ГРАНИЦЫ ДЛЯ КОДОВОГО РАССТОЯНИЯ

Наиболее важными и полезными границами для кодового расстояния являются верхняя граница Хемминга, верхняя граница Плоткина и нижняя граница Варшамова-Гильберта. Эти границы **позволяют определить необходимое и достаточное количество проверочных символов r для блочного линейного кода** при заданных n и d_{min}.

Верхняя граница Хемминга имеет вид следующего неравенства:

$$r \geq \log_2 \sum_{i=0}^{t} C_n^i, \qquad (\text{П.1})$$

где $t = \mathrm{ent}\left(\frac{d_{min} - 1}{2}\right)$ –

число исправляемых ошибок; ent(x) означает, что берется целая часть числа x;

$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ – число различных сочетаний из n символов по i.

Применение границы Хемминга дает результаты, близкие к оптимальным **для высокоскоростных кодов**, т.е. для больших значений k/n.

Для низкоскоростных кодов более точной является верхняя граница Плоткина:

$$r \geq 2(d_{min} - 1) - \log_2 d_{min}. \qquad (\text{П.2})$$

Нижняя граница Варшамова-Гильберта имеет вид

$$r \leq \log_2 \sum_{i=0}^{d_{min}-2} C_n^i \qquad (\text{П.3})$$

Таким образом, границы Хемминга и Плоткина определяют необходимое количество проверочных символов, а граница Варшамова-Гильберта - достаточное.

Указанные границы часто используются для выяснения того, насколько построенные коды близки к оптимальным.

Рассмотрим пример использования этих границ. Определим, насколько близок к оптимальному БЧХ-код (15,7) с $d_{min} = 5$.

Из верхней границы Хемминга (П.1) следует, что

$$r \geq \log_2 \sum_{i=0}^{2} C_{15}^{i} = \log_2 \left(C_{15}^{0} + C_{15}^{1} + C_{15}^{2} \right) = \log_2 121 . \qquad (П.4)$$

Таким образом, наименьшее число проверочных символов, которое удовлетворяет неравенству (П.4), равно 7.

Из нижней границы Варшамова-Гильберта (П.3) получаем

$$r \leq \log_2 \sum_{i=0}^{3} C_{15}^{i} = \log_2 576 . \qquad (П.5)$$

Наибольшее число проверочных элементов, для которого справедливо неравенство (П.5), равно 9.

Таким образом, из границы Хемминга следует, что не существует кодов длиной $n = 15$ с $d_{min} = 5$ и $r < 7$, а граница Варшамова-Гильберта показывает, что существуют коды длиной $n = 15$ с $d_{min} = 5$ и $r < 9$.

Отсюда можно сделать вывод, что рассматриваемый БЧХ-код (15,7) с $r = 8$ является достаточно хорошим.

В табл. П. 1 приведены границы для r при различных значениях n и d_{min}.

n		D_{min}	r_{min}	$r_{БЧХ}$
15	3	4	4	4
	5	7	9	8
	7	10*	12	10

Значения $r_{мин}$ и $r_{макс}$ получены с помощью границ Хемминга и Варшамова-Гильберта, соответственно. Значение, отмеченное звездочкой, получено с помощью границы Плоткина, когда она дает лучшую оценку, чем граница Хемминга. В таблице указаны также значения числа проверочных символов $r_{БЧХ}$ известных кодов БЧХ.