Первообразные. Интегралы

Понятие	**Определение, формулы**	**Примеры**
Первообра́зная функции	– функция $F(x)$, такая, что $F'(x) = f(x)$, где $f(x)$ – известная функция	Так как $(x^3)' = 3x^2$, то функция $F(x) = x^3$ – первообразная для функции $f(x) = 3x^2$
Неопределённый интеграл от функции $f(x)$	– выражение $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная: $\int f(x)dx = F(x) + C$	$\int 3x^2dx = x^3 + C$
Определённый интеграл от a до b от функции $f(x)$	– приращение $F(b) – F(a)$ любой из первообразных функций $F(x) + C$ при изменении аргумента от $x = a$ до $x = b$, вычисляется по формуле Ньютона–Лейбница $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$	$\int_2^3 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right\|_2^3 =$ $= \frac{1}{2}(3^2 - 2^2) =$ $= \frac{1}{2}\cdot 5 = \frac{5}{2} = 2,5$
Несобственный интеграл по бесконечному промежутку	$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,$$ $$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$	$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2} =$ $= \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} x\|_0^b =$ $= \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}$
Несобственный интеграл по конечному промежутку от неограниченной функции	$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx\ \left(x = a \notin D_f\right)$$	$\int_0^1\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{0+\varepsilon}^1\frac{dx}{x} =$ $= \lim_{\varepsilon\to0}\left(\ln x\|_\varepsilon^1\right) =$ $= \lim_{\varepsilon\to0}\left(\ln 1 - \ln\varepsilon\right) = +\infty$
Двойной интеграл от функции $z = f(x, y)$ по области D	$$\iint_{(D)} f(x,y)dxdy$$ Если D – прямоугольник, то $$\iint_{(D)} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$	$\iint_{(D)} xydxdy =$ $= \int_0^1 xdx\int_0^1 ydy =$ $= \left.\frac{x^2}{2}\right\|_0^1\left.\frac{y^2}{2}\right\|_0^1 = \frac{1}{4}$
Тройной интеграл от функции $u = f(x,y,z)$ по телу T	$$\iiint_{(T)} f(x,y,z)dxdydz$$ Если T – прямоугольный параллелепипед, то $$\iiint_{(T)} f(x,y,z)dxdydz =$$ $$= \int_a^b dx\int_c^d dy\int_e^f f(x,y,z)dz$$	$\iiint_{(T)} xyzdxdydz =$ $= \int_0^1 xdx\int_0^1 ydy\int_0^1 zdz =$ $= \left.\frac{x^2}{2}\right\|_0^1\left.\frac{y^2}{2}\right\|_0^1\left.\frac{z^2}{2}\right\|_0^1 = \frac{1}{8}$

Основные свойства неопределённого интеграла

№	Формула	Пример
1	$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, $d\int f(x)dx = f(x)dx$	$\left(\int 2xdx\right)' = (x^2 + C)' = 2x$ $d\int 2xdx = d(x^2) = 2xdx$
2	$\int dF(x)dx = F(x) + C$	$\int d(x^3)dx = \int 3x^2dx = x^3 + C$
3	$\int af(x)dx = a\int f(x)dx\,, a \neq 0$	$\int 5e^xdx = 5\int e^xdx = 5e^x$
4	$\int [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)]\,dx =$ $= \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \int f_3(x)dx$	$\int (5x^4 + 3x^2 + 7)\,dx =$ $= \int 5x^4dx + \int 3x^2dx + \int 7dx = x^5 + x^3 + 7x + C$

Таблица неопределённых интегралов

$\int dx = x + C$	$\int e^xdx = e^x + C$
$\int (a + bx)^n dx = \dfrac{(a + bx)^{n+1}}{b(n + 1)} + C, n \neq -1$	$\int a^xdx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\int x^ndx = \dfrac{x^{n+1}}{n + 1} + C, n \neq -1$	$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$
$\int \dfrac{dx}{a + bx} = \dfrac{1}{b}\ln\lvert a + bx\rvert + C$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C$	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

Методы интегрирования

№	Название	Описание, формула	Пример
1	Непосредственное интегрирование	– вычисление неопределённых интегралов с помощью непосредственного использования таблицы первообразных и основных свойств неопределённых интегралов	$\int (2x^3 + \sin x)dx =$ $= \int 2x^3dx + \int \sin x\,dx =$ $= \dfrac{1}{4}\cdot 2x^4 - \cos x + C =$ $= \dfrac{x^4}{2} - \cos x + C$

2	Метод замены переменных (метод подстановки)	– преобразование интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(u)du$, который легко вычисляется по таблице первообразных	$\int (2x^3+1)^4 x^2 dx = \left\lvert\begin{matrix} 2x^3 + 1 = u \\ x^2 dx = \frac{1}{6} du \end{matrix}\right\rvert = \frac{1}{6}\int u^4 du = \frac{1}{6}\cdot\frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{30}(2x^3+1)^5 + C$
3	Метод интегрирования по частям	– использование формулы $\int u dv = uv - \int v du$	$\int xe^x dx \left\lvert\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{matrix}\right\rvert = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$

Алгоритм нахождения определённого интеграла

Найти первообразную функцию $F(x)$ для функции $f(x)$

Вычислить значение $F(x)$ при $x = b$

Вычислить значение $F(x)$ при $x = a$

Вычислить разность $F(b) - F(a)$

Основные свойства определённого интеграла

№	**Формула**	**Пример**
1	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$	$\int_2^0 x^2 dx = -\int_0^2 x^2 dx = -\frac{x^3}{3}\Big\rvert_0^2 = -\frac{8}{3}$
2	$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$	$\int_0^\pi 5\sin x\, dx = 5\int_0^\pi \sin x\, dx = -5\cos x\rvert_0^\pi = -5(\cos\pi - \cos 0) = -5\cdot(-2) = 10$
3	$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx$	$\int_0^1 (x^3 + e^x)dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 e^x dx = \frac{x^4}{4}\Big\rvert_0^1 + e^x\rvert_0^1 = \frac{1}{4} + e - 1 = e - \frac{3}{4}$