

И.Г. КАРПОВ, А.Н. ГРИБКОВ

**ОСНОВЫ  
РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ И СВЯЗИ**

**Часть I**

**ОСНОВЫ ОПТИМАЛЬНОГО РАДИОПРИЁМА**

◆ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ◆

УДК 621.37  
ББК 32.84  
К265

Рецензенты:

Доктор технических наук, доцент,  
начальник научно-исследовательского отдела Тамбовского ВВАИУРЭ  
*А.В. Иванов*

Доктор технических наук, профессор  
кафедры "Информационные процессы и управление" ГОУ ВПО ТГТУ  
*В.А. Погонин*

**Карпов, И.Г.**

К265 Основы радиоэлектроники и связи. Ч. I. Основы оптимального радиоприёма : учебное пособие / И.Г. Карпов, А.Н. Грибков. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – 80 с. – 100 экз.  
ISBN 978-5-8265-0785-8.

Рассматриваются вопросы анализа помехоустойчивости и оптимального приёма сообщений, в том числе основы теории обнаружения, различения, оценки и фильтрации сигналов в радиотехнических системах.

Предназначено для студентов очного и заочного отделений, обучающихся по направлениям 210200 "Проектирование и технология электронных средств" и 210300 "Радиотехника".

УДК 621.37  
ББК 32.84

ISBN 978-5-8265-0785-8

© ГОУ ВПО "Тамбовский государственный  
технический университет" (ТГТУ), 2009  
Министерство образования и науки Российской Федерации  
ГОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет"

И.Г. КАРПОВ, А.Н. ГРИБКОВ

# ОСНОВЫ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ И СВЯЗИ

Часть I

## ОСНОВЫ ОПТИМАЛЬНОГО РАДИОПРИЁМА

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию  
в области радиотехники, электроники, биомедицинской техники и  
автоматизации в качестве учебного пособия для студентов,  
обучающихся по направлению 210200 "Проектирование и технология электронных средств" и 210300 "Радио-  
техника"*



---

Тамбов  
Издательство ТГТУ  
2009

Учебное издание

КАРПОВ Иван Георгиевич,  
ГРИБКОВ Алексей Николаевич

# **ОСНОВЫ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ И СВЯЗИ**

**Часть I**

## **ОСНОВЫ ОПТИМАЛЬНОГО РАДИОПРИЁМА**

Учебное пособие

Редактор З.Г. Чернова  
Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

Подписано в печать 02.03.2009  
Формат 60 × 84/16. 4,65 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 67

Издательско-полиграфический центр ТГТУ  
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1. ОПТИМАЛЬНЫЙ РАДИОПРИЁМ КАК СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА .....	6
1.1. Помехоустойчивость и её основные задачи .....	6
1.2. Основные понятия теории статистических решений .....	7
1.2.1. Условные плотности вероятности суммы сигнала и шума ...	7
1.2.2. Функция правдоподобия при дискретном и непрерывном наблюдении. Корреляционный приём .....	10
1.2.3. Апостериорная плотность вероятности .....	12
2. ОПТИМАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФИЛЬТРЫ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ПОМЕХ .....	14
2.1. Оптимальный линейный фильтр по минимуму среднеквадратической ошибки .....	14
2.2. Согласованный фильтр и его основные характеристики .....	16
2.2.1. Импульсная характеристика и отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра .....	16
2.2.2. Согласованный фильтр как коррелятор .....	18
2.2.3. Комплексная частотная характеристика согласованного фильтра .....	19
3. ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ .....	21
3.1. Обнаружение сигналов как статистическая задача .....	21
3.2. Ошибки при обнаружении сигнала .....	22
3.3. Критерии оптимального обнаружения и различения сигналов .....	23
3.4. Обнаружение сигнала с полностью известными параметрами на фоне белого шума. Структурные схемы обнаружителей .....	26
4. ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ КВАЗИДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ .....	31
4.1. Показатели качества обнаружения .....	31
4.2. Обнаружение сигнала со случайной начальной фазой на фоне белого шума .....	33
4.3. Обнаружение сигнала со случайными начальной фазой и амплитудой .....	37
5. ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗЛИЧЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ .....	40
5.1. Различение двух детерминированных сигналов. Постановка задачи и правило решения .....	40
5.2. Различение двух детерминированных сигналов на фоне белого шума. Структурные схемы оптимальных различителей .....	41
5.3. Условные плотности вероятности достаточной статистики при различении детерминированных сигналов .....	43
5.4. Потенциальная помехоустойчивость оптимальных различителей при различных видах манипуляции .....	47
6. ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА .....	51
6.1. Общие сведения об оптимальной оценке параметров сигнала .....	51
6.2. Понятие точечной оценки параметров сигнала .....	51
6.3. Основные методы оценки параметров сигнала. Оценка энергетических и неэнергетических параметров сигнала .....	53
6.4. Оптимальные схемы измерения параметров сигнала .....	54

6.5. Сигнальная и шумовая функции. Дисперсия правдоподобной оценки параметра сигнала .....	57
7. ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА .....	61
7.1. Постановка задачи оптимальной фильтрации .....	61
7.2. Критерии оптимальности фильтрации .....	62
7.3. Получение сообщения из белого шума с помощью формирующего фильтра .....	64
7.4. Алгоритм оптимальной аналоговой фильтрации .....	66
8. ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СООБЩЕНИЙ .....	69
8.1. Оптимальная линейная аналоговая фильтрация. Фильтр Калмана .....	69
8.2. Линейная фильтрация в дискретном времени .....	70
8.3. Особенности многомерной линейной фильтрации сообщений .....	72
ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ К ЭКЗАМЕНУ .....	74
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	79
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	79

## ВВЕДЕНИЕ

Радиоэлектронные системы (РЭС) являются информационными системами, предназначенными для передачи, приёма и обработки информации в интересах потребителя с использованием радиосигнала в качестве переносчика информации. Отличительной особенностью условий функционирования РЭС является наличие радиоканала, под которым понимают совокупность источника радиосигнала, среды его распространения и приёмника. Основное требование к радиосистеме – это достоверное и своевременное получение необходимой информации потребителем. Однако достоверному приёму и извлечению информации мешают реальные физические свойства приемопередающих устройств и среды распространения сигнала, суть которых заключается, во-первых, в случайных изменениях их параметров,

а, во-вторых, в возникновении помех, также имеющих случайную природу. Действительно, при распространении радиосигнала через турбулентную атмосферу и ионосферу, которые обладают случайными коэффициентами поглощения и преломления, происходит случайная модуляция радиосигнала по амплитуде, частоте и фазе. Внешние естественные помехи создаются различными электромагнитными процессами, происходящими в атмосфере, ионосфере и космическом пространстве, которые тоже имеют случайный характер. В приёмных устройствах возникают случайные процессы (шумы), обусловленные тепловым хаотическим движением электронов и т.д. Таким образом, задача приёма и извлечения информации в РЭС решается в условиях искажений принимаемого сигнала, имеющих случайный характер. Очевидно, что такие искажения снижают достоверность извлекаемой информации, и поэтому надо принимать меры по ослаблению влияния данных факторов, т.е., по сути, решать задачу оптимизации РЭС.

Математическим аппаратом, позволяющим оперировать случайными величинами и случайными процессами, является теория вероятностей и математическая статистика. На возможность и целесообразность применения статистических методов в радиотехнике одними из первых указали А.Н. Колмогоров (1939) и Н. Винер (1942) в своих работах по синтезу оптимальных линейных фильтров. Фундаментальной работой, посвящённой систематическому применению методов математической статистики в задачах радиосвязи, является теория потенциальной помехоустойчивости В.А. Котельникова (1946). За прошедшие более чем 60 лет статистические методы настолько прочно вошли в теорию РЭС, что ни одна новая разработка не начинается без детального анализа функционирования проектируемой системы в условиях влияния случайных процессов и синтеза отдельных устройств и подсистем статистическими методами. Все наиболее совершенные радиосистемы, такие, например, как системы мобильной связи, спутниковой радионавигации, спутникового телевидения, дистанционного зондирования Земли и планет, базируются на рекомендациях и выводах, полученных в статистической радиотехнике и в теории связи.

# 1. ОПТИМАЛЬНЫЙ РАДИОПРИЁМ КАК СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

## 1.1. ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ И ЕЁ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

Особенность радиоприёма состоит в том, что наряду с сигналами через антенную систему в приёмное устройство поступают разнообразные помехи. Помехи искажают сигнал и тем самым препятствуют получению достоверной информации.

Способность радиотехнической системы сохранять свои функции неизменными или изменяющимися в допустимых пределах при действии помех называется *помехоустойчивостью*. Количественно помехоустойчивость оценивается с помощью различных показателей, использующих вероятностное описание помех и сигналов. Например, применяются такие показатели, как отношение сигнал/шум на входе и выходе приёмного устройства, вероятность правильного обнаружения сигнала, среднее квадратическое отклонение ошибки определяемого параметра сигнала. Конкретный показатель помехоустойчивости выбирается из удобства решения задачи.

В теории помехоустойчивости различают две основные задачи: анализа и синтеза.

*Задача анализа* посвящена расчёту показателей помехоустойчивости существующих (разработанных) радиотехнических систем. В этом случае, полагая известными вероятностное описание сигнала и помехи на входе, определяют вероятностные характеристики выходного процесса, а по нему – показатели помехоустойчивости. Эта задача, по своей сути, сводится к анализу прохождения случайного процесса через линейные и нелинейные цепи, из которых состоит радиотехническая система.

*Задача синтеза* посвящена определению структурной схемы радиотехнической системы или, в более простом варианте, структурной схемы радиоприёмного устройства, которое обладало бы наилучшими, или оптимальными (от латинского *optimus* – "наилучший"), показателями помехоустойчивости при заданном предназначении устройства и при известном вероятностном описании сигнала и помехи на входе. В этом случае конкретный вид сигнала и помехи, который наблюдается в определённое время на входе приёмника и который, в принципе, может быть зафиксирован записывающей аппаратурой, рассматривается как выборка из того случайного процесса, условное вероятностное описание которого предполагается известным. Поэтому задачи синтеза, называемые также задачами оптимального радиоприёма, следует рассматривать как дальнейшее развитие таких задач математической статистики, как задача проверки гипотез и задача оценки параметров распределения.

В научно-технической литературе задача оптимального радиоприёма делится на четыре частные задачи: обнаружения сигнала, различения сигналов, оценки параметров сигнала, фильтрации сигнала или сообщений. Количественно эти задачи можно сформулировать следующим образом.

В *задаче обнаружения сигнала* требуется наилучшим образом по заданному критерию оптимальности на основании наблюдения процесса ответить на вопрос, содержит ли наблюдаемый процесс сигнал вместе с помехой или является только помехой.

В *задаче различения сигналов* наблюдаемый процесс может вместе с помехой содержать один из двух взаимно исключающих сигналов, но какой именно, неизвестно. Требуется по заданному критерию оптимальности наилучшим образом ответить на вопрос, какой именно сигнал вместе с помехой присутствует в наблюдаемом процессе.

В *задаче оценки параметров сигнала* считается, что в наблюдаемом процессе вместе с помехой существует сигнал с одним или несколькими неизвестными параметрами и требуется наилучшим образом по заданному критерию оценить эти неизвестные параметры. К этой задаче тесно примыкает *задача разрешения сигнала*, когда считается, что вместе с помехой в наблюдаемом процессе могут существовать один или два сигнала, неизвестные параметры которых незначительно отличаются между собой. Однако сколько этих сигналов – один или два – заранее неизвестно. Требуется, увеличивая различие между параметрами сигнала, определить то наименьшее различие, при котором наступает уверенное разрешение сигналов.

В *задаче оптимальной фильтрации* считается, что в наблюдаемом процессе существует вместе с помехой сигнал, у которого какой-либо параметр в соответствии со случайным законом модуляции изменяется во времени. Требуется в каждый момент времени дать наилучшую оценку меняющемуся параметру по заданному критерию оптимальности. Отличие от задачи оценки параметра здесь состоит в том, что этот параметр является случайной функцией времени, в то время как в предыдущей задаче параметр есть случайная величина, но постоянная на интервале наблюдения.

## 1.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

### 1.2.1. Условные плотности вероятности суммы сигнала и шума

В задаче обнаружения подлежащий наблюдению случайный процесс удобно записывать в виде суммы:

$$\xi(t) = \lambda S(t) + n(t), \quad (1.1)$$

где  $\lambda$  – случайная величина, равная "0", если сигнал отсутствует, и равная "1", если сигнал присутствует;  $S(t)$  – детерминированный сигнал;  $n(t)$  – стационарный гауссовский шум с  $\langle n(t) \rangle = 0$ ,  $\langle n^2(t) \rangle = \sigma_n^2$ .

Заметим, что процесс  $\xi(t)$ , определяемый выражением (1.1), является случайным как из-за случайности шума  $n(t)$ , так и из-за случайности величины  $\lambda$ . Последнее обстоятельство приводит к тому, что процесс  $\xi(t)$  характеризуется условными плотностями вероятностей: одной при условии, что  $\lambda = 0$ , а другой – при условии, что  $\lambda = 1$ .

Если  $\lambda = 0$ , то равенство (1.1) примет вид

$$\xi(t) = n(t). \quad (1.2)$$

В этом случае условная одномерная плотность вероятности определится в соответствии с формулой для гауссовского распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_n^2$  выражением

$$p_\xi(x | \lambda = 0) = p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right), \quad (1.3)$$

где индекс  $n$  в  $p_n(x)$  означает, что рассматривается плотность вероятности при условии, что  $\lambda = 0$ , когда действует только шум.

Если  $\lambda = 1$ , то равенство (1.1) примет вид

$$\xi(t) = S(t) + n(t). \quad (1.4)$$

При детерминированном сигнале процесс (1.4) будет иметь математическое ожидание, равное сигналу

$$\langle \xi(t) \rangle = \langle S(t) + n(t) \rangle = \langle S(t) \rangle + \langle n(t) \rangle = S(t). \quad (1.5)$$

В соответствии с этим условная плотность вероятности процесса (1.4) будет определяться выражением, отличающимся от (1.3) только математическим ожиданием

$$p_\xi(x | \lambda = 1) = p_{sn}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} \exp\left(-\frac{[x - S(t)]^2}{2\sigma_n^2}\right). \quad (1.6)$$

Найдем условные  $n$ -мерные плотности вероятности в предположении, что процесс  $\xi(t)$  может наблюдаться на интервале времени  $[0, T]$ , а интервал времени корреляции шума равен  $\tau_{kn}$ . Если проводить сечение процесса через интервал  $\Delta t \geq \tau_{kn}$ , то все сечения

$$\xi(t) = [\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)] = (\xi_1, \xi_1, \dots, \xi_n) \quad (1.7)$$

будут некоррелированными, а так как процесс  $\xi(t)$  гауссовский – независимыми. При этом число независимых сечений ограничивается величиной

$$n \leq \frac{T}{\tau_{kn}}. \quad (1.8)$$

Тогда условные  $n$ -мерные плотности вероятности определяются как произведения одномерных (1.3) или (1.6). Соответственно, для  $\lambda = 0$  и  $\lambda = 1$  эти плотности будут равны

$$p_{\xi}(x_1, \dots, x_n | \lambda = 0) = p_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma_n^2})^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\sigma_n^2}\right); \quad (1.9)$$

$$p_{\xi}(x_1, \dots, x_n | \lambda = 1) = p_{sn}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma_n^2})^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{[x_i - S(t_i)]^2}{2\sigma_n^2}\right), \quad (1.10)$$

где  $S(t_i)$  – значение сигнала  $S(t)$  в момент определения сечения  $t = t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Перейдём к непрерывному времени наблюдения, положив  $t_1 = 0$ ,  $t_n = T$ . Если  $n(t)$  является гауссовским белым шумом, то  $n$ -мерная плотность вероятности (1.9) превратится в условный функционал, в котором  $\sigma_n^2 = N_0 \Delta f \rightarrow \infty$ , суммирование заменяется интегрированием, а последовательный ряд возможных значений  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  вырождается в возможную реализацию  $x(t)$ :

$$p_n[x(t)] = k \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt\right\}. \quad (1.11)$$

Так как выражение (1.10) отличается от (1.9) только математическим ожиданием, то при белом шуме плотность вероятности (1.10) переходит в условный функционал

$$p_{sn}[x(t)] = k \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - S(t)]^2 dt\right\}. \quad (1.12)$$

Функционалы (1.11), (1.12) являются полными аналогами условных плотностей вероятности (1.9), (1.10), с той только разницей, что при решении практических задач ответы необходимо получать в виде отношения функционалов, чтобы коэффициент  $k$ , который при белом шуме стремится к нулю, сократился.

