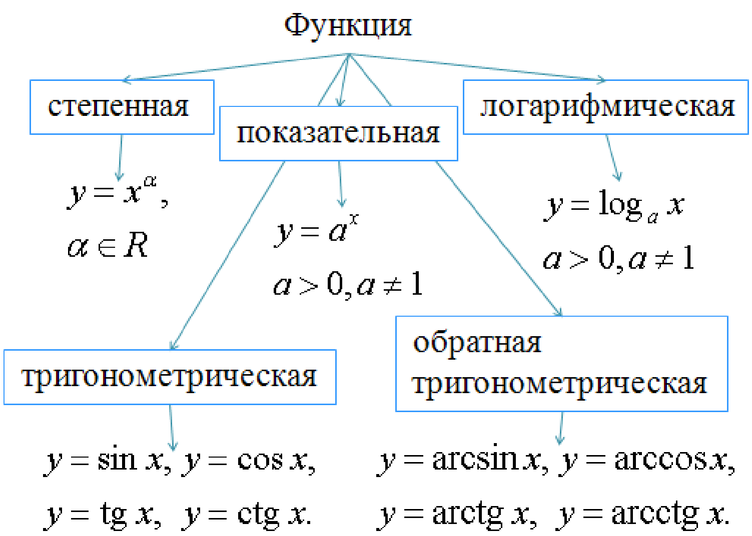
Что? **зависит** *от чего*? Значение функции **зависит от** значения аргумента. **От** чего **зависит** значение функции?
Зависимость *чего*? *от чего*? **Зависимость** значений функции **от** значений аргумента

I III *Что*? **соответствует** *чему*? Значение функции **соответствует** значению аргумента. Чему **соответствует** значение функции?
III I *Чему? **соответствует** что?* Значению аргумента **соответствует** значение функции. Что соответствует значению аргумента?

Основные способы задания функции

<table>
<tr><td>Формула $y = f(x)$</td><td>Таблица значений функции</td><td>График функции</td></tr>
<tr><td>$y = x^2 + 1$</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>y</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>10</td><td>17</td></tr>
</table>
</td><td>
</td></tr>
</table>

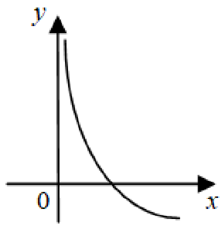
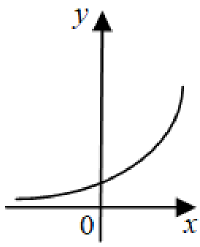
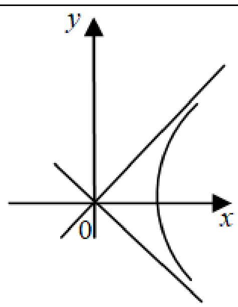
Основные элементарные функции

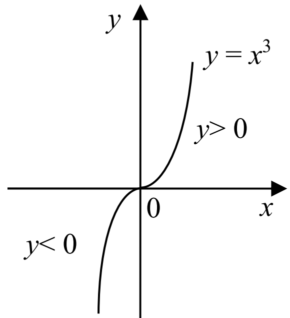
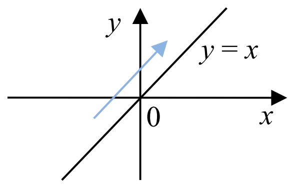
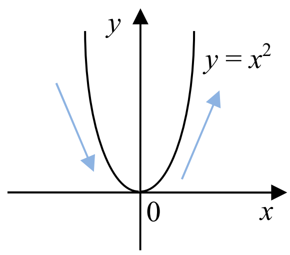


