Задача. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно:

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1, & \text{если } n \text{ чётно;} \\ a_n + n, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n^2}$.

(Олимпиада студентов технических вузов Москвы 2013-го года, г. Зеленоград)

Решение.

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1, & \text{если } n \text{ чётно;} \\ a_n + n, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

$a_1 = 1;$

$$a_1 = 1;$$

$$a_2 = a_1 + 1 \quad (n\ неч.),$$

$$a_1 = 1;$$

$$a_2 = a_1 + 1 \quad (n\ \textit{неч.}), \qquad a_2 = 1 + 1 = 2;$$

$$a_1 = 1;$$

$$a_2 = a_1 + 1 \quad (n \text{ неч.}), \qquad a_2 = 1 + 1 = 2;$$

$$a_3 = a_2 - 1 \quad (n \text{ чёт.}),$$

$$a_1 = 1;$$

$$a_2 = a_1 + 1 \quad (n\ неч.), \qquad a_2 = 1 + 1 = 2;$$

$$a_3 = a_2 - 1 \quad (n\ чёт.), \qquad a_3 = 2 - 1 = 1;$$

$$a_1 = 1;$$

$$a_2 = a_1 + 1 \ \ (n \text{ неч.}), \quad a_2 = 1 + 1 = 2;$$

$$a_3 = a_2 - 1 \ \ (n \text{ чёт.}), \quad a_3 = 2 - 1 = 1;$$

$$a_4 = a_3 + 3 \ \ (n \text{ неч.}),$$

$$a_1 = 1;$$

$$a_2 = a_1 + 1 \quad (n \text{ неч.}), \qquad a_2 = 1 + 1 = 2;$$

$$a_3 = a_2 - 1 \quad (n \text{ чёт.}), \qquad a_3 = 2 - 1 = 1;$$

$$a_4 = a_3 + 3 \quad (n \text{ неч.}), \qquad a_4 = 1 + 3 = 4;$$

$$a_1 = 1;$$

$$a_2 = a_1 + 1 \;\; (n \text{ неч.}), \quad a_2 = 1 + 1 = 2;$$

$$a_3 = a_2 - 1 \;\; (n \text{ чёт.}), \quad a_3 = 2 - 1 = 1;$$

$$a_4 = a_3 + 3 \;\; (n \text{ неч.}), \quad a_4 = 1 + 3 = 4;$$

$$a_5 = a_4 - 1 \;\; (n \text{ чёт.}),$$

$$a_1 = 1;$$

$$a_2 = a_1 + 1 \ \ (n \text{ неч.}), \quad a_2 = 1 + 1 = 2;$$

$$a_3 = a_2 - 1 \ \ (n \text{ чёт.}), \quad a_3 = 2 - 1 = 1;$$

$$a_4 = a_3 + 3 \ \ (n \text{ неч.}), \quad a_4 = 1 + 3 = 4;$$

$$a_5 = a_4 - 1 \ \ (n \text{ чёт.}), \quad a_5 = 4 - 1 = 3;$$

$$a_1 = 1;$$

$$a_2 = a_1 + 1 \ \ (n \text{ неч.}), \quad a_2 = 1 + 1 = 2;$$

$$a_3 = a_2 - 1 \ \ (n \text{ чёт.}), \quad a_3 = 2 - 1 = 1;$$

$$a_4 = a_3 + 3 \ \ (n \text{ неч.}), \quad a_4 = 1 + 3 = 4;$$

$$a_5 = a_4 - 1 \ \ (n \text{ чёт.}), \quad a_5 = 4 - 1 = 3;$$

$$a_6 = a_5 + 5 \ \ (n \text{ неч.}),$$

$$a_1 = 1;$$

$$a_2 = a_1 + 1 \ \ (n\ \textit{неч.}), \quad a_2 = 1 + 1 = 2;$$

$$a_3 = a_2 - 1 \ \ (n\ \textit{чёт.}), \quad a_3 = 2 - 1 = 1;$$

$$a_4 = a_3 + 3 \ \ (n\ \textit{неч.}), \quad a_4 = 1 + 3 = 4;$$

$$a_5 = a_4 - 1 \ \ (n\ \textit{чёт.}), \quad a_5 = 4 - 1 = 3;$$

$$a_6 = a_5 + 5 \ \ (n\ \textit{неч.}), \quad a_6 = 3 + 5 = 8;$$

$$a_1 = 1;$$

$$a_2 = a_1 + 1 \ \ (n \text{ неч.}), \quad a_2 = 1 + 1 = 2;$$

$$a_3 = a_2 - 1 \ \ (n \text{ чёт.}), \quad a_3 = 2 - 1 = 1;$$

$$a_4 = a_3 + 3 \ \ (n \text{ неч.}), \quad a_4 = 1 + 3 = 4;$$

$$a_5 = a_4 - 1 \ \ (n \text{ чёт.}), \quad a_5 = 4 - 1 = 3;$$

$$a_6 = a_5 + 5 \ \ (n \text{ неч.}), \quad a_6 = 3 + 5 = 8;$$

и так далее.