### 1.2.2. Функция правдоподобия при дискретном и непрерывном наблюдениях. Корреляционный приём

Выражения (1.9), (1.10) и (1.11), (1.12) можно рассматривать как условные плотности вероятности либо дискретной выборки  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  объёма  $n$ , либо непрерывной выборки  $x(t)$ , у которой мерой объёма является время наблюдения  $T$ .

Задачу обнаружения можно свести к задаче оценки параметра  $\lambda$ . Если определить, что параметр  $\lambda = 0$ , то в соответствии с (1.1) это то же самое, что принять решение о том, что в наблюдаемой реализации процесса  $\xi(t)$  сигнал отсутствует. И наоборот, если определить, что  $\lambda = 1$ , то это значит принять решение о наличии сигнала  $S(t)$  в наблюдаемой реализации процесса  $\xi(t)$ .

Поэтому если в условные плотности вероятности (1.9), (1.10) поставить на место дискретных аргументов  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  конкретные результаты наблюдений  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , то получим функцию правдоподобия  $L(\lambda)$  при дискретном наблюдении. При этом, так как параметр  $\lambda$  может принимать только два значения, то и функция правдоподобия  $L(\lambda)$  будет состоять из двух значений:

$$L(\lambda = 0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma_n})^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{*2}}{2\sigma_n^2}\right); \quad (1.13)$$

$$L(\lambda = 1) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma_n})^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{[x_i^* - S(t_i)]^2}{2\sigma_n^2}\right). \quad (1.14)$$

Если же в условных функционалах (1.11), (1.12) на место возможной непрерывной реализации  $x(t)$  поставить конкретную зафиксированную реализацию  $x^*(t)$ , получим функцию правдоподобия  $L(\lambda)$  для непрерывного времени наблюдения, состоящую из двух значений:

$$L(\lambda = 0) = k \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x^*(t)]^2 dt\right\}; \quad (1.15)$$

$$L(\lambda = 1) = k \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x^*(t) - S(t)]^2 dt\right\}. \quad (1.16)$$

В дальнейшем звездочки у  $x_i^*$  и  $x^*(t)$  в формулах для простоты написания будем опускать, но всегда будем иметь в виду, что в выражениях для функции правдоподобия  $L(\lambda)$  величины  $x_i$  и  $x(t)$  есть конкретные результаты наблюдений.

В задаче обнаружения при гауссовском шуме обычно используются не сами значения функции правдоподобия  $L(\lambda = 0)$  и  $L(\lambda = 1)$ , а логарифм их отношения  $\Lambda$ . Найдём этот логарифм при непрерывном времени наблюдения:

$$\begin{aligned} \ln \Lambda = \ln \frac{L(\lambda = 1)}{L(\lambda = 0)} &= \ln \frac{k \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x^*(t) - S(t)]^2 dt\right\}}{k \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt\right\}} = \\ &= \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)S(t)dt - \frac{E_s}{N_0}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где  $E_s = \int_0^T S^2(t)dt$  – удельная энергия сигнала.

Полагаем, что отношение сигнал/шум по энергии при белом шуме определяется выражением  $q = \sqrt{2E_s/N_0}$ . Тогда формулу (1.17) можно записать в виде

$$\ln \Lambda = \ln \frac{L(\lambda = 1)}{L(\lambda = 0)} = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)S(t)dt - \frac{1}{2}q^2. \quad (1.18)$$

Интеграл вида

$$y = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)S(t)dt \quad (1.19)$$

называется *взаимным корреляционным интегралом* между наблюдаемым процессом  $x(t)$  и копией сигнала.

Математическая операция (1.19) является наиболее существенной для нахождения логарифма отношения правдоподобия, так как отношение сигнал/шум  $q$  для полностью известного сигнала и за-

данного уровня шума  $N_0$  определено. В то же время (1.19) является функцией результата наблюдения  $x(t)$  и поэтому представляет собой статистику  $y$ . Учитывая, что статистика  $y$  полностью определяет логарифм отношения правдоподобия, её называют *достаточной статистикой*.

Радиоприёмник (рис. 1.1), реализующий вычисление взаимного корреляционного интеграла между наблюдаемым процессом  $x(t)$  и копией

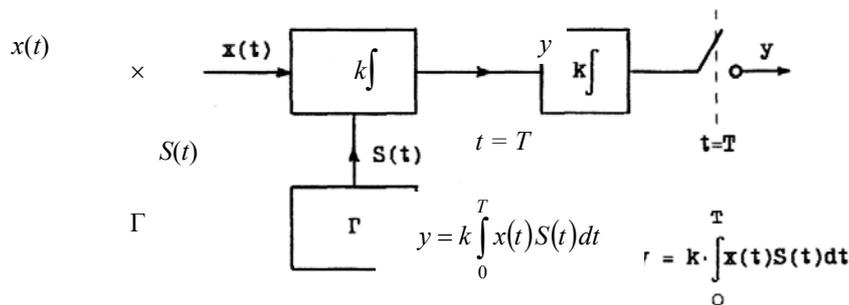


Рис. 1.1. Структурная схема корреляционного приёмника

сигнала  $S(t)$ , называется *корреляционным приёмником*. Этот приёмник включает в себя гетеродин  $\Gamma$ , восстанавливающий копию сигнала  $S(t)$ , множитель сигнала  $S(t)$  с входным процессом  $x(t)$  и интегратор. Результат вычислений получается на выходе интегратора в момент окончания наблюдения. Корреляционный приёмник лежит в основе построения многих оптимальных устройств, синтезируемых на основе решения оптимальных задач радиоприёма.

### 1.2.3. Апостериорная плотность вероятности

В задаче оценки параметра самой простой моделью сигнала является представление сигнала в виде квазидетерминированного колебания  $S(t, \lambda)$ , у которого известна функциональная зависимость от времени, но неизвестен какой-то параметр  $\lambda$  (например, амплитуда, частота или фаза). Этот параметр рассматривается как случайная величина с заданной априорной вероятностью  $p(\lambda)$ , характеризующей большой дисперсией.

При решении задачи оценки параметра будем считать, что подлежащий наблюдению процесс  $\xi(t)$  представляет собой сумму сигнала  $S(t, \lambda)$  и шума  $n(t)$ :

$$\xi(t) = S(t, \lambda) + n(t).$$

Отличие от (1.1) состоит в том, что здесь уже установлено наличие сигнала. Требуется только за счёт наблюдения реализации  $x(t)$  процесса  $\xi(t)$  уточнить значение параметра  $\lambda$ . Условная плотность вероятности при непрерывном наблюдении реализации  $x(t)$ , когда  $n(t)$  является гауссовским белым шумом, будет равна

$$p_{sn}[x(t) | \lambda] = k \exp \int_0^T [x(t) - S(t, \lambda)]^2 dt. \quad (1.20)$$

Отличие (1.20) и (1.12) состоит только в том, что в силу неизвестности параметра  $\lambda$ , плотность вероятности (1.20) рассматривается как условная относительно  $\lambda$ . При этом задача оценки параметра сигнала, по существу, сводится к задаче оценки параметра распределения.

Если рассматривать  $x(t)$  в формуле (1.20) как результат наблюдения, то функция правдоподобия оцениваемого параметра полностью будет совпадать с выражением (1.20)

$$L(\lambda) = k_1 \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - S(t, \lambda)]^2 dt \right\}, \quad (1.21)$$

и можно записать апостериорную плотность вероятности параметра  $\lambda$  в виде

$$p[\lambda | x(t)] = k_1 p(\lambda) L(\lambda), \quad (1.22)$$

где  $k_1$  находится из условия нормировки апостериорной плотности.

Основное свойство апостериорной плотности вероятности (1.22) состоит в том, что она содержит все сведения об оцениваемом параметре  $\lambda$ , как имеющиеся до наблюдения  $x(t)$  в априорной плотности вероятности  $p(\lambda)$ , так и сведения, полученные в результате наблюдения  $x(t)$  и содержащиеся в функции правдоподобия  $L(\lambda)$ .

## 2. ОПТИМАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФИЛЬТРЫ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ПОМЕХ

### 2.1. ОПТИМАЛЬНЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ ФИЛЬТР ПО МИНИМУМУ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ

Рассмотрим задачу оптимальной фильтрации сигнала. *Оптимальным фильтром* назовём такое устройство, которое обеспечивает наилучшее по заданному критерию выделение сигнала из наблюдаемой смеси сигнала и шума. Смысл слова "выделение" сигнала совпадает с понятием оценки сигнала.

Пусть имеется сумма сигнала и шума

$$\xi(t) = S(t) + n(t), \quad (2.1)$$

где сигнал  $S(t)$  и шум  $n(t)$  являются стационарными случайными процессами с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями  $R_s(\tau)$  и  $R_n(\tau)$ .

Требуется, чтобы оценка сигнала  $\hat{S}(t)$ , являющаяся откликом на воздействие  $\xi(t)$ , была бы как можно ближе к истинному значению сигнала  $S(t)$ . Тогда за ошибку фильтрации  $\varepsilon(t)$  можно принять разность

$$\varepsilon(t) = \hat{S}(t) - S(t). \quad (2.2)$$

Сделаем дополнительное предположение, что оценка сигнала  $\hat{S}(t)$  является стационарным случайным процессом. Тогда процесс  $\varepsilon(t)$  как разность двух стационарных процессов также будет стационарным. В этом случае удобно в качестве числовой характеристики ошибки  $\varepsilon(t)$  взять дисперсию

$$D_\varepsilon = \langle \varepsilon^2(t) \rangle = \langle [\hat{S}(t) - S(t)]^2 \rangle. \quad (2.3)$$

Выберем за критерий оптимальности минимум дисперсии  $D_{\varepsilon_{\min}}$ . По этому критерию фильтр будет оптимальным в том случае, если он по сравнению с любыми другими фильтрами обеспечивает получение оценки сигнала  $\hat{S}(t)$  с наименьшим средним квадратом ошибки.

Если искать оптимальный фильтр среди линейных цепей с постоянными параметрами, то в качестве оценки  $\hat{S}(t)$  выступает выходной процесс

$$\hat{S}(t) = \eta(t) = \int_0^t h(\tau) \xi(t - \tau) d\tau. \quad (2.4)$$

Подставив (2.4) в (2.3), получим

$$D_\varepsilon = \left\langle \left[ \int_0^t h(\tau) \xi(t-\tau) d\tau - S(t) \right]^2 \right\rangle. \quad (2.5)$$

Математическая задача нахождения оптимального фильтра сводится к отысканию такого вида импульсной характеристики фильтра  $h(t)$ , при которой дисперсия (2.5) становится минимальной. Методами вариационного исчисления установлено, что искомая характеристика  $h(t)$  должна являться решением следующего интегрального уравнения:

$$\int_0^\infty h(t) R_\xi(\tau-t) dt = R_{\xi S}(\tau). \quad (2.6)$$

где  $R_\xi(\tau) = \langle \xi(t) \xi(t-\tau) \rangle$  – корреляционная функция процесса,  $\xi(t)$  если  $S(t)$  и  $n(t)$  являются независимыми случайными процессами, то  $R_\xi(\tau) = R_S(\tau) + R_n(\tau)$ ;  $R_{\xi S}(\tau) = \langle \xi(t) S(t-\tau) \rangle$  – взаимная корреляционная функция между процессами  $\xi(t)$  и  $S(t)$ , для независимых  $S(t)$  и  $n(t)$  имеет место равенство  $R_{\xi S}(\tau) = R_S(\tau)$ .

Уравнение (2.6) в научно-технической литературе называется уравнением Винера-Хопфа, а найденная из решения этого уравнения оптимальная импульсная характеристика  $h_{\text{opt}}(t)$  определяет оптимальный *винеровский фильтр*. Его комплексная частотная характеристика  $k_{\text{opt}}(j\omega)$  может быть найдена как преобразование Фурье от  $h_{\text{opt}}(t)$ :

$$k_{\text{opt}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.7)$$

Величина минимального квадрата ошибки винеровского фильтра определяется выражением

$$\varepsilon_{\min}^2 = R_S(0) - \int_0^\infty h_{\text{opt}}(\tau) R_{\xi S}(\tau) d\tau. \quad (2.8)$$

Однако следует заметить, что решение интегрального уравнения (2.6) наталкивается на значительные трудности даже в случае стационарности процессов  $\xi(t)$  и  $S(t)$ , когда для выработки оценки  $\hat{S}(t)$  теоретически имеется всё бесконечное прошлое процесса  $\xi(t)$ , так как считается, что с момента воздействия  $\xi(t)$  прошло значительное время и переходные процессы затухли. Сложность процедуры расчёта  $h_{\text{opt}}(t)$  определяется как тем, что приходится решать интегральное уравнение, так и тем, что из всего класса решений  $h(t)$  требуется выбрать ту импульсную характеристику, которая удовлетворяет условию физической реализуемости, под которым понимается соотношение

$$h(t) = 0, \text{ если } t < 0.$$

Его смысл состоит в утверждении, что отклик линейной системы не может быть раньше воздействия. По этой причине рассмотренная процедура нахождения  $h_{\text{opt}}(t)$  и  $k_{\text{opt}}(j\omega)$  винеровского фильтра на практике не нашла широкого распространения.

## 2.2. СОГЛАСОВАННЫЙ ФИЛЬТР И ЕГО ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

### 2.2.1. Импульсная характеристика и отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра

*Согласованным фильтром* называется линейная цепь, которая для определённой аддитивной смеси сигнала и шума обеспечивает на выходе наибольшее отношение сигнал/шум. Согласованный

фильтр можно рассматривать как оптимальный, у которого критерием оптимальности является достижение максимума отношения сигнал/шум. Для согласованного фильтра не важно, как искажается выходной сигнал по отношению к входному. Важно, чтобы при этом достигалось максимально возможное по отношению к любым другим фильтрам отношение сигнал/шум на выходе.