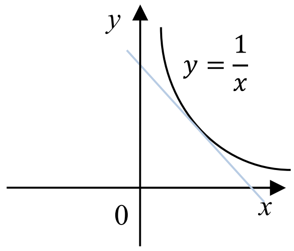
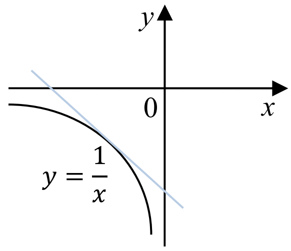
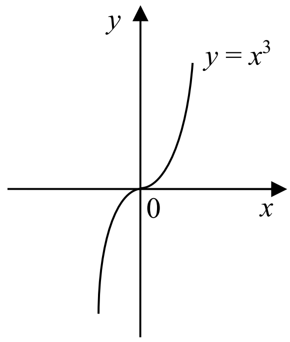
<table>
<tr><td colspan="2">Функции</td></tr>
<tr><td>алгебраические</td><td>трансцендентные</td></tr>
<tr><td>степенная</td><td>показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические</td></tr>
<tr><td>$y = x^{\alpha}$, $y = ax^2 + bx + c$,
$y = (x - 1)(x + 2)(x - 4)$,
$y = \frac{x+1}{x-2}, y = \sqrt{2x - 1{,}7}$</td><td>$y = a^x$, $y = \log_a x$,
$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$,
$y = \sec x$, $y = \mathrm{cosec}\, x$,
$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$</td></tr>
</table>

Основные свойства функции

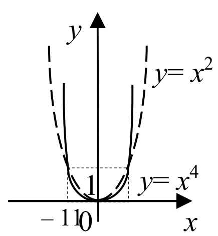
- Область определения функции
- Непрерывность и точки разрыва
- Асимптоты и поведение функции у асимптот
- Чётность, нечётность
- Периодичность
- Точки пересечения с осями координат и промежутки знакопостоянства
- Промежутки монотонности и точки экстремума функции
- Промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции
- График функции

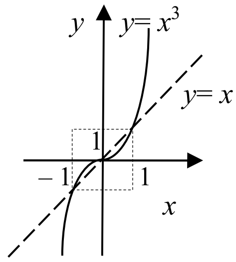
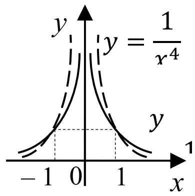
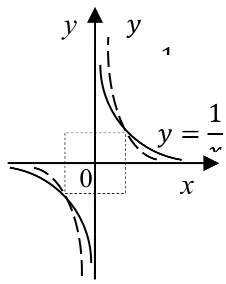
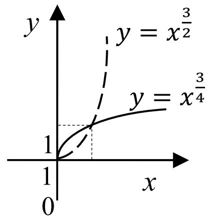
№	Название		Описание, формулы	Пример
1	Область определения		$D(f) = \{x \mid \forall x \in X \ \exists! \, y = f(x)\}$	$y = \frac{1}{x}, D(f): x \in R \backslash \{0\}$
2	Асимптоты:	вертикальная	$x = a,\ a \notin D(f)$	 $x = 0$ – вертикальная асимптота
		горизонтальная	$y = b,\ b \neq f(x)\ \forall\ x \in D(f)$	 $y = 0$ – горизонтальная асимптота
		наклонная	$y = kx + b$	 $y = x$, $y = -x$ – наклонные асимптоты