$$\{a_n\} = \{1;\ 2;\ 1;\ 4;\ 3;\ 8;\ 7;\ 14;\ 13;\ 22;\ 21;\ 32;\ 44;\ 31;\ \ldots\}$$

$$\{a_{2n}\} = \{2;\ 4;\ 8;\ 14;\ 22;\ 32;\ 44;\ \ldots\}$$

$$\{a_{2n+1}\} = \{1;\ 1;\ 3;\ 7;\ 13;\ 21;\ 31;\ \ldots\}$$

Если обе эти подпоследовательности сходятся к одному и тому же числу, то это число и будет пределом исходной последовательности.

$$\{a_{2n}\} = \{2;\ 4;\ 8;\ 14;\ 22;\ 32;\ 44;\ ...\}$$

$$a_{2n} = a_{2n-1} + 2n - 1$$

$$\{a_{2n+1}\} = \{1;\ 1;\ 3;\ 7;\ 13;\ 21;\ 31;\ ...\}$$

$$a_{2n+1} = a_{2n} - 1,\ \text{при } n \geq 1$$

$$a_{2n} = a_{2n-1} + 2n - 1$$

$$a_{2n} = a_{2n-1} + 2n - 1 = \quad a_{2n-1} = a_{2n-2} - 1$$

$$a_{2n} = a_{2n-1} + 2n - 1 = \left| a_{2n-1} = a_{2n-2} - 1 \right| =$$

$$= a_{2n-2} - 1 + 2n - 1$$

$$a_{2n} = a_{2n-1} + 2n - 1 = a_{2n-1} = a_{2n-2} - 1 =$$

$$= a_{2n-2} - 1 + 2n - 1 = a_{2n-2} + 2n - 2$$

$$a_{2n} = a_{2n-1} + 2n - 1 = \left| a_{2n-1} = a_{2n-2} - 1 \right| =$$

$$= a_{2n-2} - 1 + 2n - 1 = a_{2n-2} + 2n - 2 = a_{2(n-1)} + 2\left(n - 1\right).$$

$$a_{2n} = a_{2(n-1)} + 2\left(n - 1\right).$$

$$a_{2n} = a_{2(n-1)} + 2(n-1)$$

$$a_{2n} = a_{2(n-1)} + 2\left(n-1\right) =$$

$$= a_{2(n-2)} + 2\left(n-2\right) + 2\left(n-1\right)$$

$$a_{2n} = a_{2(n-1)} + 2(n-1) =$$

$$= a_{2(n-2)} + 2(n-2) + 2(n-1) =$$

$$= a_{2(n-3)} + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1)$$

$$a_{2n} = a_{2(n-1)} + 2(n-1) =$$

$$= a_{2(n-2)} + 2(n-2) + 2(n-1) =$$

$$= a_{2(n-3)} + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1) = \ldots =$$

$$= a_2 + 2 + \ldots + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1)$$

$$a_{2n} = a_{2(n-1)} + 2(n-1) =$$

$$= a_{2(n-2)} + 2(n-2) + 2(n-1) =$$

$$= a_{2(n-3)} + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1) = \ldots =$$

$$= a_2 + 2 + \ldots + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1) =$$

$$= a_2 + 2\left(1 + 2 + \ldots + (n-3) + (n-2) + (n-1)\right)$$

Сумма $n-1$ члена арифметической прогрессии

$$1+2+\ldots+(n-3)+(n-2)+(n-1)=$$

$$=\frac{1+n-1}{2}\cdot(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$a_{2n} = a_2 + 2\left(1 + 2 + \ldots + (n-3) + (n-2) + (n-1)\right) =$$

$$a_{2n}=a_2+2\left(1+2+\ldots+\left(n-3\right)+\left(n-2\right)+\left(n-1\right)\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l} a_2=2, \\ 1+2+\ldots+\left(n-2\right)+\left(n-1\right)=\dfrac{n\left(n-1\right)}{2} \end{array}\right|=$$

$$a_{2n} = a_2 + 2\left(1 + 2 + \ldots + (n-3) + (n-2) + (n-1)\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} a_2 = 2, \\ 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2} \end{array} \right| =$$

$$= 2 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n + 2$$

$$a_{2n} = n^2 - n + 2$$

$$a_{2n} = n^2 - n + 2$$

$$a_{2n+1} = n^2 - n + 1$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a_{2m}}{(2m)^2}=\lim_{m\to\infty}\frac{m^2-m+2}{4m^2}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a_{2m}}{(2m)^2}=\lim_{m\to\infty}\frac{m^2-m+2}{4m^2}=\frac{1}{4},\quad \lim_{m\to\infty}\frac{a_{2m+1}}{(2m+1)^2}=\lim_{m\to\infty}\frac{m^2-m+1}{4m^2+4m+1}=\frac{1}{4}.$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a_{2m}}{(2m)^2}=\lim_{m\to\infty}\frac{m^2-m+2}{4m^2}=\frac{1}{4},\quad \lim_{m\to\infty}\frac{a_{2m+1}}{(2m+1)^2}=\lim_{m\to\infty}\frac{m^2-m+1}{4m^2+4m+1}=\frac{1}{4}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{4}.$$

Благодарим за внимание.