Найдём импульсную характеристику согласованного фильтра  $h_{\text{сф}}(t)$  и отношение сигнал/шум на его выходе  $q_{\text{вых}}$  в случае, если на вход поступает аддитивная смесь сигнала и шума

$$\xi(t) = S(t) + n(t),$$

где  $S(t)$  – импульсный детерминированный сигнал с энергией  $E_S = \int_0^{t_0} S^2(t) dt$ ;  $t_0$  – момент окончания сигнала;  $n(t)$  – белый шум с корреляционной функцией  $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ .

Входное отношение сигнал/шум, характеризующее процесс  $\xi(t)$ , определим как отношение сигнал/шум по энергии:

$$q_E = \frac{2E_S}{N_0}.$$

Выходное отношение сигнал/шум, характеризующее отношение сигнал/шум на выходе фильтра, определим как отношение сигнал/шум по мощности, равное квадрату пикового отношения сигнал/шум:

$$q_{\text{вых}} = \frac{S_{\text{вых}}^2(t_0)}{\sigma_{n \text{ вых}}^2(t_0)}, \quad (2.9)$$

где  $S_{\text{вых}}(t_0)$  – выходное значение сигнала в момент  $t_0$ , при котором выходной импульс достигает максимума;  $\sigma_{n \text{ вых}}^2(t_0)$  – дисперсия выходного шума в момент  $t_0$ .

В силу принципа суперпозиции величины  $S_{\text{вых}}(t_0)$  и  $\sigma_{n \text{ вых}}^2(t_0)$  могут быть найдены отдельно:

$$S_{\text{вых}}(t_0) = \int_0^{t_0} h(t_0 - t) S(t) dt; \quad (2.10)$$

$$\sigma_{n \text{ вых}}^2(t_0) = \frac{N_0}{2} \int_0^{t_0} h^2(t_0 - t) dt. \quad (2.11)$$

Подставив (2.10) и (2.11) в (2.9), получим

$$q_{\text{вых}} = \frac{\left[ \int_0^{t_0} h(t_0 - t) S(t) dt \right]^2}{\frac{N_0}{2} \int_0^{t_0} h^2(t_0 - t) dt}. \quad (2.12)$$

Существует неравенство Буняковского-Шварца

$$\left[ \int_a^b f(t) g(t) dt \right]^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt \int_a^b g^2(t) dt, \quad (2.13)$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$f(t) = k g(t), \quad (2.14)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности.

Применяя неравенство (2.13) к выражению (2.12), получим

$$q_{\text{ВЫХ}} = \frac{\int_0^{t_0} h^2(t_0 - t) dt \int_0^{t_0} S^2(t) dt}{\frac{N_0}{2} \int_0^{t_0} h^2(t_0 - t) dt},$$

или

$$q_{\text{ВЫХ}} \leq \frac{2E_s}{N_0}. \quad (2.15)$$

Неравенство (2.15) превращается в равенство, если импульсную характеристику, согласно условию (2.14), выбрать в следующем виде:

$$h_{\text{сф}}(t) = k S(t_0 - t). \quad (2.16)$$

Выражение (2.16) определяет импульсную характеристику согласованного фильтра, так как при этом достигается максимум отношения сигнал/шум на выходе. Этот максимум равен отношению сигнал/шум на входе независимо от формы сигнала  $S(t)$ :

$$q_{\text{ВЫХ}} = \frac{2E_s}{N_0} \text{ или } \left[ \frac{S_{\text{ВЫХ}}(t_0)}{\sigma_{\text{н Вых}}(t_0)} \right]^2 = \frac{2E_s}{N_0},$$

что для пикового отношения сигнал/шум соответствует равенству

$$q_{\text{ВЫХ.сф}} = \frac{S_{\text{ВЫХ}}(t_0)}{\sigma_{\text{н Вых}}(t_0)} = \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}, \quad (2.17)$$

где индекс "сф" указывает, что равенство (2.17) достигается только в согласованном фильтре.

### 2.2.2. Согласованный фильтр как коррелятор

Пусть согласованный фильтр согласован с сигналом  $S(t)$ , т.е. импульсная характеристика фильтра определяется выражением (2.16).

Подадим на вход фильтра произвольный процесс  $x(t)$  и найдём отклик фильтра в момент времени  $t_0$ , равный длительности сигнала  $S(t)$ , с которым фильтр согласован.

В произвольный момент времени  $t$  процесс на выходе равен

$$y(t) = \int_0^t h(t_1) x(t - t_1) dt_1.$$

Для согласованного фильтра справедливо выражение (2.16), поэтому

$$y(t) = k \int_0^t S(t_0 - t_1) x(t - t_1) dt_1, \quad (2.18)$$

которое при  $t = t_0$  имеет вид  $y(t_0) = k \int_0^{t_0} S(t_0 - t_1) x(t_0 - t_1) dt_1$ , В свою очередь, заменяя под интегралом  $(t_0 - t)$  на  $t$ , получим

$$y(t_0) = k \int_0^{t_0} S(t) x(t) dt. \quad (2.19)$$

Выражение (2.19) пропорционально взаимному корреляционному интегралу между наблюдаемым процессом  $x(t)$  и копией сигнала  $S(t)$ , с которым фильтр согласован. Если выбрать  $k = 2/N_0$ , то совпадение будет полным. Поэтому согласованный фильтр широко используется в оптимальном приёме для вычисления взаимного корреляционного интеграла.

### 2.2.3. Комплексная частотная характеристика согласованного фильтра

Комплексная частотная характеристика согласованного фильтра может быть найдена как преобразование Фурье от  $h_{\text{опт}}(t)$ :

$$K_{\text{сф}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{опт}}(t) e^{-j\omega t} dt = k \int_{-\infty}^{\infty} S(t_0 - t) e^{-j\omega t} dt.$$

Сделав замену переменных  $\tau = t_0 - t$ , получим

$$K_{\text{сф}}(j\omega) = k e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{j\omega t} dt. \quad (2.20)$$

Интеграл в формуле (2.20) определяет комплексно-сопряжённый спектр сигнала

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{j\omega t} dt = S(-j\omega) = S^*(j\omega),$$

так как в показателе экспоненты стоит знак плюс, а не минус, как это надо для определения спектра сигнала.

Таким образом, комплексная частотная характеристика согласованного фильтра

$$K_{\text{сф}}(j\omega) = k S^*(j\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (2.21)$$

пропорциональна произведению комплексно-сопряжённого спектра сигнала  $S^*(j\omega)$  на множитель задержки  $e^{-j\omega t_0}$ . Представим комплексный спектр  $S(j\omega)$  сигнала  $S(t)$  в виде

$$S(j\omega) = S(\omega) e^{j\varphi_S(\omega)}, \quad (2.22)$$

где  $S(\omega)$  и  $\varphi_S(\omega)$  – соответственно амплитудный и фазовый спектры сигнала.

Комплексно-сопряжённый спектр будет отличаться от (2.22) только знаком показателя экспоненты:

$$S^*(j\omega) = S(-j\omega) = S(\omega) e^{-j\varphi_S(\omega)}. \quad (2.23)$$

Подставив (2.23) в (2.21), получим

$$K_{\text{сф}}(j\omega) = K_{\text{сф}}(\omega) e^{j\varphi_{\text{сф}}(\omega)}, \quad (2.24)$$

где  $K_{сф}(\omega) = kS(\omega)$  – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) согласованного фильтра;  $\varphi_{сф}(\omega) = -[\varphi_S(\omega) + \omega t_0]$  – фазочастотная характеристика (ФЧХ) согласованного фильтра.

Пропорциональность АЧХ согласованного фильтра амплитудному спектру сигнала приводит к тому, что коэффициенты передачи фильтра больше на тех частотах, на которых выше амплитуда спектральных составляющих сигнала, и меньше там, где составляющая ниже.

ФЧХ согласованного фильтра определяется взятой с обратным знаком суммой фазового спектра сигнала  $\varphi_S(\omega)$  и пропорционального частоте  $\omega$ .

### 3. ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

#### 3.1. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ КАК СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Пусть на вход обнаружителя поступает сумма сигнала  $s(t)$  и шума  $n(t)$ , представляющая собой случайный непрерывный процесс

$$\xi(t) = \lambda s(t) + n(t), \quad (3.1)$$

где  $s(t)$  – полностью известный сигнал;  $\lambda$  – случайный параметр, равный "1", когда сигнал присутствует, и равный "0", когда сигнал отсутствует;  $n(t)$  – шум с известным законом распределения.

Обнаружитель анализирует реализацию  $x(t)$  процесса  $\xi(t)$  в течение заранее выбранного конечного интервала времени  $T$  и затем на основании анализа принимает решение: существует ли сигнал в наблюдаемой реализации или нет.

В настоящее время для решения подобных задач широко применяются методы математической статистики. Основной задачей математической статистики является установление законов распределения случайных величин на основе результатов наблюдения над этими величинами. В результате наблюдения над некоторой случайной величиной получается совокупность выборочных  $(x_1, \dots, x_n)$  значений этой величины, называемая выборкой; число  $n$  выборочных значений, содержащихся в данной выборке, называется объёмом выборки.

В случае обнаружения сигналов реализация  $x(t)$  является непрерывной функцией времени (при непрерывном или дискретном сигнале  $s(t)$  в смеси) с ограниченным спектром. Представим  $x(t)$  выборочными значениями  $(x_1, \dots, x_n)$ , взятыми в соответствии с теоремой Котельникова с интервалом  $\Delta t = 1/2F$ , где  $F$  – эффективная ширина спектра колебания  $x(t)$ . При этом объём выборки определяется соотношением

$$n = T / \Delta t = 2TF. \quad (3.2)$$

На основании анализа выборки  $(x_1, \dots, x_n)$  обнаружитель должен оценить параметр  $\lambda$ . Очевидно точность оценки зависит от объёма выборки при неограниченном времени наблюдения  $T$ . Однако на практике  $T$  ограничено, а с увеличением объёма выборки при  $T = \text{const}$  погрешность оценки не устремляется к нулю.

Выборка, у которой  $n \rightarrow \infty$  при  $T = \text{const}$ , называется непрерывной. Вид выборки (дискретная или непрерывная) определяется удобством математического анализа. Заметим, что если для дискретной выборки какая-либо формула получена в виде суммы, то соответствующий результат для непрерывной выборки может быть получен при замене суммы интегралом, если в этой формуле положить  $\Delta t \rightarrow 0$  или  $n \rightarrow \infty$  при  $T = \text{const}$ . Поскольку в задачах обнаружения оценка параметра  $\lambda$  является дискретной ( $\lambda = 0$  или  $\lambda = 1$ ), при конечном объёме выборки можно лишь с некоторыми вероятностями высказать статистические гипотезы. Следовательно, решение задачи обнаружения сводится к проверке двух альтернативных (противоположных) статистических гипотез. Гипотеза  $H_1$  – сигнал во входной смеси есть ( $\lambda = 1$ ) и гипотеза  $H_0$  – сигнала нет ( $\lambda = 0$ ). При этом вероятности  $P(H_1)$  и  $P(H_0)$  являются соответственно априорными вероятностями наличия и отсутствия сигнала.

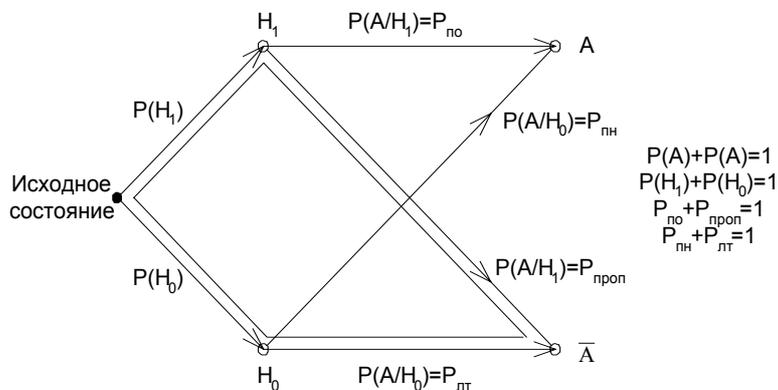
### 3.2. ОШИБКИ ПРИ ОБНАРУЖЕНИИ СИГНАЛА

При обнаружении сигнала могут быть четыре ситуации:

- 1) правильное обнаружение (по), когда сигнал на входе обнаружителя существует и принимается решение о его наличии;
- 2) правильное необнаружение (пн), когда сигнала на входе нет и принимается решение об его отсутствии;
- 3) пропуск сигнала (проп), когда сигнал на входе существует, однако принимается решение об его отсутствии;
- 4) ложная тревога (лт), когда сигнала на входе нет, но принимается решение о его присутствии.

Первые две ситуации образуют событие  $A$ , соответствующее принятию безошибочного решения. Последние две ситуации образуют событие  $\bar{A}$ , соответствующее принятию неверного или ошибочного решения.

С помощью графа исходов (рис. 3.1) можно рассчитать вероятность принятия ошибочного решения или вероятность ошибки  $P_{\text{ош}}$ .



**Рис. 3.1. Граф исходов при обнаружении**

На рисунке обозначены:  $P(H_1)$ ,  $P(H_0)$  – априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала;  $P_{\text{по}} = P(A/H_1)$  – условная вероятность правильного обнаружения, соответствующая вероятности правильного решения  $A$  при условии, что в действительности сигнал существует;  $P_{\text{пн}} = P(A/H_0)$  – условная вероятность правильного необнаружения, соответствующая вероятности правильного решения  $A$  при условии, что в действительности сигнала нет;  $P_{\text{проп}} = P(\bar{A}/H_1)$  – условная вероятность пропуска, соответствующая вероятности ошибочного решения  $\bar{A}$  при условии, что в действительности сигнал есть;  $P_{\text{лт}} = P(\bar{A}/H_0)$  – условная вероятность ложной тревоги, соответствующая вероятности ошибочного решения  $\bar{A}$  при условии, что сигнала в действительности нет.

Из графа исходов непосредственно по формуле полной вероятности следует, что

$$P_{\text{ош}} = P(\bar{A}) = P(H_1) P(\bar{A}/H_1) + P(H_0) P(\bar{A}/H_0);$$

или

$$P_{\text{ош}} = P(H_1) P_{\text{проп}} + P(H_0) P_{\text{лт}}. \quad (3.3)$$

Таким образом, вероятность ошибки  $P_{\text{ош}}$  зависит как от априорных вероятностей  $P(H_1)$ ,  $P(H_0)$ , так и от условных вероятностей  $P_{\text{проп}}$ ,  $P_{\text{лт}}$ .

Рассмотренные условные вероятности  $P_{\text{по}}$ ,  $P_{\text{пн}}$ ,  $P_{\text{проп}}$  и  $P_{\text{лт}}$  позволяют характеризовать качество оптимального обнаружения. Обычно в этих целях используют вероятности  $P_{\text{по}}$  и  $P_{\text{лт}}$ , с учетом того, что

$$P_{\text{проп}} = 1 - P_{\text{по}}, \quad P_{\text{пн}} = 1 - P_{\text{лт}}.$$

### 3.3. КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ

Критерием оптимальности называется правило, по которому из всех возможных обнаружителей можно выбрать наилучший.

Наиболее общим критерием оптимального обнаружения является критерий Байеса, или иначе – критерий минимума среднего риска.

