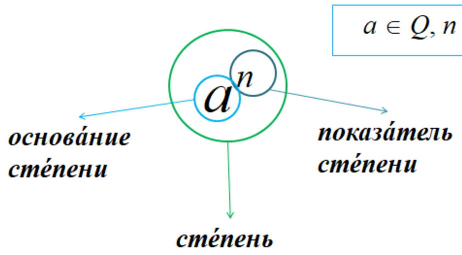
Возведение в степень и извлечение корня

Возведение рациональных чисел в степень с натуральным показателем

$a \in Q, n \in N.$



Действие – ***возведе́ние в сте́пень***

Компоненты действия возведения в степень

$$a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k\ раз},\ a^1 = a,\ a^0 = 1,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}\ (a \neq 0).$$

Правила чтения степеней и степенных выражений

1. *Что*? в степени *сколько*? 2. *Что*? в *какой*? степени 3. a^2 и a^3 – это исключения.			
1.	a^2	а квадрат	а в квадрате
	a^3	а куб	а в кубе
2.	a^1	а в степени 1	а в первой степени
	a^4	а в степени 4	а в четвёртой степени
	a^6	а в степени 6	а в шестой степени
	a^7	а в степени 7	а в седьмой степени
	a^0	а в степени 0	а в нулевой степени
	a^{100}	а в степени 100	а в сотой степени
3.	a^{-1}	а в степени –1 (минус один)	а в минус первой степени
	a^{-3}	а в степени –3	а в минус третьей степени
	a^{-9}	а в степени –9	а в минус девятой степени
	a^n	а в степени эн	а в энной степени
4.	a^{x+y}	а в степени икс плюс игрек	
	$(a+b)^2$	а плюс бэ всё в квадрате	
	$(a+b)^3$	а плюс бэ всё в кубе	
	a^2+b^2	а квадрат плюс бэ квадрат	
	a^3+b^3	а куб плюс бэ куб	

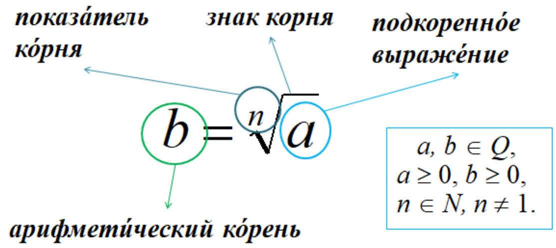
Свойства степени

№	Формулировка	Формула	Пример
1	При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, а основания не изменяются	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $n, m \in Z$	$aba^5b^3 = a^{1+5}b^{1+3} = a^6b^4$
2	При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели вычитаются, а основания не изменяются	$a^n : a^m = a^{n-m}$, $n, m \in Z$	$\frac{3^{12}}{3^8} = 3^{12-8} = 3^4 = 81$
3	При возведении степени в степень показатели степеней перемножаются, а основание не изменяется	$(a^n)^m = a^{nm}$, $n, m \in Z$	$(a^5)^2 = a^{5\cdot 2} = a^{10}$
4	Степень произведения равна произведению степеней множителей	$(abc)^k = a^k \cdot b^k \cdot c^k$, $k \in Z$	$(4b)^3 = 4^3b^3 = 64b^3$
5	Степень частного равна частному степеней делимого и делителя	$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$, $b \neq 0, k \in Z$	$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

Формулы сокращенного умножения

№	Название	Формула	Пример
1	Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	$40^2 - 39^2 = (40 - 39)(40 + 39) = 79$
2	Квадрат суммы	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$
3	Квадрат разности	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(2x - 3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$
4	Квадрат трёхчлена	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	$(5x + y - 2z)^2 = 25x^2 + y^2 + 4z^2 + 10xy - 20xz - 4yz$
5	Сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	$125m^3 + n^3 = (5m + n)(25m^2 - 5mn + n^2)$
6	Разность кубов	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	$(5m - n)(25m^2 + 5mn + n^2) = 125m^3 - n^3$
7	Куб суммы	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(2a + 3b)^3 = 8a^3 + 36a^2b + 63ab^2 + 27b^3$
8	Куб разности	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$8a^3 - 36a^2b + 63ab^2 - 27b^3 = (2a - 3b)^3$

Извлечение арифметического корня из положительного рационального числа



Действие – ***извлече́ние ко́рня***

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$$

Компоненты действия извлечения корня

Правила чтения корней и выражений, содержащих корни

1. Корень степени *сколько*? из *чего*? 2. Корень *какой*? степени из *чего*? 3. $\sqrt[2]{a}$ и $\sqrt[3]{a}$ – исключения		
$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$	корень степени два из а	корень квадратный из а
$\sqrt{5}$	корень степени два из числа пять	корень квадратный из пяти
$\sqrt[3]{a}$	корень степени три из а	корень кубический из а
$\sqrt[4]{a}$	корень степени четыре из а	корень четвёртой степени из а
$\sqrt[5]{a}$	корень степени пять из а	корень пятой степени из а
$\sqrt[6]{a}$	корень степени шесть из а	корень шестой степени из а
$\sqrt[7]{12}$	корень степени семь из числа двенадцать	корень седьмой степени из двенадцати
$\sqrt[n]{a}$	корень степени эн из а	корень энной степени из а
$\sqrt[n+1]{a}$	корень степени эн плюс один из а	
$\sqrt[m-1]{a}$	корень степени эм минус один из а	
$\sqrt[n]{a+b}$	корень степени эн из выражения а плюс бэ корень степени эн из суммы чисел а и бэ	
$\sqrt{\frac{2x}{3y}}$	корень квадратный из выражения два икс разделить на три игрек корень квадратный из дроби – в числителе два икс, в знаменателе три игрек	

Свойства корней

Пусть $n, k \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, $k > 1$, $a, b \in \boldsymbol{R}^+$.

№	Формула	Пример
1	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$	$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3\cdot5]{2^5} = \sqrt[15]{32}$
2	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[4]{16x} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{x} = 2\sqrt[4]{x}$
3	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b \neq 0)$	$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{\sqrt[5]{2^5}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{2}{3}$
4	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$	$\left(\sqrt[7]{x}\right)^3 = \sqrt[7]{x^3}$
5	$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[3\cdot2]{x} = \sqrt[6]{x}$
6	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a (a \geq 0)$	$\left(\sqrt[8]{2x}\right)^8 = 2x (x \geq 0)$
7	$\sqrt[2n]{a^{2n}} = \lvert a \rvert (a \in R)$	$\sqrt[4]{(3y)^4} = \lvert 3y \rvert = \begin{cases} 3y, y \geq 0, \\ -3y, y < 0 \end{cases}$
8	$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}\ (a \geq 0)$	$\sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5}$
9	$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$, если $0 \leq a < b$	$\sqrt{2} < \sqrt{3}$, так как $0 < 2 < 3$
10	$\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$	$\sqrt{5^3} = 5^{\frac{3}{2}}$