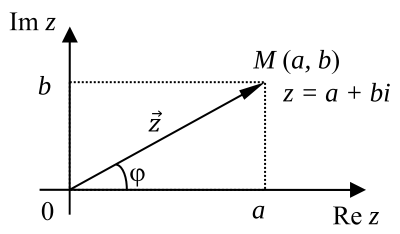
# Комплексные числа

| Название | Формулы | Примеры |
|---|---|---|
| Компле́ксное число | $z = a + bi$ | $3 + 4i$, $-6{,}5 + 7$, $1i$ |
| Мнимая единица | $i$, $i^2 = -1$ | |
| Действительная часть | $\mathrm{Re}\, z = a$ | $\mathrm{Re}(3 + 4i) = 3$ |
| Мнимая часть | $\mathrm{Im}\, z = b$ | $\mathrm{Im}(3 + 4i) = 4$ |
| Модуль комплексного числа | $r = \lvert z \rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$ |  |
| Аргумент комплексного числа | – угол φ между положительным направлением оси $Ox$ и вектором $\overrightarrow{OM} = \vec{z}$, который изображает комплексное число, $a = r \cdot \cos \varphi$, $b = r \cdot \sin \varphi$ | |
| Алгебраическая форма записи | $z = a + bi$ | $z = 3 + 4i$ |
| Тригонометрическая форма записи | $z = r\,(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ | $z = 2\,(\cos \pi + i \sin \pi)$ |
| Показательная форма записи | $z = re^{i\varphi}$ | $z = -5e^{i\pi}$ |
| Противоположное число | $-z = -a - bi$ | $z = 3 - 4i \Rightarrow -z = -3 + 4i$ |
| Сопряжённое число | $\bar{z} = a - bi$ | $z = 3 - 4i \Rightarrow \bar{z} = 3 + 4i$ |
| Сумма комплексных чисел | $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) =$<br>$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ | $(3 + 4i) + (-5 + 3i) =$<br>$= (3 - 5) + (4 + 3)i = -2 + 7i$ |
| Разность комплексных чисел | $(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) =$<br>$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$ | $(-3 + 4i) - (-5 + 3i) =$<br>$= (-3 + 5) + (4 - 3)i = 2 + i$ |
| Произведение комплексных чисел | $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) =$<br>$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i,$<br><br>$[r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] \times$<br>$\times [r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] =$<br>$= r_1 \cdot r_2\, [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) +$<br>$+ i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)],$<br><br>$r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ | $(3 + 4i)(5 + 3i) =$<br>$= (3 \cdot 5 - 4 \cdot 3) + (3 \cdot 3 + 4 \cdot 5)i =$<br>$= 3 + 29i,$<br><br>$2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) =$<br>$= 2 \cdot 4 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$<br>$= 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$<br><br>$2e^{\frac{\pi}{6}i} \cdot 4e^{\frac{\pi}{3}i} = 2 \cdot 4 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)} = 8e^{\frac{\pi}{2}i}$ |

| | | |
|---|---|---|
| Частное комплексных чисел | $\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$,<br>$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=$<br>$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$,<br>$\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=r_1r_2e^{i(\varphi_1-\varphi_1)}$ | $\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+4i}{2-3i}=\frac{(3+4i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=$<br>$=\frac{(6-12)+(9+8)i}{4+9}=\frac{-6+17i}{13}=\frac{-6}{13}+\frac{17}{13}i$,<br>$\frac{6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{6}{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+\right.$<br>$\left.+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right)=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$,<br>$\frac{6e^{\frac{\pi}{2}i}}{2e^{\frac{\pi}{3}i}}=\frac{6}{2}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}=3e^{\frac{\pi}{6}i}$ |
| Натуральная степень комплексного числа | $[r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=$<br>$=r^n\,(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$,<br>$\left(re^{i\varphi}\right)^n=r^ne^{in\varphi}$ | $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^4=$<br>$=2^4\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot4\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot4\right)\right)=$<br>$=16\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$<br>$\left(2e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^4=2^4\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6}\cdot4\right)}=16e^{\frac{2\pi}{3}i}$ |
| Корень степени $n$ из комплексного числа | $\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=$<br>$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$,<br>$k=0,1,2,\dots,n-1$,<br>$\sqrt[n]{re^{i\varphi}}=\sqrt[n]{r}e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}i}$,<br>$k=0,1,2,\dots,n-1$. | $z=\sqrt{4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}=$<br>$=2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{2}\right),k=0,1$,<br>$z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$,<br>$z_1=2\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$,<br>$z=\sqrt{4e^{i\frac{\varphi}{6}}}=2e^{\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{2}i},k=0,1$,<br>$z_0=2e^{\frac{\pi}{12}i},z_1=2e^{\frac{13\pi}{12}i}$ |