С точки зрения критерия Байеса оптимальным считается такой обнаружитель, который имеет минимальную вероятность ошибочных решений с учетом их "веса" или степени нежелательности.

Используя условные вероятности  $P_{\text{по}}$ ,  $P_{\text{лт}}$  и выражение (3.3), можно записать следующее выражение для среднего риска процесса обнаружения:

$$\bar{C} = P(H_1)(1 - P_{\text{по}})C_{\text{проп}} + P(H_0)P_{\text{лт}}C_{\text{лт}}, \quad (3.4)$$

где  $C_{\text{проп}}$  и  $C_{\text{лт}}$  – веса ошибочных решений.

Вынесем в выражении (3.4) за скобки  $P(H_1)C_{\text{проп}}$ , тогда

$$\bar{C} = P(H_1)C_{\text{проп}} [1 - (P_{\text{по}} - \Lambda_0 P_{\text{лт}})], \quad (3.5)$$

где  $\Lambda_0$  – весовой множитель, равный

$$\Lambda_0 = \frac{P(H_0)C_{\text{лт}}}{P(H_1)C_{\text{проп}}}.$$

Из анализа (3.5) следует, что условие минимизации  $\bar{C}$  заключается в получении максимального значения разности  $(P_{\text{по}} - \Lambda_0 P_{\text{лт}})$ , которую называют *взвешенной разностью*.

Таким образом,

$$\bar{C} = \min \text{ при } P_{\text{по}} - \Lambda_0 P_{\text{лт}} = \max. \quad (3.6)$$

Критерий Байеса является наиболее общим. На его основе, как частные случаи, могут быть получены и другие критерии.

Если принять веса ошибок одинаковыми  $C_{\text{проп}} = C_{\text{лт}} = 1$ , то из (3.4) получим, что средний риск равен суммарной вероятности ошибки:

$$\bar{C} = P_{\text{ош}} = P(H_1)(1 - P_{\text{по}}) + P(H_0)P_{\text{лт}}. \quad (3.7)$$

Условие минимума суммарной вероятности ошибки (3.7) называется *критерием идеального наблюдателя*. Он используется при решении задач передачи сообщений, где одинаково нежелательны как пропуски, так и искажения элементов сообщения.

Для критерия идеального наблюдателя можно записать вместо (3.7) следующее условие оптимизации:

$$P_{\text{по}} - \Lambda_0 P_{\text{лт}} = \max, \quad (3.8)$$

где  $\Lambda_0 = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$ .

В радиолокации наибольшее применение находит *критерий Неймана-Пирсона*, являющийся частным случаем критериев Байеса и идеального наблюдателя. Сущность критерия заключается в том, что фиксируется условная вероятность ложной тревоги  $P_{\text{лт}}$ , после чего максимизируется условная вероятность правильного обнаружения  $P_{\text{по}}$ .

Критерий записывается в виде

$$P_{лт} = \text{const}; P_{по} = \text{max}. \quad (3.9)$$

Широкое применение критерия Неймана-Пирсона в радиолокации объясняется тем, что:

- во-первых, как правило, неизвестны априорные вероятности  $P(H_0)$  и  $P(H_1)$ , а также  $C_{проп}$  и  $C_{лт}$ ;
- во-вторых, в обзорных РЛС большую часть интервала наблюдения принятый сигнал обусловлен только шумом, поэтому ложная тревога является крайне нежелательной и её величина должна быть ограничена заранее, исходя из тактических соображений. Обычно задают  $P_{лт} = 10^{-10} \dots 10^{-6}$ , используя выражение

$$P_{лт} \approx \tau_{ш} / T_{лт},$$

где  $\tau_{ш}$  – длительность шумового выброса;  $T_{лт}$  – период появления ложной тревоги.

Таким образом, в результате наблюдения выборки  $(x_1, \dots, x_n)$  по выбранному критерию оптимальности должно быть получено одно из двух взаимоисключающих решений:  $A$  – сигнал есть;  $\bar{A}$  – сигнала нет. Каждая возможная выборка представляется в многомерном пространстве одной точкой. Оптимальный обнаружитель должен разделить пространство выборок на два соприкасающихся пространства  $X$  и  $\bar{X}$ . Если точка  $M$ , соответствующая  $k$ -й выборке  $(x_1, \dots, x_n)$ , попадает в пространство  $X$  – принимается решение  $A$ , в противном случае – решение  $\bar{A}$ . В соответствии с критерием (3.6) можно записать

$$P_{по} - \Lambda_0 P_{лт} = \int \dots \int_X [p(x_1, \dots, x_n / \lambda = 1) - \Lambda_0 p(x_1, \dots, x_n / \lambda = 0)] dx_1, \dots, dx_n = \text{max}, \quad (3.10)$$

где  $p(x_1, \dots, x_n / \lambda = 1)$  и  $p(x_1, \dots, x_n / \lambda = 0)$  – условные  $n$ -мерные плотности вероятности дискретной выборки  $(x_1, \dots, x_n)$  при наличии сигнала ( $\lambda = 1$ ) и при его отсутствии ( $\lambda = 0$ ), соответственно.

Выполнение условия (3.10) возможно при положительной подынтегральной разности

$$p(x_1, \dots, x_n / \lambda = 1) - \Lambda_0 p(x_1, \dots, x_n / \lambda = 0) > 0,$$

т.е.

$$\frac{p(x_1, \dots, x_n / \lambda = 1)}{p(x_1, \dots, x_n / \lambda = 0)} > \Lambda_0. \quad (3.11)$$

Следовательно, оптимальный обнаружитель должен вычислять величину

$$\Lambda = \frac{p(x_1, \dots, x_n / \lambda = 1)}{p(x_1, \dots, x_n / \lambda = 0)} = \frac{L(\lambda = 1)}{L(\lambda = 0)}, \quad (3.12)$$

определяемую отношением функций правдоподобия  $L(\lambda = 1)$  и  $L(\lambda = 0)$  и называемую *отношением правдоподобия*. Если  $\Lambda$  сравнить с некоторым порогом  $\Lambda_0$ , то получим правило принятия решения:

$$\begin{matrix} H_1 \\ \Lambda \underset{H_0}{\geq} \Lambda_0 \end{matrix} \quad (3.13)$$

Таким образом, критерием оптимального обнаружения может служить *критерий отношения правдоподобия*, являющийся следствием общего критерия Байеса. В соответствии с этим критерием оптимальный обнаружитель (рис. 3.2) должен сформировать отношение правдоподобия (блок ОП) и подать его на пороговое устройство ПУ, где осуществляется процедура сравнения  $\Lambda$  с порогом  $\Lambda_0$ , в результате которой выносятся одно из двух возможных решений:  $\bar{A}$  – нет сигнала или  $A$  – есть сигнал. Выбор какого-то частного критерия оптимальности (байесовского, идеального наблюдателя, Неймана-Пирсона) сказывается лишь на значении порога  $\Lambda_0$ , никак не влияя на основную часть обнаружителя – блок ОП, где происходит оптимальная обработка реализации  $x(t)$ . В радиолокации значение порога  $\Lambda_0$  устанавливается исходя из критерия Неймана-Пирсона.

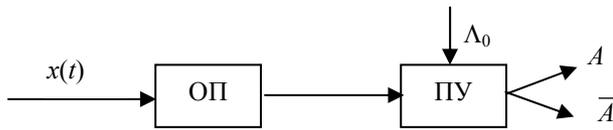


Рис. 3.2. Структурная схема оптимального обнаружителя

### 3.4. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА С ПОЛНОСТЬЮ ИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ФОНЕ БЕЛОГО ШУМА. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ОБНАРУЖИТЕЛЕЙ

Рассмотрим задачу синтеза оптимального обнаружителя сигнала с полностью известными параметрами на фоне белого шума. Наблюдаемый процесс  $\xi(t) = \lambda s(t) + n(t)$ ,  $\lambda = 0, 1$ ,  $0 \leq t \leq T$  является либо аддитивной

смесью сигнала и шума (при  $\lambda = 1$ ), либо одним шумом (при  $\lambda = 0$ ), время наблюдения  $T$  фиксировано. Вначале рассмотрим случай, когда наблюдение ведётся в дискретные моменты времени  $t_1, \dots, t_n$ ; при этом принимаются выборочные значения  $x(t_k) = x_k = \lambda s_k + n_k$ ,  $\lambda = 0, 1$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ . Оптимальный обнаружитель должен формировать отношение правдоподобия

$$\Lambda = \frac{p(x_1, \dots, x_n / \lambda = 1)}{p(x_1, \dots, x_n / \lambda = 0)}$$

и сравнивать его с порогом  $\Lambda_0$ . Чтобы определить структуру устройства, формирующего отношение правдоподобия, необходимо конкретизировать плотности вероятности, входящие в (3.12).

Поскольку рассматриваемый белый шум описывается гауссовской плотностью вероятности, то

$$p(n_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left\{-\frac{n_k^2}{2\sigma_n^2}\right\}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.14)$$

Учитывая, что выборки белого шума статистически независимы, а также то, что  $x_k \equiv n_k$  при  $\lambda = 0$ , имеем

$$p(x_1, \dots, x_n / \lambda = 0) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left\{-\frac{x_k^2}{2\sigma_n^2}\right\}. \quad (3.15)$$

Так как сигнал является детерминированным, то распределение вероятностей выборки  $(x_1, \dots, x_n)$  при  $\lambda = 1$  остаётся гауссовским, однако средние значения отсчётов теперь не равны нулю, при этом

$$p(x_1, \dots, x_n / \lambda = 1) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left\{-\frac{(x_k - s_k)^2}{2\sigma_n^2}\right\}. \quad (3.16)$$

Подставив (3.15) и (3.16) в (3.12), получим

$$\Lambda = \exp\left\{\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k s_k - \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n s_k^2\right\}. \quad (3.17)$$

Для упрощения обработки целесообразно вместо отношения правдоподобия  $\Lambda$  формировать его логарифм:

$$\ln \Lambda = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k s_k - \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n s_k^2. \quad (3.18)$$

Перейдём к непрерывному времени наблюдения. Положим  $t_1 = 0$ ,  $t_n = T$ , кроме того, учтём, что плотность вероятности независимых гауссовских величин при непрерывном времени наблюдения переходит в функционал плотности вероятности белого шума. Если спектральная плотности последнего равна  $N_0/2$ , а  $\sigma_n^2$  – дисперсия гауссовских величин  $n_k$ , то при переходе к непрерывному времени (от  $n_k$  к  $n(t)$ ) можно воспользоваться зависимостью

$$\sigma_n^2 = \frac{(N_0/2)}{\Delta t}, \quad \Delta t = t_k - t_{k-1} \quad (\text{при } \Delta t \rightarrow 0, \sigma_n^2 \rightarrow \infty). \quad (3.19)$$

Подставляя (3.19) в (3.18) и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$\ln \Lambda = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t) dt .$$

При этом правило принятия решения можно записать в следующем виде:

$$\begin{matrix} H_1 \\ y > h, \\ H_0 \end{matrix} \quad (3.20)$$

где

$$y = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t) dt ; \quad (3.21)$$

$$h = \ln \Lambda_0 + \frac{1}{2} q^2 . \quad (3.22)$$

Выражение (3.21) определяет достаточную статистику  $y$ , являющуюся взаимным корреляционным интегралом между наблюдаемым процессом  $x(t)$  и копией сигнала  $s(t)$ .

Выражение (3.22) определяет порог  $h$ , зависящий от  $\Lambda_0$  и отношения сигнал/шум, квадрат которого равен

$$q^2 = \frac{2E_s}{N_0} = \frac{2}{N_0} \int_0^T s^2(t) dt . \quad (3.23)$$

Формулы (3.20), (3.21), (3.22) позволяют построить структурную схему оптимального обнаружителя в виде корреляционного приёмника с пороговым устройством (рис. 3.3).

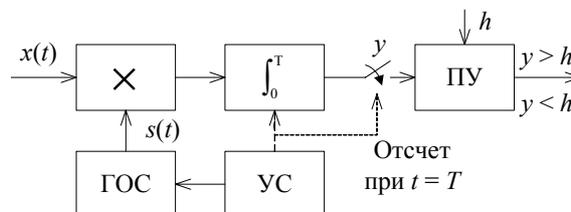


Рис. 3.3. Структурная схема оптимального обнаружителя в виде корреляционного приёмника

На множитель подаётся принимаемый процесс  $x(t)$  и опорный сигнал  $s(t)$ , являющийся точной копией обнаруживаемого (ожидаемого) сигнала. Интегрирование произведения  $x(t)s(t)$  в течение  $T$  даёт корреляционный интеграл  $y$ . В пороговом устройстве (ПУ) производится сравнение значения

корреляционного интеграла в момент ожидаемого окончания действия сигнала  $T$  с порогом  $h$  и принимается решение о наличии или отсутствии сигнала. Начало интегрирования и его окончание совпадают по времени с началом и окончанием ожидаемого сигнала  $s(t)$ , что обеспечивается устройством синхронизации (УС). Это же устройство синхронизирует работу генератора опорного сигнала (ГОС) для коррелятора.

Техническая реализация оптимального обнаружителя в виде корреляционного приёмника не является единственно возможной. Корреляционный интеграл может быть сформирован также при помощи согласованного фильтра. Его импульсная характеристика согласована с обнаруживаемым сигналом, являясь в соответствии с выражением

$$h_{\text{сф}}(t) = ks(T - t) \quad (3.24)$$

"зеркальным отражением" формы сигнала (рис. 3.4).

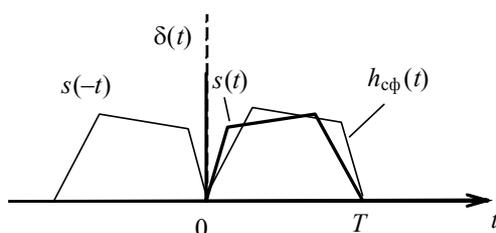


Рис. 3.4. График импульсной характеристики согласованного фильтра

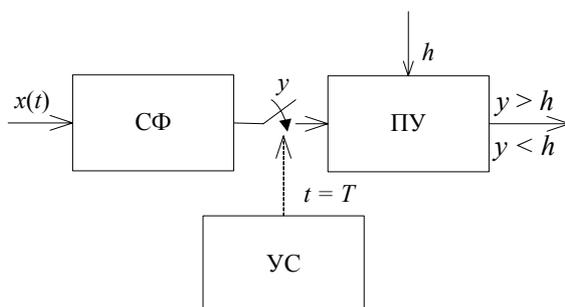


Рис. 3.5. Структурная схема оптимального обнаружителя на основе согласованного фильтра

Поскольку согласованный фильтр — составная часть оптимального обнаружителя (рис. 3.5) и максимизирует отношение сигнал/шум на выходе, его называют также *оптимальным*. Максимальное отношение сигнал/шум по мощности на выходе СФ достигается в момент времени  $T$  и составляет величину

$$q_{\text{сф}} = 2E_s / N_0. \quad (3.25)$$

Ни один из линейных фильтров не может дать отношение сигнал/шум больше, чем согласованный фильтр (либо коррелятор). Как следует из рис. 3.5, для согласованного фильтра отпадает необходимость в обеспечении синхронизации между опорным и принимаемым сигналами с точностью до фазы их высокочастотного заполнения. Это является достоинством СФ по сравнению с коррелятором.

