Числовые выражения и выражения с переменными

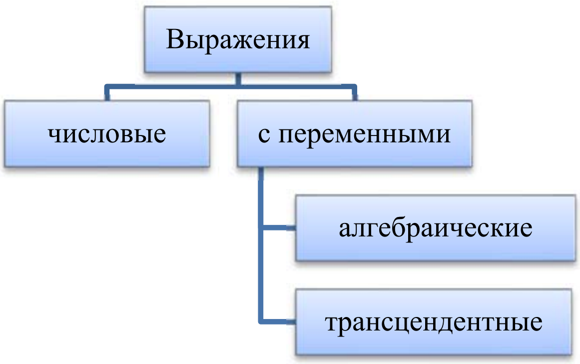
Что? **состоит из** *чего*?
Число 13 **состоит из** цифр 1 и 3.
Из чего **состоит** число 13?

=

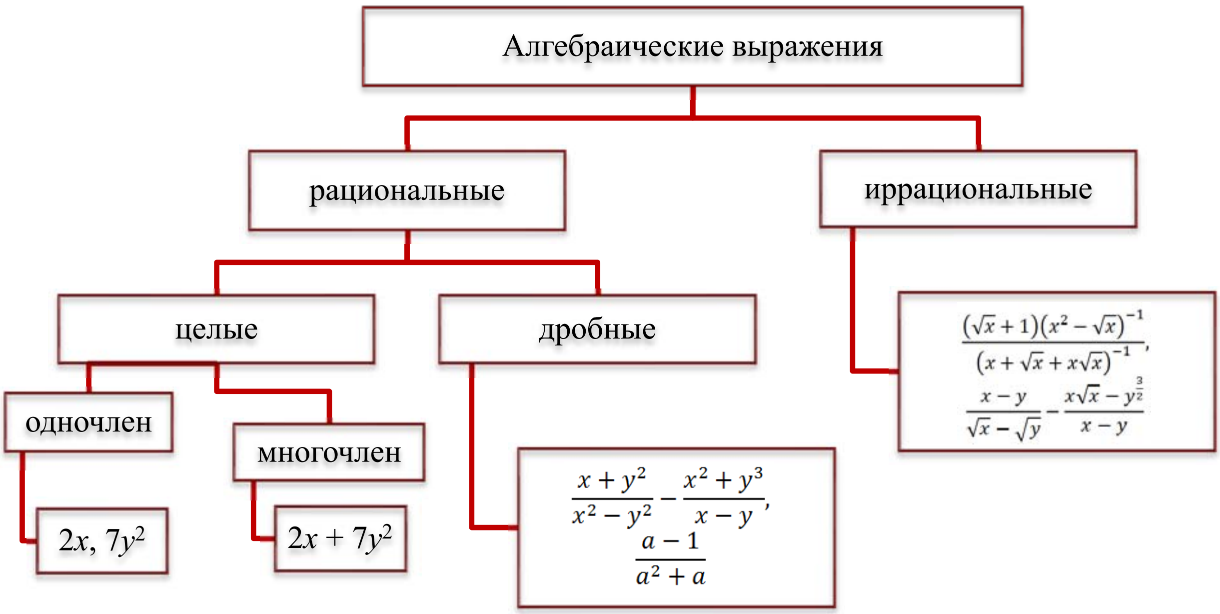
В состав *чего*? **входит** *что*?
В состав числа 13 **входят** цифры 1 и 3.
Что **входит в состав** числа 13?

Название	**Из чего состоит**	**Пример**
Числовое выражение	состоит только из чисел, знаков действий и скобок	3 + 1, 9 – 5, 2 · 2, 12 : 3, 12 : 2 – 2, 3 · (12 – 11) + 1
Выражение с переменными	состоит из чисел, знаков действий сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень и извлечения корня, скобок и букв	$2x - 3y^2$, $5x^2 + 2x + 3$, $\frac{7x-1}{12x^2+13}$, $\sqrt{x+y}$

<table>
<tr><td rowspan="2">В состав</td><td>числового выражения</td><td rowspan="2">входят</td><td>числа, знаки действий и скобки</td></tr>
<tr><td>выражения с переменными</td><td>числа, знаки действия, скобки и буквы</td></tr>
</table>



Алгебраические выражения



Целые алгебраические выражения

Линейные – первой степени

$3a - 5a + 6a - a$,
$(4x + 2) + (-x - 3)$

Нелинейные:

- квадратные – второй степени: $5ab + 4ab^2 - ab - 12ab^2$, $a^2 - b^2 + 3a^2 - 2b^2$
- кубические – третьей степени: $2{,}5y^3 + 0{,}8x^2y + y^2 - 3xy$, $(x^3 + 4x - 5) + (x^3 - 3x + 2)$
- . . .
- степени n: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Преобразования целых алгебраических выражений