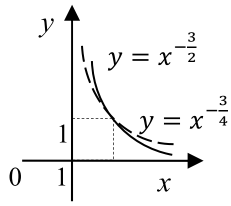
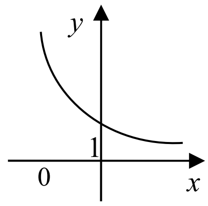
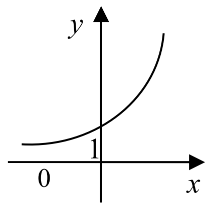
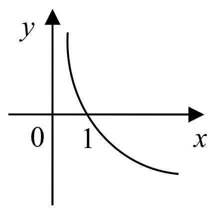
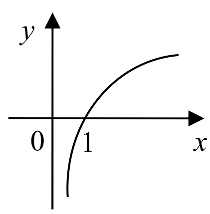
№	Название	Описание, формулы	Пример
3	Чётность	$x, -x \in D(f), f(-x) = f(x)$	$y = x^2$ – чётная функция, так как $(-x)^2 = x^2$
	Нечётность	$x, -x \in D(f), f(-x) = -f(x)$	$y = x^3$ – нечётная функция, так как $(-x)^3 = -x^3$
4	Периодичность	$\exists T \in \boldsymbol{R} \mid f(x) = f(x+T) = f(x-T)$	y = sin x – периодическая функция, так как $\sin x = \sin(x+2\pi) = \sin(x-2\pi)$
5	Точки пересечения с осями координат и промежутки знакопостоянства	– точки пересечения с осью Ox. Если $x = x_0$, то $y(x_0) = 0$. – точки пересечения с осью Oy. Если $x = 0$, то $y(0) = y_0$. $\forall x \in X_1\ y(x) > 0$ $\forall x \in X_2\ y(x) < 0$	$y = x^3 = 0$ при $x = 0$, $y = x^3 > 0$ при $x \in (0; +\infty)$, $y = x^3 < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$ 
6	Промежутки монотонности	– промежутки, на которых функция только возрастает или только убывает. Если $\forall x_1, x_2 \in X_1 \mid x_1 < x_2$ верно, что $y(x_1) < y(x_2)$, то функция возрастает (большему значению аргумента соответствует большее значение функции). Если $\forall x_1, x_2 \in X_1 \mid x_1 < x_2$ верно, что $y(x_1) > y(x_2)$, то функция возрастает (большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции)	1. Функция $y = x$ возрастает при $x \in \boldsymbol{R}$.  2. Функция $y = x^2$: – возрастает при $x \in [0; +\infty)$, – убывает при $x \in (-\infty; 0]$ 
	Точки экстремума	– значения аргумента, при которых функция меняет характер монотонности. Если возрастание меняется на убывание, то имеет место точка максимума. Если убывание меняется на возрастание, то имеет место точка минимума	1. Для функции $y = x^2$ точка $x = 0$ – точка минимума. 2. Для функции $y = -x^2$ точка $x = 0$ – точка максимума

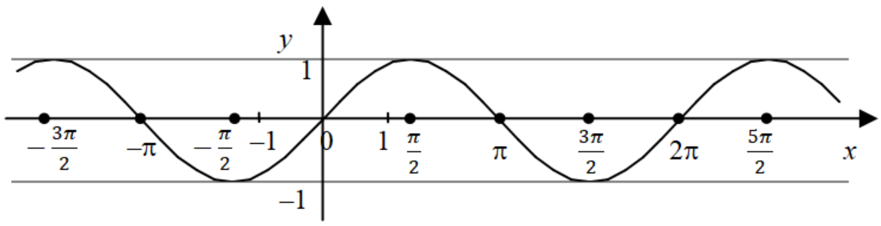
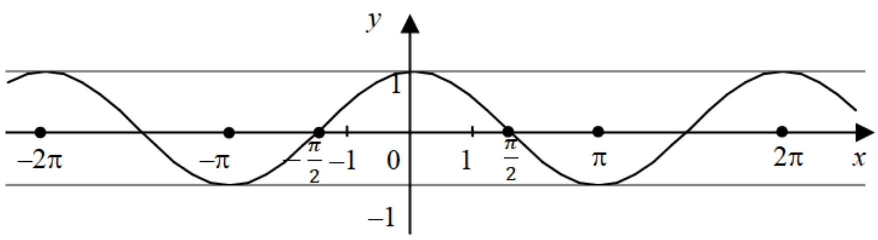
№	Название	Описание, формулы	Пример
7	Промежутки выпуклости	– промежутки, на которых график функции расположен с одной стороны от касательной, проведённой в любой точке этого промежутка. Если график расположен выше касательной, то функция выпукла вниз. Если график расположен ниже касательной, то функция выпукла вверх	1. Функция $y = \frac{1}{x}$ выпукла вниз при $x \in (0; +\infty)$.  2. Функция $y = \frac{1}{x}$ выпукла вверх при $x \in (-\infty; 0)$ 
	Точки перегиба	– значения аргумента, при которых функция меняет характер выпуклости	Для функции $y = x^3 = 0$ точка $x = 0$ – точка перегиба
8	График функции	– множество всех точек плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции	