## 4. ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ КВАЗИДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

### 4.1. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ОБНАРУЖЕНИЯ

Определим вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги. Для этого потребуется определить распределение вероятностей достаточной статистики  $y$ , поступающей на пороговое устройство, а именно, распределение вероятностей корреляционного интеграла  $y$  при отсутствии ( $\lambda = 0$ ) и наличии ( $\lambda = 1$ ) сигнала  $s(t)$  на входе обнаружителя.

Рассмотрим случай  $\lambda = 0$ , т.е. когда на входе обнаружителя присутствует только шум  $n(t)$ . Тогда  $x(t) = n(t)$  и величина  $y$ , являясь линейным преобразованием белого гауссовского шума, также имеет гауссовское распределение и, следовательно, полностью определяется математическим ожиданием и дисперсией. Последние равны

$$M[y | \lambda = 0] = 0, \quad D[y | \lambda = 0] = 2E_S / N_0 = q^2.$$

Таким образом, плотность вероятностей  $p_n(y)$  величины  $y$  при  $\lambda = 0$  имеет вид

$$p_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}q} \exp\left(-\frac{y^2}{2q^2}\right).$$

Перейдём к случаю  $\lambda = 1$ . Поскольку сигнал является детерминированным, то распределение величины  $y$  по-прежнему остаётся гауссовским. Дисперсия величины  $y$ , очевидно также не меняется,  $D[y | \lambda = 1] = q^2$ . Изменяется лишь математическое ожидание:

$$M[y | \lambda = 1] = M\left[\frac{2}{N_0} \int_0^T [s(t) + n(t)]s(t)dt\right] = \frac{2}{N_0} \int_0^T s^2(t)dt = q^2.$$

Следовательно,

$$p(y | \lambda = 1) = p_{sn}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}q} \exp\left[-\frac{(y - q^2)^2}{2q^2}\right]. \quad (4.1)$$

Таким образом, вероятности ложной тревоги и правильного обнаружения:

$$P_{лт} = \int_h^\infty p_n(y)dy = \int_h^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}q} \exp\left(-\frac{y^2}{2q^2}\right)dy;$$

$$P_{по} = \int_h^\infty p_{sn}(y)dy = \int_h^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}q} \exp\left(-\frac{(y - q^2)^2}{2q^2}\right)dy. \quad (4.2)$$

Используя интеграл вероятностей

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz, \quad (4.3)$$

формулы (4.1) и (4.2) можно переписать в виде

$$P_{лт} = 1 - \Phi\left(\frac{h}{q}\right); \quad (4.4)$$

$$P_{\text{по}} = 1 - \Phi\left(\frac{h - q^2}{q}\right). \quad (4.5)$$

С помощью (4.4) и (4.5) рассчитываются характеристики оптимального обнаружения детерминированного сигнала в белом шуме. Для обнаружителя, оптимального по критерию Неймана-Пирсона в качестве характеристики оптимального обнаружения используется зависимость правильного обнаружения от отношения сигнал/шум  $P_{\text{по}} = f(q)$  при постоянной вероятности ложной тревоги  $P_{\text{лт}} = \text{const}$ . Согласно (4.4) и (4.5) имеем

$$P_{\text{по}} = 1 - \Phi\left(\frac{h - q^2}{q}\right) = 1 - \Phi\left[\Phi^{-1}(1 - P_{\text{лт}}) - q\right], \quad (4.6)$$

где  $\Phi^{-1}(u)$  – функция, обратная к интегралу вероятностей (4.3).

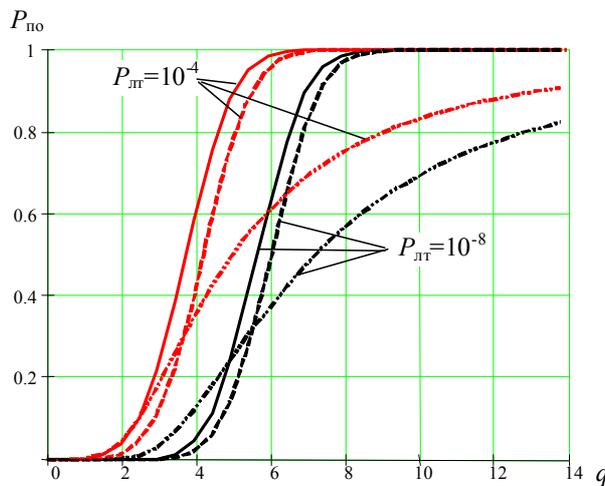


Рис. 4.1. Графики зависимостей  $P_{\text{по}} = f(q)$

Задаваясь значением  $P_{\text{лт}}$ , можно, пользуясь таблицей интеграла вероятностей, определить  $\Phi^{-1}(1 - P_{\text{лт}})$ , а затем, задаваясь различными значениями  $q$ , рассчитать  $P_{\text{по}}$  в соответствии с выражением (4.6). В результате этого получим график  $P_{\text{по}} = f(q)$  (рис. 4.1), на котором сплошными линиями показаны характеристики оптимального обнаружения детерминированного сигнала в белом шуме.

Характеристики обнаружения позволяют определить минимальную энергию принимаемого сигнала  $E_{\text{пр. min}}$  (или его минимальную мощность  $P_{\text{пр. min}}$ ), необходимую для его обнаружения с заданными качественными показателями  $P_{\text{лт}}$  и  $P_{\text{по}}$ .

## 4.2. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА СО СЛУЧАЙНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ФАЗОЙ НА ФОНЕ БЕЛОГО ШУМА

Начальная фаза радиосигнала, как правило, неизвестна. В этом случае можно использовать модель сигнала

$$s(t, \varphi) = V(t) \cos [\omega_0 t + \psi(t) - \varphi], \quad (4.7)$$

где законы амплитудной  $V(t)$  и фазовой  $\psi(t)$  модуляции и частота  $\omega_0$  известны, а начальная фаза  $\varphi$  неизвестна. Выражение (4.7) удобно представить в виде

$$s(t, \varphi) = s_1(t) \cos \varphi + s_2(t) \sin \varphi, \quad (4.8)$$

где  $s_1(t) = V(t) \cos(\omega_0 t + \psi(t))$ ,  $s_2(t) = V(t) \sin(\omega_0 t + \psi(t))$  – квадратурные составляющие сигнала.

Полагаем, что начальная фаза  $\varphi$  является случайной величиной, при этом при отсутствии информации об априорном распределении  $\varphi$  естественно считать это распределение равномерным:

$$p(\varphi) = 1/2\pi; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (4.9)$$

Такая модель радиосигнала используется в радиолокации при описании отраженных сигналов от неподвижной цели.

Отношение правдоподобия в рассматриваемой задаче обнаружения сигнала со случайной начальной фазой получается путём усреднения условного отношения правдоподобия  $\Lambda(x/\varphi)$  по всем возможным значениям фазы

$$\Lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda(x/\varphi) p(\varphi) d\varphi. \quad (4.10)$$

Что касается условного отношения правдоподобия  $\Lambda(x/\varphi)$ , то оно, очевидно, совпадает с отношением правдоподобия для детерминированного сигнала  $s(t, \varphi)$ , где  $\varphi$  – фиксированная величина. Поэтому

$$\Lambda(x/\varphi) = \exp \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) s(t, \varphi) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t, \varphi) dt \right\}.$$

Подставив в это выражение (4.8), рассмотрим получающиеся интегралы. Корреляционный интеграл

$$y(\varphi) = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) s(t, \varphi) dt = y_1 \cos \varphi + y_2 \sin \varphi = y \cos(\varphi - \theta),$$

где

$$y_1 = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) s_1(t) dt, \quad y_2 = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) s_2(t) dt$$

– его квадратурные составляющие, при этом

$$y = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \quad \cos \theta = y_1 / y, \quad \sin \theta = y_2 / y.$$

Далее, при  $T \gg 2\pi/\omega_0$  энергия сигнала от значения фазы  $\varphi$  практически не зависит и поэтому

$$\int_0^T s^2(t, \varphi) dt = E_s.$$

Таким образом,

$$\Lambda(x/\varphi) = \exp \{ y \cos(\varphi - \theta) - E_s / N_0 \}.$$

Подставляя это выражение и (4.9) в (4.10), после интегрирования получаем отношение правдоподобия

$$\Lambda = \exp \left( -\frac{1}{2} q^2 \right) I_0(y), \quad (4.11)$$

где  $I_0(y)$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Учитывая, что  $\ln I_0(y)$  является монотонной функцией, приходим к оптимальному алгоритму обнаружения вида

$$y \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} h, \quad (4.12)$$

где

$$y = \frac{2}{N_0} \sqrt{\left( \int_0^T x(t) s_1(t) dt \right)^2 + \left( \int_0^T x(t) s_2(t) dt \right)^2}. \quad (4.13)$$

Структурная схема обнаружителя на рис. 4.2 построена в соответствии с формулами (4.12) и (4.13). Такую схему называют квадратурным приёмником. Квадратурные каналы организуют путём включения фазовращателя в цепь опорного сигнала одного из множителей. Квадраторы (Кв), сумматор ( $\Sigma$ ), вычислитель квадратного корня ( $\sqrt{\quad}$ ) обеспечивают формирование на входе ПУ в момент времени  $t = T$  значения  $y = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ . Наличие двух каналов исключает возможность потери полезного сигнала вследствие незнания его начальной фазы.

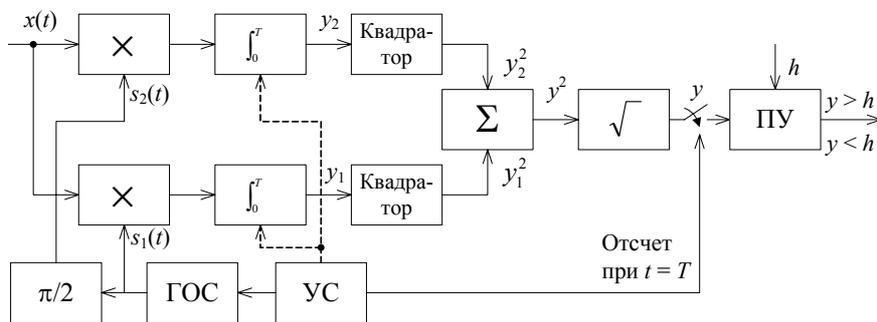


Рис. 4.2. Структурная схема квадратурного приёмника

Схема обнаружителя, представленная на рис. 4.2, требует знания временного положения ожидаемого сигнала. Если время запаздывания сигнала неизвестно, схема оптимального обнаружителя усложняется. При разбиении интервала неопределённости времени запаздывания на элементарные участки, длительность каждого из которых определяется требуемой разрешающей способностью по дальности, можно построить многоканальный корреляционный обнаружитель. Каждый канал его настраивается на сигнал с соответствующим запаздыванием. Решение об обнаружении сигнала принимается одновременно с оценкой времени запаздывания.

В радиолокации особо распространённым является приём сигналов с произвольным временем запаздывания. Поэтому в целях упрощения конструкции обнаружителя удобнее использовать фильтровой вариант его построения (рис. 4.3), позволяющего обеспечить оптимальное обнаружение сигналов с произвольным временем запаздывания при наличии всего лишь одного приёмного канала.

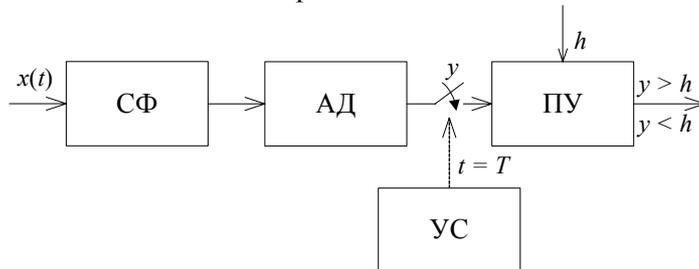


Рис. 4.3. Структурная схема оптимального обнаружителя квазидетерминированных сигналов на основе согласованного фильтра

Возможность использования согласованных фильтров в обнаружителях сигналов со случайной фазой основывается на следующих рассуждениях. Величина достаточной статистики  $y$ , которую должен формировать обнаружитель, есть огибающая колебания  $y \cos(\varphi - \theta)$ , иначе говоря, огибающая корреляционного интеграла  $y(\varphi)$ . Это колебание, можно сформировать пропустив наблюдаемый

процесс  $x(t)$  через фильтр, согласованный с сигналом  $s(t, \varphi)$ , т.е. имеющий импульсную характеристику вида

$$h(t) = 2 / N_0 s(T - t, \varphi),$$

где  $\varphi$  – фиксированная величина.

Отметим, что поскольку результат обработки  $y$  не зависит от значения начальной фазы  $\varphi$ , то её при реализации фильтра можно брать любой, в частности, можно положить  $\varphi = 0$ . Огибающая  $y(t)$  на выходе согласованного фильтра, на вход которого поступает процесс  $s(t) + n(t)$ , выделяется амплитудным детектором (АД), при этом результат детектирования в момент времени  $t = T$  должен подаваться на пороговое устройство.

Перейдем к расчёту показателей качества обнаружения. Так как огибающая  $y(t)$  шума и смеси сигнала с шумом на выходе СФ распределена по закону Релея и обобщённому закону Релея (закону Райса) соответственно, то вероятности ложной тревоги и правильного обнаружения для обнаружителя, работающего по алгоритму (4.12), равны:

$$P_{лт} = \int_h^{\infty} \frac{y}{q^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2q^2}\right) dy = \exp\left(-\frac{h^2}{2q^2}\right); \quad (4.14)$$

$$P_{но} = \int_h^{\infty} \frac{y}{q^2} \exp\left(-\frac{y^2 + q^2}{2q^2}\right) I_0(y/q) dy, \quad (4.15)$$

где  $h = q\sqrt{2\ln(1/P_{лт})}$ .

Характеристики обнаружения сигнала со случайной начальной фазой (штрихованные линии на рис. 4.1) построены в соответствии с (4.14) и (4.15). По сравнению с характеристиками обнаружения детерминированного сигнала они сдвинуты вправо, т.е. для обнаружения сигнала со случайной начальной фазой требуется несколько большее пороговое отношение сигнал/шум.

### 4.3. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА СО СЛУЧАЙНЫМИ НАЧАЛЬНОЙ ФАЗОЙ И АМПЛИТУДОЙ

На практике обычно неизвестна не только начальная фаза радиосигнала, но и его амплитуда. В этом случае используется модель сигнала со случайными начальной фазой и амплитудой

$$s(t, a, \varphi) = aU(t) \cos(\omega_0 t + \psi(t) - \varphi), \quad (4.16)$$

где безразмерный параметр  $a$ , определяющий амплитуду сигнала, полагается случайной величиной, распределённой по закону Релея (при условии, что радиолокационный объект можно представить в виде большого числа статистически независимых случайных отражателей)

$$p(a) = \frac{a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right), \quad (4.17)$$

а фаза  $\varphi$  – по равномерному закону.

