Пределы. Производные

Понятие	**Определение**	**Примеры**
Последовательность	– набор значений переменной величины x: $(x_n)_{n\in N}$: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$	1, 2, 4, 8, 16, …
Предел числовой последовательности $(x_n)_{n\in N}$	– постоянное число a, такое, что, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такой номер n_0, что для любого номера $n \geq n_0$ выполняется неравенство $\lvert x_n - a\rvert < \varepsilon$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+7}{2x^2-5x+3}=\dfrac{3}{2}$
Неопределённость	– ситуация, при которой предел выражений $x_n + y_n$, x_ny_n, $\frac{x_n}{y_n}$ не существует	$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \ldots$
Предел функции $y = f(x)$ в точке $x = a$	– число b, такое, что, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся такое число δ (которое зависит от ε), что для всех значений $x \neq a$ из верного неравенства $\lvert x - a\rvert < \delta$ следует верное неравенство $\lvert f(x) - b\rvert < \varepsilon$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to -1}(x^3 - x^2) = -2$
Приращение аргумента	– разность двух значений аргумента x_1 и x_2, которые лежат в области определения функции: $\Delta x = x_2 - x_1$	
Приращение функции	– разность двух значений функции, которые соответствуют значениям аргумента x_1 и x_2: $\Delta y = \Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$	
Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$	– если она в этой точке определена и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, то есть $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$	
Точка разрыва функции	– точка, в которой условие непрерывности функции нарушено	Для функции $y = \frac{1}{x}$ точка $x = 0$ – точка разрыва, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x} = \infty$
Производная функцииу $y = f(x)$ в точке x	– предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю (если этот предел существует): $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	$y', f'(x), \frac{dy}{dx}, y'_x$
Вторая производная	– производная от производной функции	y'', y''_x, $f''(x)$, $\frac{d^2f}{dx^2}$
Дифференциал первого порядка	– произведение производной функции на дифференциал аргумента	$dy = f'(x)dx$
Дифференциал второго порядка	– дифференциал от дифференциала первого порядка	$d^2y = f''(x)dx^2$

Частная производная от функции $z = f(x,y)$ по переменной x	$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f'_x$	$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^3) = 2x$
Частная производная от функции $z = f(x,y)$ по переменной y	$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f'_y$	$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^3) = 3y^2$
Частная производная второго порядка от функции $z = f(x,y)$ по переменной x	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = f''_{xx}$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 + y^3) =$ $= \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2$
Частная производная второго порядка от функции $z = f(x,y)$ по переменной y	$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = f''_{yy}$	$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2 + y^3) =$ $= \frac{\partial}{\partial y}(3y^2) = 6y$
Смешанные частные производные второго порядка от функции $z = f(x,y)$ по переменнымx и y	$\frac{\partial^2 z}{\partial xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = f''_{xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = f''_{yx}$	$\frac{\partial^2}{\partial xy}(x^2y + xy^3) =$ $= \frac{\partial}{\partial x}(3xy^2) = 3y^2$, $\frac{\partial^2}{\partial yx}(x^2y + xy^3) =$ $= \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x$

Величина

постоянная — переменная

переменная: ограниченная — неограниченная

ограниченная: ограниченная снизу — ограниченная сверху

$\exists m \in R \mid \forall x \; x > m$ — $\exists M \in R \mid \forall x \; x < M$

Последовательность

бесконечно маленькая — бесконечно большая

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \geq n_0) \quad |x_n| < \varepsilon.$ — $(\forall A > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \geq n_0) \quad |x_n| > A.$

Виды неопределённостей

$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $0\cdot\infty$ $\infty-\infty$ 1^{∞}

Теоремы о пределах и их следствия

Считаем, что пределы всех используемых функций существуют, пределы функций, стоящих в знаменателе, не равны нулю.

<table>
<tr><th>№</th><th>Формула</th><th>Пример</th></tr>
<tr><td>Т1</td><td>$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$</td><td rowspan="3">1. $\lim\limits_{x\to 3}\left(3x^2+\sqrt{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to 3}3x^2+\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}=$
$=3\left(\lim\limits_{x\to 3}x\right)^2+\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}(x+1)}=3\cdot 3^2+$
$+\sqrt{3+1}=29.$</td></tr>
<tr><td>Т2</td><td>$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$</td></tr>
<tr><td>Т3</td><td>$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$</td></tr>
<tr><td>С1</td><td>$\lim\limits_{x\to a}[kf(x)]=k\lim\limits_{x\to a}f(x)$</td><td rowspan="2">2. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{5x+2}{2x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 4}(5x+2)}{\lim\limits_{x\to 4}(2x+3)}=\frac{5\cdot 4+2}{2\cdot 4+3}=\frac{22}{11}=2.$</td></tr>
<tr><td>С2</td><td>$\lim\limits_{x\to a}x^n=a^n, \lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$</td></tr>
<tr><td>С3</td><td>$\lim\limits_{x\to a}(c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0)=F(a)$</td><td rowspan="2">3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+1}{x^2+2x-4}=\frac{1^2-3\cdot 1+1}{1^2+2\cdot 1-4}=\frac{-1}{-1}=1$</td></tr>
<tr><td>С4</td><td>$\lim\limits_{x\to a}\frac{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}{c_mx^m+c_{m-1}x^{m-1}+\cdots+c_1x+c_0}=F(a)$</td></tr>
</table>