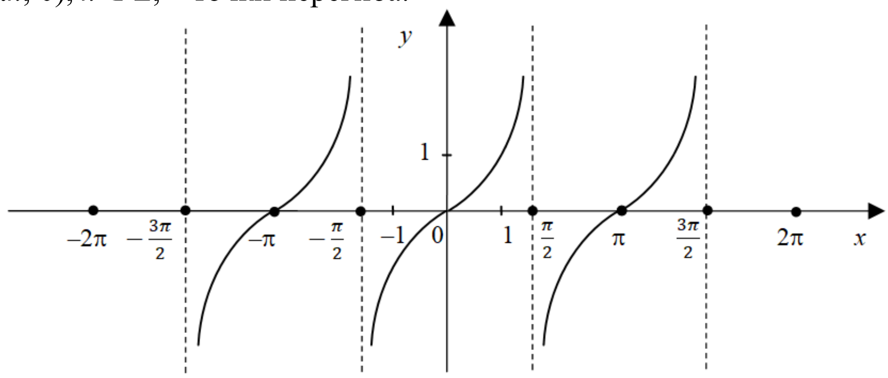
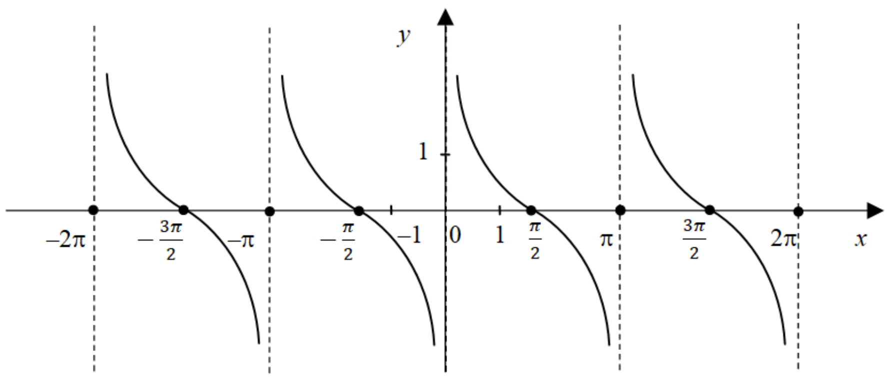
Свойства основных элементарных функций

Функция	Свойства
$y = x^{2n}$, $n \in \boldsymbol{N}$	1. $D(f) = R$, $E(f) = [0;+\infty)$. 2. Асимптот нет. 3. Функция чётная (график симметричен относительно оси Oy). 4. Функция непериодическая. 5. $O(0; 0)$ – точка пересечения с осями координат. При $x > 0$ и при $x < 0$ $f(x) > 0$. 6. Функция убывает при $x \in (-\infty;0]$, возрастает при $x \in [0;+\infty)$. $O(0; 0)$ – точка минимума. 7. Функция выпукла вниз. 