Учитывая, что случайные величины  $a$  и  $\varphi$  статистически независимы, отношение правдоподобия для рассматриваемого случая по аналогии с (4.10) можно представить в виде

$$\Lambda = \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Lambda(x/a, \varphi) p(a) p(\varphi) d\varphi da.$$

Подставляя сюда (4.9) и выражение для условного отношения правдоподобия  $\Lambda(x/a, \varphi)$  (которое получается из (4.17) путём замены  $s(t)$  на  $s(t, a, \varphi)$ ) и интегрируя затем по  $\varphi$ , находим

$$\Lambda = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{a^2 q^2}{2}\right) I_0(ay) p(a) da,$$

где  $q^2 = 2E_s / N_0$ ,  $E_s$  – энергия сигнала, соответствующая значению  $a = 1$ .

Далее, используя (4.17) и интеграл

$$\int_0^{\infty} x \exp(-dx^2) I_0(\beta x) dx = \frac{1}{2\alpha} \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right),$$

получаем

$$\Lambda = \frac{N_0}{N_0 + E} \exp\left[\frac{\sigma^2 y^2 N_0}{2(N_0 + \bar{E})}\right],$$

либо

$$\Lambda = \frac{1}{1 + q^2 \sigma^2} \exp\left[\frac{\sigma^2 y^2}{2(1 + q^2 \sigma^2)}\right], \quad (4.18)$$

где

$$\bar{E} = M[a^2 E_s] = E_s M[a^2] = 2\sigma^2 E_s \quad (4.19)$$

– усредненная энергия сигнала.

Поскольку  $y \geq 0$ , отношение правдоподобия  $\Lambda$  является монотонной функцией  $y$ . Поэтому, как и в предыдущем случае, алгоритм оптимального обнаружения определяется формулами (4.12) и (4.13). Таким образом, структурные схемы оптимального обнаружителя сигнала со случайными амплитудой и начальной фазой совпадают со схемами оптимального обнаружителя сигнала со случайной фазой (см. рис. 4.2 и 4.3). Заметим, что операция извлечения квадратного корня в схеме на рис. 4.2 не обязательна, так как алгоритм (4.12) эквивалентен сравнению  $y^2$  с  $h^2$ . Применительно к схеме на рис. 4.3 это означает, что безразлично, какова характеристика амплитудного детектора – линейная или квадратичная.

Так как алгоритм обнаружения по сравнению с предыдущим случаем не изменился, то и вероятность ложной тревоги определяется прежней формулой (4.14). Для расчёта вероятности правильного обнаружения потребуется найти плотность вероятности достаточной статистики  $y$  при  $\lambda = 1$ :

$$p(y/\lambda = 1) = \int_0^{\infty} p(y/a, \lambda = 1) p(a) da,$$

где  $p(a)$  определяется формулой (4.17), а

$$p(y/\lambda = 1) = \frac{y}{q^2} \exp\left(-\frac{y^2 + q^4 a^2}{2q^2}\right) I_0(ay)$$

– плотность вероятности огибающей смеси сигнала и шума при фиксированном значении  $a$ . Вычисляя этот интеграл, получаем

$$p(y/\lambda = 1) = \frac{y}{q^2(1 + \sigma^2 q^2)} \exp\left(-\frac{y^2}{2q^2(1 + \sigma^2 q^2)}\right)$$

и затем находим вероятность правильного обнаружения

$$P_{\text{по}} = \int_0^{\infty} p(y/\lambda = 1) dy = \exp\left(-\frac{h^2}{2q^2(1 + \sigma^2 q^2)}\right). \quad (4.20)$$

Эта формула вместе с (4.14) и определяет характеристики оптимального обнаружения сигнала со случайными амплитудой и начальной фазой. Сравнить их с характеристиками обнаружения сигнала при известной амплитуде нужно при условии равенства энергий различных сигналов. Поэтому,

согласно (4.19), следует положить  $\sigma^2 = 0,5$ . Учитывая это и исключая из (4.14) и (4.20) порог  $h$ , получаем

$$P_{\text{по}} = P_{\text{лт}}^{1/(1+0,5q)}. \quad (4.21)$$

Характеристики обнаружения, рассчитанные по формуле (4.21), показаны на рис. 4.1 (штрихпунктирные линии). Видно, что характеристики обнаружения в этом случае особенно сильно смещаются вправо в области больших значений вероятности правильного обнаружения (при  $P_{\text{по}} \geq 0,9$ ). Это связано с возможными замираниями при случайной амплитуде сигнала. Чтобы обеспечить достаточно большие вероятности правильного обнаружения при наличии таких замираний, необходимо значительное увеличение средней энергии сигнала. Наоборот, при малых вероятностях правильного обнаружения ( $P_{\text{по}} < 0,3$ ) флуктуации амплитуды облегчают обнаружение и характеристики сдвигаются влево.

## 5. ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗЛИЧЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

### 5.1. РАЗЛИЧЕНИЕ ДВУХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРАВИЛО РЕШЕНИЯ

Задача различения сигналов находит широкое распространение в дискретной радиосвязи, когда передача символа "1" связана с излучением сигнала  $s_1(t)$ , а передача символа "0" связана с излучением другого сигнала  $s_2(t)$ , отличающегося от  $s_1(t)$  хотя бы одним каким-нибудь своим параметром. На приёмной стороне один из указанных символов присутствует вместе с шумом. Поэтому решение о том, какой из сигналов принимается, может осуществляться с ошибкой. Отсюда возникает задача оптимального, в смысле выбранного критерия, различения сигналов. Устройство, решающее задачу различения, будем называть *различителем*.

Математическая формулировка задачи различения состоит в следующем. Пусть на входе различителя действует случайный процесс  $\xi(t)$ , который удобно представить в виде суммы:

$$\xi(t) = \lambda s_1(t) + (1 - \lambda) s_2(t) + n(t), \quad (5.1)$$

где  $\lambda$  – случайный параметр, равный "1", если действует сигнал  $s_1(t)$ , и равный "0", если действует сигнал  $s_2(t)$ ;  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  – детерминированные, т.е. полностью известные сигналы, неизвестно только, какой из этих сигналов существует на входе в течение интервала наблюдения  $[0, T]$ ;  $n(t)$  – шум с известным распределением.

Выдвигается гипотеза  $H_1$ , состоящая в утверждении, что на входе действует  $s_1(t)$ , и гипотеза  $H_2$ , утверждающая, что на входе действует  $s_2(t)$ . Вероятности гипотез  $P(H_1)$  и  $P(H_2)$  известны. На интервале времени  $[0, T]$  наблюдается реализация  $x(t)$  процесса (5.1). Требуется ответить на вопрос, какому сигналу, который действует вместе с шумом, наилучшим образом соответствует наблюдаемая реализация.

Так как вероятности гипотез известны, то ответ на этот вопрос можно дать на основании критерия идеального наблюдателя, как и в задаче обнаружения. Можно записать следующее правило принятия решения:

$$\Lambda \underset{H_2}{\overset{H_1}{>}} \Lambda_0, \quad (5.2)$$

где

$$\Lambda = \frac{L(\lambda=1)}{L(\lambda=0)} = \frac{p_{sn1}[x(t)]}{p_{sn2}[x(t)]}, \quad (5.3)$$

$$\Lambda_0 = \frac{P(H_2)}{P(H_1)}, \quad (5.4)$$

где  $P_{sn1}[x(t)]$ ,  $P_{sn2}[x(t)]$  – функционалы плотности вероятности при непрерывном наблюдении.

Для того чтобы принять решение о наличии того или иного сигнала на входе различителя по критерию идеального наблюдателя, необходимо сформировать отношение правдоподобия (5.3) и сравнить его с порогом  $\Lambda_0$ , определяемым, согласно (5.4), априорными вероятностями  $P(H_1)$ ,  $P(H_2)$ . В ряде случаев, например при гауссовском шуме, удобнее формировать логарифм отношения правдоподобия

$$\ln \Lambda \underset{H_2}{\overset{H_1}{>}} \ln \Lambda_0, \quad (5.5)$$

Таким образом, решение задачи различения совпадает с решением задачи обнаружения с той только разницей, что отношение правдоподобия определяется дробью (5.3), в которой и в числителе, и в знаменателе функции правдоподобия определяются через функционалы плотностей вероятностей при условии наличия сигнала и шума, но только при условии наличия разных сигналов.

## 5.2. РАЗЛИЧЕНИЕ ДВУХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ БЕЛОГО ШУМА. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РАЗЛИЧИТЕЛЕЙ

Правило принятия решения (5.5) можно конкретизировать, если положить, что  $n(t)$  в (5.1) является гауссовским белым шумом. Для белого шума функционалы плотности вероятности будут равны:

$$P_{sn1}[x(t)] = K \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s_1(t)]^2 dt \right\}; \quad (5.6)$$

$$P_{sn2}[x(t)] = K \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s_2(t)]^2 dt \right\}, \quad (5.7)$$

где  $K$  – коэффициент нормировки.

Если подставить (5.6) и (5.7) в (5.5), то получим

$$\Lambda = \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s_1(t)]^2 dt + \frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s_2(t)]^2 dt \right\},$$

откуда

$$\ln \Lambda = \frac{2}{N_0} \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)] x(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T [s_1^2(t) - s_2^2(t)] dt.$$

Учитывая, что

$$E_{S1} = \int_0^T s_1^2(t) dt, \quad \frac{E_{S1}}{N_0} = \frac{1}{2} q_1^2, \quad E_{S2} = \int_0^T s_2^2(t) dt, \quad \frac{E_{S2}}{N_0} = \frac{1}{2} q_2^2,$$

правило решения (5.5) можно записать в следующем виде:

$$y \underset{H_2}{\overset{H_1}{>}} h, \quad (5.8)$$

где

$$y = \frac{2}{N_0} \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)] x(t) dt \quad (5.9)$$

– достаточная статистика при различении детерминированных сигналов;

$$h = \ln \frac{P(H_2)}{P(H_1)} + \frac{1}{2} (q_1^2 - q_2^2) \quad (5.10)$$

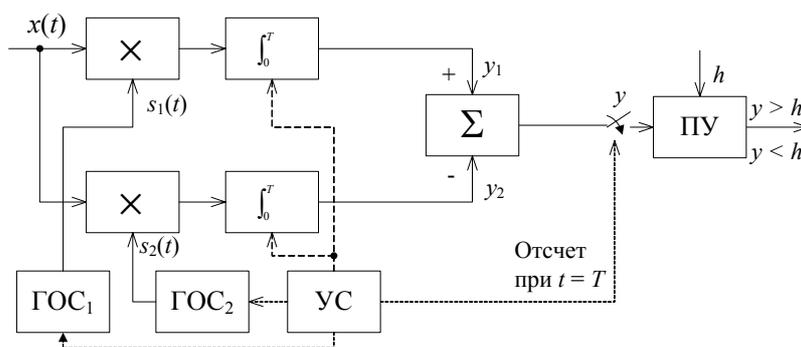
– порог для критерия идеального наблюдателя, зависящий как от априорных вероятностей  $P(H_1)$  и  $P(H_2)$ , так и от отношений сигнал/шум по каждому сигналу.

Таким образом, в качестве достаточной статистики  $y$  в задаче различения используется разность между двумя корреляционными интегралами.

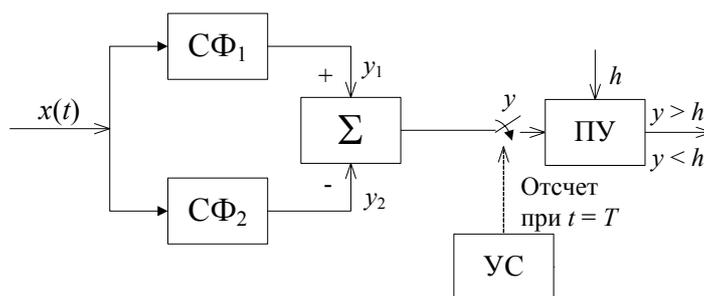
Если сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  имеют одинаковые энергии, то порог  $h = \ln(P(H_2)/P(H_1))$ . Если к тому же вероятности гипотез  $P(H_1) = P(H_2) = 0,5$ , то  $h = 0$ .

Возможны различные варианты реализации оптимального алгоритма различения двух детерминированных сигналов: с использованием корреляционных приёмников (рис. 5.1) и на основе согласованных фильтров (рис. 5.2). При построении схем, приведённых на рисунках, достаточная статистика  $y$  (5.9) представлялась в виде разности интегралов:

$$y = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) s_1(t) dt - \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) s_2(t) dt = y_1 - y_2 .$$



**Рис. 5.1. Структурная схема оптимального различителя на основе корреляционных приёмников**



**Рис. 5.2. Структурная схема оптимального различителя на основе согласованных фильтров**

Разность величин  $y_1$  и  $y_2$  на выходах интеграторов сравнивается с порогом  $h$ . Импульсные характеристики согласованных фильтров (СФ<sub>1</sub> и СФ<sub>2</sub>) на рис. 5.2 определяются соотношением

$$h_i(t) = \frac{2}{N_0} s_i(T-t), \quad i=1, 2.$$

Возможна реализация различителя на основе одноканальной схемы. В этом случае генератор опорного сигнала (ГОС) формирует разностный сигнал  $(s_1(t) - s_2(t))$ , а СФ имеет импульсную характеристику

$$h(t) = \frac{2}{N_0} [s_1(T-t) - s_2(T-t)].$$

Схемы различителей одноканального типа приведены на рис. 5.3.

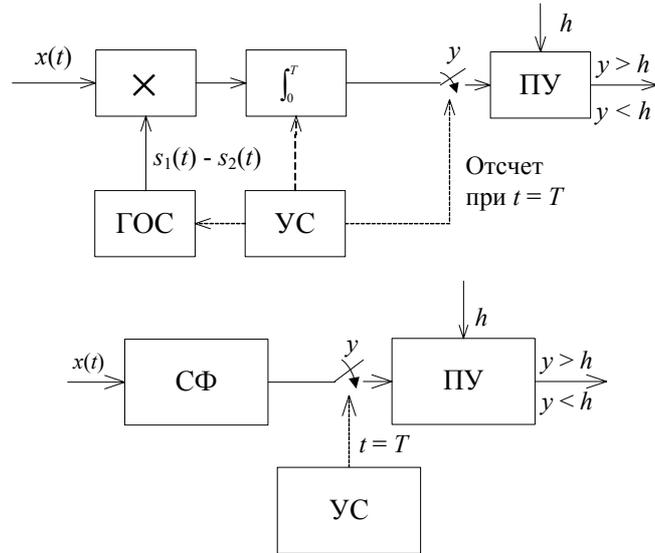


Рис. 5.3. Структурные схемы оптимальных различителей на основе одноканальной схемы

### 5.3. УСЛОВНЫЕ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ДОСТАТОЧНОЙ СТАТИСТИКИ ПРИ РАЗЛИЧЕНИИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Достаточная статистика  $y$ , определяемая при различении детерминированных сигналов, согласно выражению (5.9), зависит от реализации  $x(t)$ , которая из-за действия шума меняется. В общем случае (5.9) следует рассматривать как случайную величину, которая получится, если на место реализации  $x(t)$  подставить случайный процесс  $\xi(t)$ , определяемый выражением (5.1)

$$\eta = \frac{2}{N_0} \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)] \xi(t) dt. \quad (5.11)$$

При гауссовском белом шуме  $n(t)$  процесс  $\xi(t)$  является гауссовским случайным процессом, и случайная величина  $\eta$ , определяемая линейным оператором преобразования, каковым является интегрирование, также имеет гауссовское распределение. И так как величина  $\lambda$  неизвестна, случайная статистика  $\eta$  определяется двумя условными плотностями вероятности:  $p_{sn1}(y)$  при  $\lambda = 1$  и  $p_{sn2}(y)$  при  $\lambda = 0$ .