Замечательные пределы

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^x=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x}{2}}\right)^{\frac{3x}{2}\cdot\frac{2}{3}}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3x}{2}}\right)^{\frac{3x}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{\frac{2}{3x}}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{\frac{1}{2x/3}\cdot\frac{2x}{3}\cdot\frac{2}{3x}}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{\frac{1}{2x/3}}\right]^{\frac{4}{9}}=e^{\frac{4}{9}}$

Виды неопределённостей

$\frac{0}{0}$ → $$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x(3x-2)}{x(2x-5)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-2}{2x-5}=\frac{2}{5}.$$

$\frac{\infty}{\infty}$ → $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+7}{2x^2-5x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{3}{2}.$$

$0\cdot\infty$ → $$\lim_{x\to 0}x\operatorname{ctg}x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}}=1.$$

$\infty-\infty$ → $$\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{(x+2)(x^2-2x+4)}=$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-4}{x^2-2x+4}=-\frac{1}{2}.$$

1^∞ → $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=(1^\infty)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3=e^3.$$

Формулы дифференцирования

Пусть $\boldsymbol{C'}$ **= const,** функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ $(v(x)\neq 0)$, $y=f(h)$, $h=g(x)$ дифференцируемы в точке x.

№	Формула	Пример
1	$C'=0$	$y'=(x^3+x^2+x-5)'=$ $=(x^3)'+(x^2)'+x'-5'=$ $=3x^2+2x+1$
2	$x'=1$	
3	$(u\pm v)'=u'\pm v'$	
4	$(uv)'=u'v+uv'$	$y'=[(1+x^3)(4x^2+3x+5)]'=$ $=(1+x^3)'(4x^2+3x+5)+(1+x^3)(4x^2+3x+5)'=$ $=3x^2(4x^2+3x+5)+(1+x^3)(4x+3)=$ $=12x^4+9x^3+15x^2+4x+3+4x^4+3x^3=$ $=16x^4+12x^3+15x^2+4x+3$
5	$(Cu)'=Cu'$	
6	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$y'=\left(\frac{x-2}{x+2}\right)'=$ $=\frac{(x-2)'(x+2)-(x-2)(x+2)'}{(x+2)^2}=$ $=\frac{x+2-x+2}{(x+2)^2}=\frac{4}{(x+2)^2}$
7	$f(g(x))'=f'(g(x))g'(x)$	$y'=(\ln\sqrt{2x})'=\frac{1}{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x})'=\frac{1}{\sqrt{2x}}\frac{1}{2\sqrt{2x}}(2x)'=\frac{1}{2x}$

Таблица производных элементарных функций

$C' = 0$ (C – константа)	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$	$(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	$(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(e^u)' = e^u \cdot u'$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' (\lvert u \rvert < 1)$
$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' (\lvert u \rvert < 1)$
$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	$(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$	$(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Условия монотонности и экстремумов функции

Функция $y = f(x)$ дифференцируема
на всей области определения

$f'(x) > 0$ на некотором промежутке
↓
функция на этом промежутке возрастает

$f'(x_0) = 0$
↓
$x = x_0$ – точка, подозрительная на экстремум

$f'(x) < 0$ на некотором промежутке
↓
функция на этом промежутке возрастает

$f'(x) > 0$ при $x < x_0$
и
$f'(x) < 0$ при $x > x_0$
↓
$x = x_0$ – точка максимума

$f'(x) < 0$ при $x < x_0$
и
$f'(x) > 0$ при $x > x_0$
↓
$x = x_0$– точка минимума

$f'(x) > 0$ не меняет знак
↓
$x = x_0$ – стационарная точка

Условия выпуклости графика функции и точек перегиба

Функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема
на всей области определения

$f''(x) > 0$ на некотором
промежутке

функция на этом
промежутке
выпукла вниз

$f''(x_0) = 0$
и
$f''(x_1)\, f''(x_2) < 0$
при
$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) < 0$

$x = x_0$ – точка перегиба

$f''(x) < 0$ на некотором
промежутке

функция на этом
промежутке
выпукла вверх