$y = x^{2n+1}$, $n \in \boldsymbol{N}$	1. $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = \boldsymbol{R}$. 2. Асимптот нет. 3. Функция нечётная (график симметричен относительно начала координат O). 4. Функция непериодическая. 5. $O(0; 0)$ – точка пересечения с осями координат. При $x > 0$ $f(x) > 0$, при $x < 0$ $f(x) < 0$. 6. Функция возрастает при $x \in \boldsymbol{R}$. $O(0; 0)$ – стационарная точка. 7. Функция выпукла вверх при $x < 0$, выпукла вниз при $x > 0$, $O(0; 0)$ – точка перегиба 
$y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$, $n \in \boldsymbol{N}$	1. $D(f) = R \setminus \{0\}$, $E(f) = (0;+\infty)$. 2. Прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота, прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота. 3. Функция чётная (график симметричен относительно оси Oy). 4. Функция непериодическая. 5. Точек пересечения с осями координат нет. При $x \in D(f)$ $f(x) > 0$. 6. Функция возрастает при $x \in (-\infty;0)$, убывает при $x \in (0;+\infty)$. Точек экстремума нет. 7. Функция выпукла вниз. 
$y = x^{-(2n+1)} = \frac{1}{x^{2n+1}}$, $n \in \boldsymbol{N}$	1. $D(f) = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, $E(f) = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$. 2. Прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота, прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота. 3. Функция нечётная (график симметричен относительно начала координат O). 4. Функция непериодическая. 5. Точек пересечения с осями координат нет. При $x > 0$ $f(x) > 0$, при $x < 0$ $f(x) < 0$. 6. Функция возрастает при $x \in D(f)$. Точек экстремума нет. 7. Функция выпукла вверх при $x < 0$, выпукла вниз при $x > 0$, точек перегиба нет 
$y = x^k$, k – положительное действительное нецелое число	1. $D(f) = [0;+\infty)$, $E(f) = [0;+\infty)$. 2. Асимптот нет. 3. Функция общего вида. 4. Функция непериодическая. 5. Точка пересечения с осями координат – $O(0; 0)$. При $x > 0$ $f(x) > 0$. 6. Функция возрастает при $x \in [0;+\infty)$. Точек экстремума нет. 7. Если $0 < k < 1$, то функция выпукла вверх, если $k > 1$, то функция выпукла вниз. Точек перегиба нет 

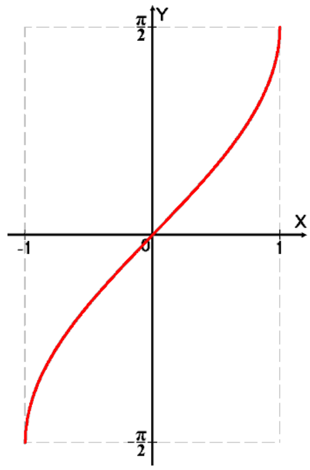
$y = x^k$, k– отрицательное действительное нецелое число	1. $D(f) = (0;+\infty)$, $E(f) = (0;+\infty)$. 2. Прямая $x= 0$ – вертикальная асимптота, прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота. 3. Функция общего вида. 4. Функция непериодическая. 5. Точек пересечения с осями координат нет. При $x > 0$ $f(x) > 0$. 6. Функция убывает при $x \in [0;+\infty)$. Точек экстремума нет. 7. Функция выпукла вниз 
$y = a^x$, $0 < a < 1$	1. $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = \boldsymbol{R}$. 2. Прямая $y = 0$– горизонтальная асимптота. 3. Функция общего вида. 4. Функция непериодическая. 5. Точка (0; 1) – точка пересечения с осью Oy. При $x \in D(f)$ $f(x) > 0$. 6. Функция убывает при $x \in \boldsymbol{R}$. Точек экстремума нет. 7. Функция выпукла вниз при $x \in D(f)$, точек перегиба нет 
$y = a^x$, $a > 1$	1. $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = \boldsymbol{R}$. 2. Прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота. 3. Функция общего вида. 4. Функция непериодическая. 5. Точка (0; 1) – точка пересечения с осью Oy. При $x \in D(f)$ $f(x) > 0$. 6. Функция возрастает при $x \in \boldsymbol{R}$. Точек экстремума нет. 7. Функция выпукла вниз при $x \in D(f)$, точек перегиба нет 
$y = \log_a x$, $0 < a < 1$	1. $D(f) = (0; +\infty)$, $E(f) = \boldsymbol{R}$. 2. Прямая $y = 0$ – вертикальная асимптота. 3. Функция общего вида. 4. Функция непериодическая. 5. Точка (1; 0) – точка пересечения с осью Ox. При $0 < x < 1$ $f(x) > 0$, при $x> 1$ $f(x) < 0$. 6. Функция убывает при $x \in D(f)$. Точек экстремума нет. 7. Функция выпукла вниз при $x \in D(f)$, точек перегиба нет 
$y = \log_a x$, $a> 1$	1. $D(f) = (0; +\infty)$, $E(f) = \boldsymbol{R}$. 2. Прямая $y = 0$ –вертикальная асимптота. 3. Функция общего вида. 4. Функция непериодическая. 5. Точка (1; 0) – точка пересечения с осью Ox. При $0 < x < 1$ $f(x) < 0$, при $x > 1$ $f(x) > 0$. 6. Функция возрастает при $x \in D(f)$. Точек экстремума нет. 7. Функция выпукла вниз при $x \in D(f)$, точек перегиба нет 
$y = \sin x$	1. $D(f) = R$, $E(f) = [–1; 1]$.