Найдём числовые характеристики этих распределений при условии, что энергии сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  равны, и, следовательно,  $q_1^2 = q_2^2 = q^2$ .

1. Пусть  $\lambda = 1$ . Тогда  $\xi(t) = s_1(t) + n(t)$ . При этом

$$m_1 = \langle \eta | \lambda = 1 \rangle = q^2 (1 - r_S); \quad (5.12)$$

$$D_1 = \langle \eta^2 | \lambda = 1 \rangle - m_1^2 = 2q^2 (1 - r_S), \quad (5.13)$$

где коэффициент взаимной корреляции между сигналами  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$

$$r_S = \frac{1}{E_S} \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt, \quad (5.14)$$

2. Пусть  $\lambda = 0$ . Тогда  $\xi(t) = s_2(t) + n(t)$ . При этом

$$m_2 = \langle \eta | \lambda = 0 \rangle = -q^2 (1 - r_S); \quad (5.15)$$

$$D_2 = \langle \eta^2 | \lambda = 0 \rangle - m_2^2 = 2q^2 (1 - r_S). \quad (5.16)$$

Таким образом, числовые характеристики зависят не только от отношения сигнал/шум, но и от коэффициента взаимной корреляции между сигналами  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ .

Графики условных плотностей вероятности достаточной статистики  $p_{sn1}(y)$  и  $p_{sn2}(y)$  представлены на рис. 5.4.

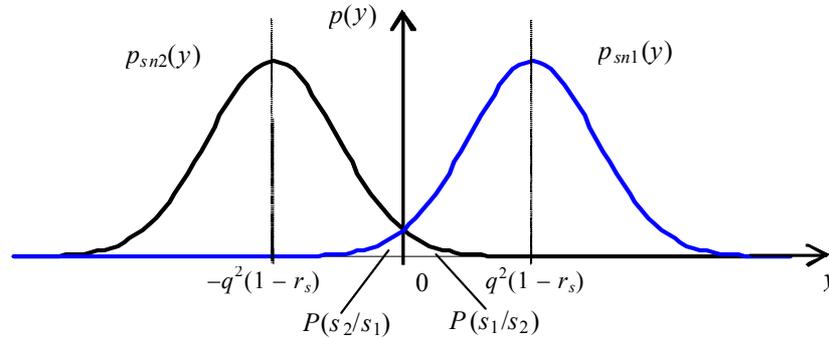


Рис. 5.4. Графики условных плотностей вероятности достаточной статистики

Располагая  $p_{sn1}(y)$  и  $p_{sn2}(y)$ , можно найти вероятность полной ошибки  $P_{\text{ош}}$ . Методика здесь используется та же, что и при определении  $P_{\text{ош}}$  при обнаружении сигнала. Отличие состоит в том, что использование таких терминов как пропуск сигнала и ложная тревога, теряет смысл, так как сигнал  $s_1(t)$  всегда присутствует на входе различителя.

Согласно (5.7) выражение для  $P_{\text{ош}}$  запишем в следующей форме:

$$P_{\text{ош}} = P(H_1)P(s_2/s_1) + P(H_2)P(s_1/s_2), \quad (5.17)$$

где  $P(H_1)$ ,  $P(H_2)$  – априорные вероятности наличия соответственно сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  на входе различителя;  $P(s_2/s_1)$  – вероятность принятия решения о том, что на входе сигнал  $s_2(t)$ , когда в действительности существует  $s_1(t)$ ;  $P(s_1/s_2)$  – вероятность принятия решения о том, что на входе сигнал  $s_1(t)$ , когда в действительности существует  $s_2(t)$ .

Если  $P(H_1) = P(H_2) = 0,5$ , то выражение (5.17) примет вид

$$P_{\text{ош}} = 0,5 [P(s_2/s_1) + P(s_1/s_2)]. \quad (5.18)$$

Если к тому же равны и энергии сигналов  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$ , то порог  $h = 0$  и, в силу симметричности кривых  $p_{sn1}(y)$ ,  $p_{sn2}(y)$  относительно начала координат (рис. 5.4), условные вероятности  $P(s_2/s_1)$ ,  $P(s_1/s_2)$ , определяемые формулами

$$P(s_2/s_1) = \int_{-\infty}^0 p_{sn1}(y) dy = 1 - \Phi \left( q \sqrt{\frac{1-r_s}{2}} \right); \quad (5.19)$$

$$P(s_1/s_2) = \int_0^{\infty} p_{sn2}(y) dy = 1 - \Phi \left( q \sqrt{\frac{1-r_s}{2}} \right), \quad (5.20)$$

равны между собой

$$P(s_2/s_1) = P(s_1/s_2). \quad (5.21)$$

Тогда

$$P_{\text{ош}} = 1 - \Phi \left( q \sqrt{\frac{1-r_s}{2}} \right). \quad (5.22)$$

Вероятность полной ошибки  $P_{\text{ош}}$ , таким образом, определяется условной вероятностью принятия решения при различении одного из сигналов, если их энергии равны.

#### 5.4. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ОПТИМАЛЬНЫХ РАЗЛИЧИТЕЛЕЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ МАНИПУЛЯЦИИ

В теории дискретной радиосвязи для характеристики потенциальной помехоустойчивости различителя, оптимального по критерию идеального наблюдателя, используется зависимость вероятности полной ошибки  $P_{\text{ош}}$  от отношения сигнал/шум  $q$ :

$$P_{\text{ош}} = f(q). \quad (5.23)$$

При различении детерминированные сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  могут отличаться амплитудой, частотой или начальной фазой, представляя собой амплитудно-манипулированные (АМн), частотно-манипулированные (ЧМн) или фазо-манипулированные (ФМн) колебания. Представляет интерес найти зависимости (5.23) различителей АМн, ЧМн и ФМн сигналов и сравнить эти зависимости между собой.

В различителе АМн сигналов будем полагать, что  $s_2(t) = 0$ . В этом случае символ "1" связан с передачей сигнала  $s_1(t)$ , а символ "0" – с паузой (рис. 5.5, а). Работа такого различителя фактически сводится к оптимальному обнаружению сигнала  $s_1(t)$  по критерию идеального наблюдателя. Из (5.7) следует, что

$$P_{\text{ош}} = P(H_1)P_{\text{проп}} + P(H_0)P_{\text{лт}}, \quad (5.24)$$

в котором для вычисления (5.23) можно считать, что присутствие и отсутствие сигнала априорно равновероятно. Поэтому  $P(H_1) = P(H_0) = 0,5$ . В этом случае величина порога  $h$ , необходимого для работы обнаружителя, будет определяться только отношением сигнал/шум

$$h = \ln \frac{P(H_0)}{P(H_1)} + \frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2}q^2, \quad (5.25)$$

В свою очередь, вероятности  $P_{\text{проп}}$  и  $P_{\text{лт}}$  при использовании порога (5.25) будут равны между собой (рис. 5.6, а). При этом

$$P_{\text{лт}} = 1 - \Phi\left(\frac{h}{q}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{q}{2}\right), \quad (5.26)$$

$$P_{\text{проп}} = \Phi\left(\frac{h - q^2}{q}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{q}{2}\right), \quad (5.27)$$

так как  $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ .

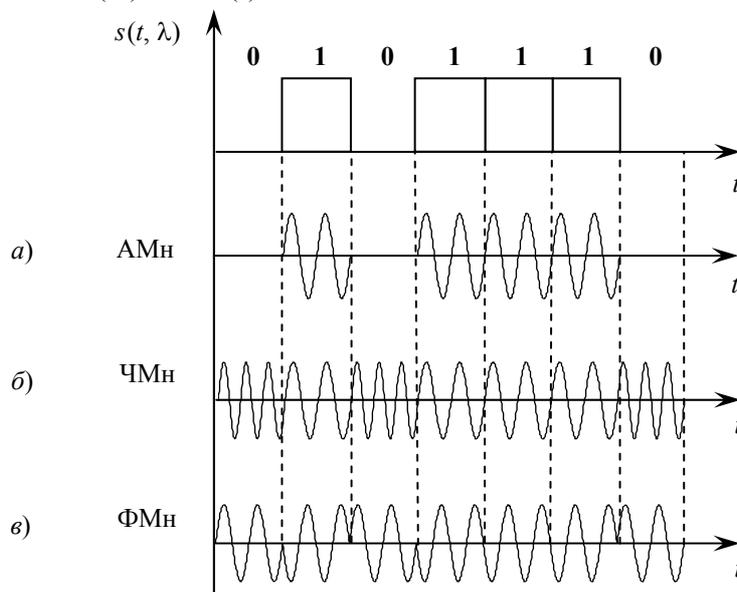


Рис. 5.5. Виды манипуляции

Подставив (5.26) и (5.27) в формулу (5.24), получаем зависимость вероятности полной ошибки от отношения сигнал/шум при различении АМн сигналов

$$P_{\text{ош АМн}} = 1 - \Phi(q/2). \quad (5.28)$$

Для нахождения вероятностей ошибок ЧМн и ФМн различителей требуется найти коэффициенты взаимной корреляции  $r_s$ , которые будут различны для ЧМн и ФМн сигналов.

В различителе ЧМн сигналов символ "1" связан с сигналом  $s_1(t) = a_0 \cos \omega_1 t$ , а символ "0" – с сигналом  $s_2(t) = a_0 \cos \omega_2 t$ , которые имеют одинаковую длительность  $T$ , но отличаются между собой частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (рис. 5.5, б). Если длительность символов  $T$  достаточно велика, то

$$r_s = \frac{1}{E_S} \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt = \frac{a_0^2}{E_S} \int_0^T \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t dt = 0,$$

Тогда, согласно (5.22),

$$P_{\text{ош ЧМн}} = 1 - \Phi\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right). \quad (5.29)$$

При этом  $m_1 = q^2$ ,  $m_2 = -q^2$ ,  $D_1 = D_2 = 2q^2$  (рис. 5.6, б).

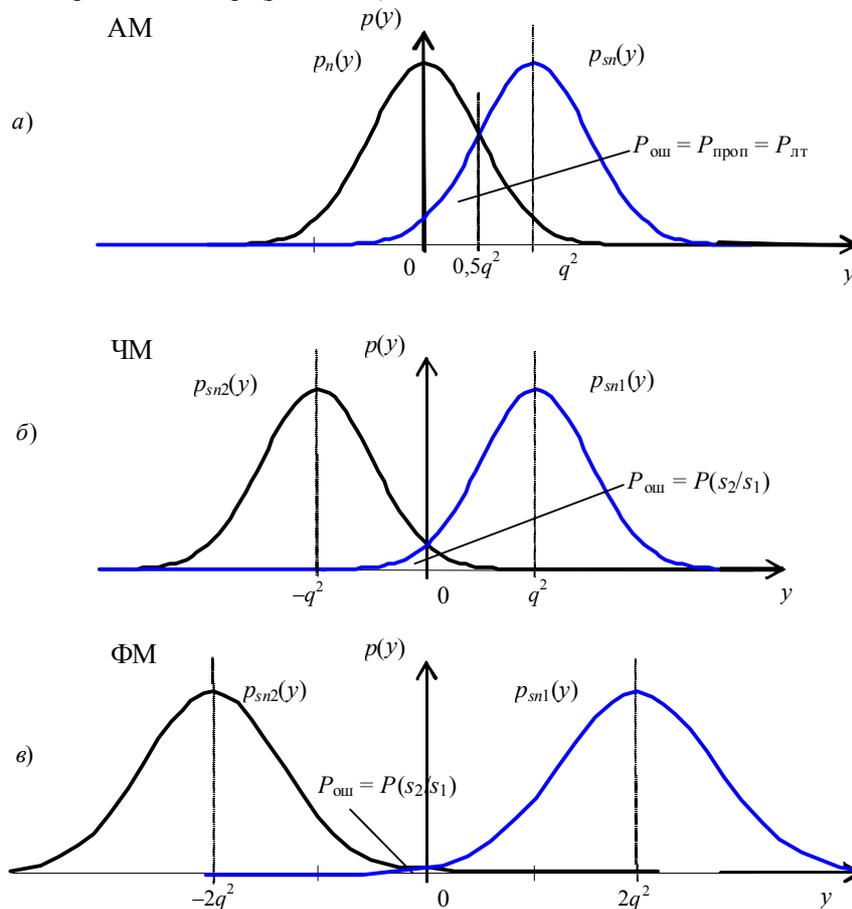


Рис. 5.6. Графики вероятностей  $P_{\text{ош}}$  при различных видах манипуляции

В различителе ФМн сигналов будем связывать символ "1" с сигналом  $s_1(t) = a_0 \cos \omega_0 t$ , а символ "0" – с сигналом  $s_2(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \pi) = -a_0 \cos \omega_0 t$ , которые имеют одинаковую длительность  $T$ , но отличаются между собой начальной фазой на величину  $\pi$  (рис. 5.5, в). Это приводит к тому, что сигнал  $s_1(t)$  противоположен по знаку к сигналу  $s_2(t)$  и, значит,

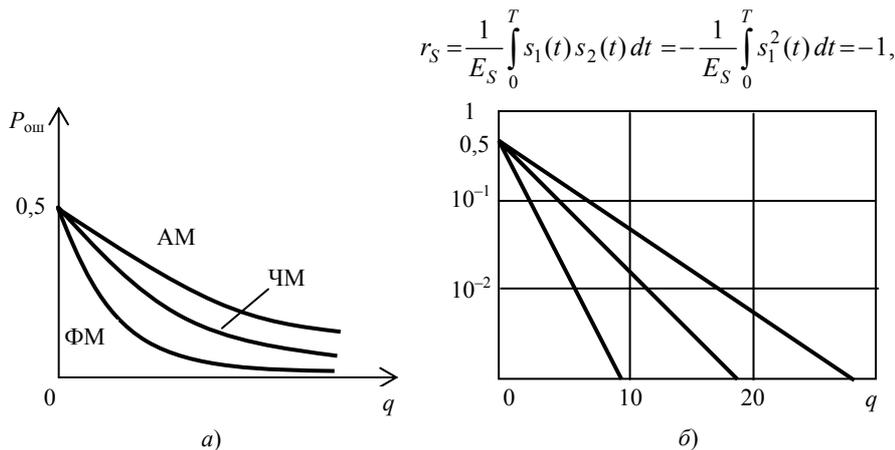


Рис. 5.7. Графики зависимостей  $P_{\text{ош}} = f(q)$  при различных видах манипуляции

Тогда, согласно (5.22),

$$P_{\text{ош ФМн}} = 1 - \Phi(q). \quad (5.30)$$

При этом  $m_1 = 2q^2$ ,  $m_2 = -2q^2$ ,  $D_1 = D_2 = 4q^2$ .

Графики вероятностей  $P_{\text{ош}}$  при различных видах манипуляции приведены на рис. 5.6.