Приведение подобных членов

$4a + 5ax - 3a - 7ax = (4 - 3)a + (5 - 7)ax = a - 2ax$

Разложение на множители

- Вынесение общего множителя за скобки: $2a + 2x = 2(a + x)$, $10x^2y^3 - 15x^4y^2 = 5x^2y^2(2y - 3x^2)$, $(a + b)x - (a + b)y = (a + b)(x - y)$
- Группировка: $5 + a^2 - 5a - a^3 = (5 + a^2) - (5a + a^3) = (5 + a^2) - a(5 + a^2) = (5 + a^2)(1 - a)$
- Формулы сокращённого умножения: $9a^4 - 25b^2 = (3a^2 + 5b)(3a^2 - 5b)$, $x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$
- Введение вспомогательных членов:

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 - 4a^2 + 4 = (a^4 + 4a^2 + 4) - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a)$$

Преобразования дробных алгебраических выражений

Приведение к общему знаменателю

$$\frac{5}{6+2a}=\frac{5}{2(a+3)}=\frac{5(a-3)}{2(a+3)(a-3)},$$

$$\frac{a}{a-3}=\frac{2a(a+3)}{2(a-3)(a+3)}$$

Сокращение

$$\frac{7x^2-7y^2}{2x+2y}=\frac{7\cancel{(x+y)}(x-y)}{2\cancel{(x+y)}}=\frac{7(x-y)}{2}$$

Преобразования иррациональных алгебраических выражений

Вынесение множителя за знак корня

$$\sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b}\quad(a\ge 0; b\ge 0; n\in N, n\ne 1)$$

Внесение множителя под знак корня

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}\quad(a\ge 0; b\ge 0; n\in N, n\ne 1)$$

Освобождение знаменателя дроби от иррациональности

$$\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}}=\frac{2\cdot\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2\cdot 3^3}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{3},$$

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}=\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}$$

Трансцендентные выражения

- **показательные**: $5^{2x}-7^x-17\cdot 5^{2x}+7^x\cdot 17$
- **логарифмические**: $\log_2(9-2^x)+10^{\lg(3-x)}$
- **тригономертические**: $\sin^3\alpha\,(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)$, $\cos^3\alpha(1+\mathrm{tg}\,\alpha)$, $\sin\alpha+\cos\alpha$

Преобразования показательных и логарифмических выражений

Логарифмирование: $f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow \log_a f_1(x) = \log_a f_2(x),\ (f_1(x), f_2(x) > 0)$

Потенцирование: $\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x),\ (f_1(x), f_2(x) > 0)$

Свойства логарифмов

$a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ c > 0,\ c \neq 1$

№	Формула	Пример
1	$\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$	$\lg\left(81\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}\right) = 0 \Leftrightarrow 81\sqrt[3]{3^{x^2-8x}} = 10^0$
2	$\log_a 1 = 0$	
3	$\log_a a = 1$	$\log_5 5 = 1$
4	$c = \log_a a^c$	$3\log_5 2 + 2 - x = \log_5(3^x - 5^{2-x}) \Leftrightarrow$ $\log_5 2^3 + \log_5 5^2 - \log_5 5^x = \log_5(3^x - 5^{2-x})$
5	$c = a^{\log_a c}$	
6	$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$	$3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3}$
7	$\log_a(x_1 x_2) = \log_a\lvert x_1\rvert + \log_a\lvert x_2\rvert$	$\lg x = \lg\frac{3a^2\sqrt[5]{b^3}}{c^4(a+b)} = \lg\left(3a^2\sqrt[5]{b^3}\right) - \lg[c^4(a+b)] =$ $= \lg 3 + \lg a^2 + \lg\sqrt[5]{b^3} - \lg c^4 - \lg(a+b) =$ $= \lg 3 + 2\lg a + \frac{3}{5}\lg b - 4\lg c - \lg(a+b)$
8	$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a\lvert x_1\rvert - \log_a\lvert x_2\rvert$	
9	$\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a\lvert x\rvert$	
10	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$	$\log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$
11	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	$\log_{27} 3 = \frac{1}{\log_3 27} = \frac{1}{3}$
12	$\log_a b = \log_{a^n} b^n,\ n \neq 0$	$\log_2\sqrt{7} = \log_{2^2}\left(\sqrt{7}\right)^2 = \log_4 7$

Числовые значения тригонометрических функций некоторых углов

α°	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
α, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Преобразование тригонометрических выражений

№	Название	Используемые формулы
1	Переход от одной функции к другой	
2	Преобразование суммы в произведение	
3	Преобразование произведения в сумму	
4	Понижение степени, изменение величины угла	

Основные тригонометрические тождества

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \alpha \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$

$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \alpha \neq \pi k, k \in Z.$

Формулы приведения

Функция	Аргумент β							
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

Формулы двойного угла

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$.

Формулы тройного угла

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$.

Формулы понижения степени

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

Формулы половинного угла

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$;

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

Формулы сложения

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$; $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$;

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$; $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$;

$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$; $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}$.

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

		Преобразование произведения тригонометрических функций в алгебраическую сумму $\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}$; $\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$; $\sin\alpha\sin\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}$. **Преобразование алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение** $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; $\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.