	2. Асимптот нет. 3. Функция нечётная (график симметричен относительно начала координат O). 4. Функция периодическая, наименьший положительный период $T = 2\pi$. 5. Точки $(\pi k, 0)$, $k \in Z$, – точки пересечения с осью Ox. $O(0; 0)$ – точка пересечения с осью Oy. $y > 0$, если $x \in (0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$; $y < 0$, если $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$. 6. При $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z$, функция убывает, при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z$, функция возрастает. $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 1\right), k \in Z$,– точки максимума, $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -1\right), k \in Z$,– точки минимума. 7. При $x \in (0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$, функция выпукла вверх, при $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$, функция выпукла вниз, $(\pi k; 0)$, $k \in Z$, – точки перегиба 
$y = \cos x$	1. $D(f) = R$, $E(f) = [-1; 1]$. 2. Асимптот нет. 3. Функция чётная (график симметричен относительно оси Oy). 4. Функция периодическая, наименьший положительный период $T = 2\pi$. 5. Точки $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right), k \in Z$, – точки пересечения с осью Ox. Точка $(0; 1)$ – точка пересечения с осью Oy. $y > 0$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$; $y < 0$, если $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$. 6. При $x \in [-\pi + 2\pi k; 0 + 2\pi k]$, $k \in Z$, функция возрастает, при $x \in [0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$, функция убывает. $(2\pi k; 1)_{k \in Z}$ – точки максимума, $(-\pi + 2\pi k; -1)_{k \in Z}$ – точки минимума. 7. При $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$, функция выпукла вверх, при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$, функция выпукла вниз, $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 0\right), k \in Z$, – точки перегиба 
$y = \text{tg}\, x$	1. $D(f) = R \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\right\}, k \in Z$; $E(f) = R$.

	2. Прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z,$– вертикальные асимптоты. 3. Функция нечётная (график симметричен относительно начала координат O). 4. Функция периодическая, наименьший положительный период $T = \pi$. 5. Точки $(\pi k, 0)$, $k \in Z$, – точки пересечения с осью Ox. $O(0; 0)$ – точка пересечения с осью Oy. $y > 0$, если $x \in \left(0 + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z,$ $y < 0$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; 0 + \pi k\right), k \in Z.$ 6. При $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$, функция возрастает. Точек экстремума нет. 7. При $x \in \left(0 + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$, функция выпукла вверх, при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; 0 + \pi k\right), k \in Z$, функция выпукла вниз, $(\pi k; 0)$, $k \in Z$, – точки перегиба. 
$y = \text{ctg}\, x$	1. $D(f) = R \setminus \{\pi k\}$, $k \in Z, E(f) = R$. 2. Прямые $x = \pi k, k \in Z,$ – вертикальные асимптоты. 3. Функция нечётная (график симметричен относительно начала координат O). 4. Функция периодическая, наименьший положительный период $T = \pi$. 5. Точки$\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right), k \in Z,$ – точки пересечения с осью Ox. $y < 0$, если $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right), k \in Z;$ $y > 0$, если $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z.$ 6. При $x \in (\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in Z$, функция убывает. Точек экстремума нет. 7. При $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right), k \in Z$, функция выпукла вверх, при $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$, функция выпукла вниз, $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right), k \in Z,$ – точки перегиба 

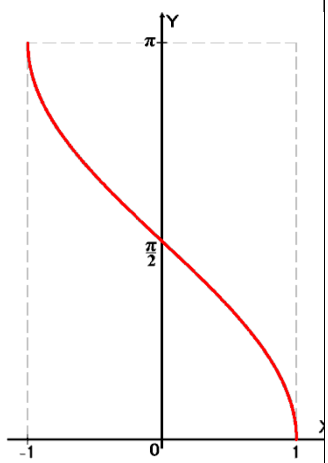
<table>
<tr>
<td>y = arcsin x</td>
<td>

1. $D(f) = [-1; +1]$, $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Асимптот нет.
3. Функция нечётная (график симметричен относительно начала координат O).
4. Функция непериодическая.
5. $O(0, 0)$ – точка пересечения с осями координат.
$y > 0$, если $x \in (0; 1]$,
$y < 0$, если $x \in [-1; 0)$.
6. При $x \in D(f)$ функция возрастает.
Точек экстремума нет.
7. При $x \in [-1; 0)$ функция выпукла вверх,
при $x \in (0; 1]$ функция выпукла вниз.
$O(0; 0)$ – точка перегиба



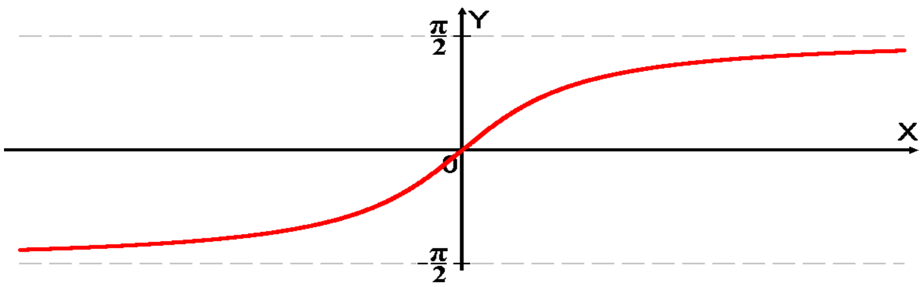
</td>
</tr>
<tr>
<td>y = arccos x</td>
<td>

1. $D(f) = [-1; 1]$, $E(f) = [0; \pi]$.
2. Асимптот нет.
3. Функция общего вида.
4. Функция непериодическая.
5. Точка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ – точка пересечения с осью Oy,
точка $(1; 0)$ – точка пересечения с осью Ox,
$y > 0$, если $x \in (-1; 1)$.
6. При $x \in D(f)$ функция убывает.
Точек экстремума нет.
7. При $x \in [-1; 0)$ функция выпукла вниз,
при $x \in (0; 1]$ функция выпукла вверх.
Точка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$– точка перегиба



</td>
</tr>
<tr>
<td>y = arctg x</td>
<td>

1. $D(f) = R$, $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
2. Прямые $y = \pm\frac{\pi}{2}$ горизонтальные асимптоты.
3. Функция нечётная (график симметричен относительно начала координат O).
4. Функция непериодическая.
5. $O(0; 0)$ – точка пересечения с осями координат.
$y > 0$, если $x \in (0; +\infty)$,
$y < 0$, если $x \in (-\infty; 0)$.
6. При $x \in D(f)$ функция возрастает. Точек экстремума нет.
7. При $x \in (0; +\infty)$ функция выпукла вверх,
при $x \in (-\infty; 0)$, функция выпукла вниз.
$O(0; 0)$ – точка перегиба



</td>
</tr>
</table>

y = arcctg x	1. $D(f) = R$, $E(f) = (0; \pi)$. 2. Прямые $y = 0$ и $y = \pi$– горизонтальные асимптоты. 3. Функция общего вида. 4. Функция непериодическая. 5. Точка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ – точка пересечения с осью Oy. $y>0$, если $x \in D(f)$. 6. При $x \in D(f)$ функция убывает. Точек экстремума нет. 7. При $x \in (0; +\infty)$ функция выпукла вниз, при $x \in (-\infty; 0)$, функция выпукла вверх. Точка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ – точка перегиба