Графики зависимостей (5.28) – (5.30) для сравнения между собой представлены на рис. 5.7 в линейном (а) и логарифмическом масштабе (б). Вторая форма представления графика обычно используется в расчётах. Из рис. 5.7 следует, что у различителя ФМн сигналов кривая  $P_{\text{ош ФМн}} = f(q)$  идёт левее и ниже остальных. Это означает, что помехоустойчивость ФМн различителя наибольшая.

## 6. ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

### 6.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

Как известно, сигнал, поступающий на приемную сторону радиотехнической системы, несёт существенную для получателя информацию, содержащуюся в значениях тех или иных параметров: амплитуды, частоты, фазы, времени запаздывания и др.

Очевидно, пользователю для извлечения из полученного сигнала сведений следует определить значения параметров сигнала, несущих требуемую информацию. Устройство, предназначенное для измерения параметров сигнала, будем называть *измерителем*. Измеренные значения параметров не обязательно воспроизведут истинные значения параметров, так как в реальных условиях полезный сигнал поступает на приёмную сторону только в смеси с помехами. Кроме того, на измерения может существенно влиять наличие у сигнала не только полезных (несущих необходимую информацию) параметров, но и параметров, не известных потребителю и не содержащих интересных для него сведений. Полезные параметры сигнала, содержащие нужную абоненту информацию, будем называть *информационными*, а остальные неизвестные параметры – *мешающими* (неинформационными, несущественными, паразитными, нежелательными).

Если в процессе измерения информационных параметров на интервале времени  $[0, T]$  их значения не изменяются, то в этом случае задача измерения параметров сводится к задаче *оценки параметров сигнала*.

### 6.2. ПОНЯТИЕ ТОЧЕЧНОЙ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

Пусть случайная величина  $\xi$  имеет определённое распределение, но в нём неизвестен какой-либо параметр  $\lambda$ . Известна условная плотность вероятности

$$p_{\xi}(x|\lambda). \quad (6.1)$$

Для оценки неизвестного параметра  $\lambda$ , проводят наблюдения случайной величины  $\xi$  и получают выборку объёма  $n$ , которую можно представить в виде  $n$ -мерного вектора

$$\bar{x}_n^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), \quad (6.2)$$

где результаты наблюдения являются проекциями этого вектора в  $n$ -мерном пространстве.

Затем подбирают такую функцию от выборки (называемую статистикой), которую можно было бы принять за оценку параметра  $\lambda$

$$\lambda^* = f(\bar{x}_n^*). \quad (6.3)$$

При конкретной выборке  $\bar{x}_n^*$  эта оценка является конкретной точкой на оси оцениваемого параметра. Поэтому оценка, определяемая формулой (6.3), называется точечной. Если  $\lambda_0$  истинное значение параметра, то  $\lambda^*$  будет находиться где-то вблизи точки  $\lambda_0$ .

Для другой выборки  $\bar{x}_n^*$  точечная оценка будет находиться в другой точке оси  $\lambda$ .

Если оценка параметра получена как функция случайной выборки,

$$\bar{\xi}_n = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n). \quad (6.4)$$

В этом случае оценка  $\hat{\lambda}$  является случайной величиной:

$$\hat{\lambda} = f(\bar{\xi}_n). \quad (6.5)$$

Оценка  $\hat{\lambda}$  имеет практическую ценность, если она обладает свойствами несмещённости, состоятельности и эффективности.

1. Несмещённой называется оценка, у которой математическое ожидание совпадает с истинным значением оцениваемого параметра  $\lambda_0$ :

$$\langle \hat{\lambda} \rangle = \lambda_0.$$

2. Состоятельной называется оценка, которая с увеличением объёма выборки  $n$  сходится по вероятности к истинному значению оцениваемого параметра:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\lambda} - \lambda_0| < \varepsilon) = 1,$$

где  $\varepsilon$  – наперёд заданное малое положительное число.

3. Эффективной называется оценка, которая среди любых других оценок, отличающихся видом функционального преобразования, но полученных для одного и того же объёма выборки, имеет наименьшую дисперсию:

$$D_{\hat{\lambda}} = \min.$$

На практике оценки могут иметь свойства, в той или иной степени отличные от рассмотренных. При этом, чем меньше у оценки наблюдается отклонений от свойств несмещённости, состоятельности и эффективности, тем она предпочтительнее.

### 6.3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА. ОЦЕНКА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ И НЕЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

Пусть на входе измерителя действует случайный процесс, представляющий собой сумму детерминированного сигнала  $s(t, \lambda)$  с неизвестным параметром  $\lambda$  и гауссовского белого шума  $n(t)$  со спектральной плотностью  $N_0$ :

$$\xi(t) = s(t, \lambda) + n(t). \quad (6.6)$$

Оптимальный измеритель определяет математическую операцию, которую необходимо выполнить над реализацией  $x(t)$  случайного процесса на интервале времени  $[0, T]$ , чтобы найти оптимальную оценку параметра  $\lambda$  по выбранному критерию оптимальности. При этом считается, что задача обнаружения сигнала решена и на входе измерителя действительно существует сумма (6.6).

На практике для оценки параметров сигналов наиболее часто применяют два метода:

1) метод максимума апостериорной плотности вероятности:

$$p[\lambda/x(t)] = k_1 p(\lambda) L(\lambda); \quad (6.7)$$

здесь  $k_1$  – коэффициент пропорциональности;  $p(\lambda)$  – априорная плотность вероятности параметра  $\lambda$ ;  $L(\lambda)$  – функция правдоподобия;

2) метод максимума функции правдоподобия:

$$L(\lambda) = p[x(t)/\lambda] = k \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s(t, \lambda)]^2 dt \right\}. \quad (6.8)$$

Второй метод используется в тех случаях, когда априорная плотность вероятности  $p(\lambda)$  неизвестна для оцениваемого параметра  $\lambda$ . Оценки, найденные по этому методу, называются *правдоподобными оценками*. Правдоподобная оценка и оценка, найденная по методу максимума апостериорной плотности вероятности, совпадают между собой, если параметр  $\lambda$  имеет равномерное распределение.

Если функция правдоподобия имеет один максимум, то правдоподобная оценка  $\lambda$  находится из решения уравнения

$$\frac{d}{d\lambda} \ln L(\lambda) = 0 \quad (6.9)$$

или

$$\frac{d}{d\lambda} y(\lambda) = 0, \quad (6.10)$$

где  $y(\lambda)$  является достаточной статистикой, определяемой по формуле

$$y(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) s(t, \lambda) dt - \frac{1}{2} q^2(\lambda); \quad (6.11)$$

$$\frac{1}{2} q^2(\lambda) = \frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t, \lambda) dt = \frac{E_s(\lambda)}{N_0}. \quad (6.12)$$

Достаточная статистика вычисляется как разность между корреляционным интегралом и половиной квадрата отношения сигнал/шум. При этом, как корреляционный интеграл, так и отношения сигнал/шум в общем случае зависят от параметра  $\lambda$ .

Все оцениваемые параметры можно разделить на энергетические и неэнергетические. *Энергетическим* называется такой параметр, от которого зависит энергия сигнала и, соответственно, отношение сигнал/шум. К энергетическим параметрам относятся амплитуда и длительность сигнала. *Неэнергетическим* называется такой параметр, от которого энергия сигнала и отношение сигнал/шум не зависят. К неэнергетическим параметрам относятся начальная фаза, частота и т.д.

Для неэнергетического параметра в качестве достаточной статистики  $y(\lambda)$  вместо выражения (6.11) удобнее использовать соотношение

$$y(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) s(t, \lambda) dt. \quad (6.13)$$

Таким образом, измеритель, оптимальный по критерию максимума функции правдоподобия, должен сформировать достаточную статистику (6.11) или (6.13), а затем для нахождения оценки параметра решить уравнение (6.8).

#### 6.4. ОПТИМАЛЬНЫЕ СХЕМЫ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

Структурная схема оптимального измерителя может быть получена из рассмотрения решения уравнения правдоподобия (6.8). Если решение уравнения является точным, то оптимальная схема находится однозначно. Если же уравнение является трансцендентным, то его решение находится с той или иной степенью приближения, что соответственно приводит к различным схемам измерителя. Рассмотрим эти два случая построения структурных схем.

В качестве первого случая рассмотрим получение оптимальной оценки амплитуды сигнала. Запишем копию сигнала в виде

$$s(t, \lambda) = a s_1(t), \quad (6.14)$$

где  $\lambda = a$  – оцениваемым параметром является амплитуда сигнала;  $s_1(t)$  – сигнал с единичной амплитудой,  $s_1(t) = \cos(\omega_0 t)$ ,  $t \in [0, T]$ .

Так как параметр  $a$  является энергетическим, то достаточная статистика

$$y(a) = \frac{2a}{N_0} \int_0^T x(t) s_1(t) dt - \frac{a^2}{N_0} \int_0^T s_1^2(t) dt. \quad (6.15)$$

Продифференцировав (6.15) по  $a$  и приравняв нулю производную, можно получить выражение для оценки параметра  $a$ :

$$\hat{a} = \frac{\int_0^T x(t) s_1(t) dt}{\int_0^T s_1^2(t) dt} = k \int_0^T x(t) s_1(t) dt, \quad (6.16)$$

где  $k = \frac{1}{\int_0^T s_1^2(t) dt}$ .

Из (6.16) следует, что правдоподобная оценка амплитуды определяется в виде корреляционного интеграла между входным процессом и копией сигнала с единичной амплитудой. Однако при этом коэффициент пропорциональности у корреляционного интеграла должен быть в точности равен величине, обратной к энергии копии единичного сигнала. В соответствии с полученным решением структурная схема оптимального измерителя амплитуды может быть реализована с помощью корреляционного приёмника или с помощью согласованного фильтра (рис. 6.1).

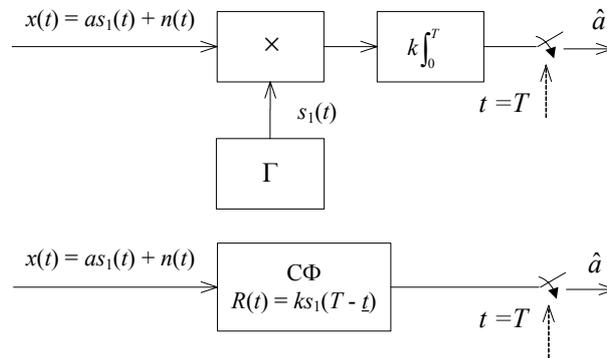


Рис. 6.1. Структурные схемы оптимальных измерителей амплитуды

В качестве второго случая рассмотрим получение оптимальной оценки любого неэнергетического параметра. Учитывая, что в этом случае уравнение правдоподобия носит трансцендентный характер, будем искать оценку параметра  $\lambda$ , при котором статистика достигает максимума, напрямуюю

$$y(\lambda) = \max, \int_0^T x(t) s(t, \lambda) dt = \max \quad (6.17)$$

путём перебора параметров  $\lambda_i$ , расчёта для каждого  $\lambda_i$  корреляционного интеграла  $y(\lambda_i)$  и сравнения полученных  $y(\lambda_i)$  между собой. Тогда в качестве оценки параметра  $\lambda$  следует брать то значение, при котором достигается максимум (6.17). Такая процедура нахождения оценки может быть реализована с помощью структурной схемы, представленной на рис. 6.2, а.

Измеритель должен располагать набором эталонных сигналов, отличающихся параметром  $\lambda$ :  $s(t, \lambda_1), s(t, \lambda_2), \dots, s(t, \lambda_n)$ . Для каждого эталонного сигнала по схеме корреляционного приёмника строится измерительный канал, в котором вычисляется статистика.

В устройстве сравнения происходит сравнение различных статистик. В результате этого сравнения определяют  $j$ -й канал, в котором статистика наибольшая, и за оценку берётся параметр  $\lambda_j$   $j$ -го канала.

Измерительные каналы в схеме могут быть построены с использованием согласованных фильтров (рис. 6.2, б), где каждый  $i$ -й фильтр согласован с  $\lambda_i$  параметром сигнала.

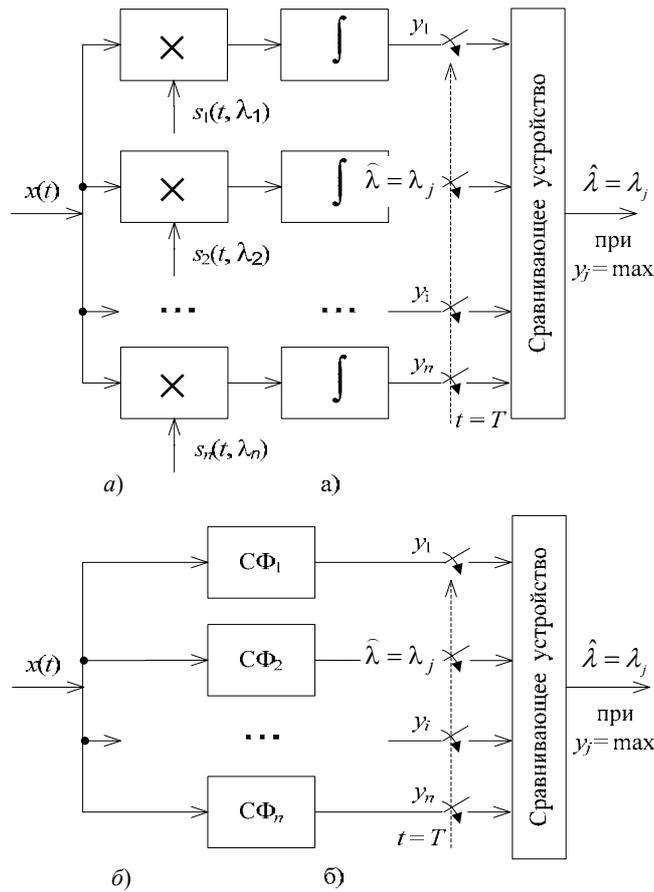


Рис. 6.2. Структурные схемы оптимальных измерителей фазы

### 6.5. СИГНАЛЬНАЯ И ШУМОВАЯ ФУНКЦИИ. ДИСПЕРСИЯ ПРАВДОПОДОБНОЙ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА СИГНАЛА

Из-за действия шума статистика  $y(\lambda)$  будет случайной величиной. Случайная статистика может быть получена, например, в случае оценивания неэнергетического параметра. Для этого необходимо подставить в формулу (6.8) вместо реализации  $x(t)$  случайный процесс  $\xi(t)$ :

$$\xi(t) = s(t, \lambda_0) + n(t), \quad (6.18)$$

где  $\lambda_0$  – истинное значение параметра.  
В результате имеем

$$y(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) s(t, \lambda) dt = S(\lambda) + N(\lambda), \quad (6.19)$$

где

$$S(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T s(t, \lambda) s(t, \lambda_0) dt ; \quad (6.20)$$

$$N(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T n(t) s(t, \lambda) dt . \quad (6.21)$$

Зависимость  $S(\lambda)$  называется *сигнальной функцией*, а зависимость  $N(\lambda)$  – *шумовой функцией*.

Сигнальная функция  $S(\lambda)$  представляет собой корреляционный интеграл между сигналом с истинным значением параметра  $\lambda_0$  и этим же сигналом, но с оцениваемым параметром  $\lambda$ , играющим роль аргумента. Интеграл берётся за время существования сигнала. Примеры графиков  $S(\lambda)$  и  $N(\lambda)$  показаны на рис. 6.3.

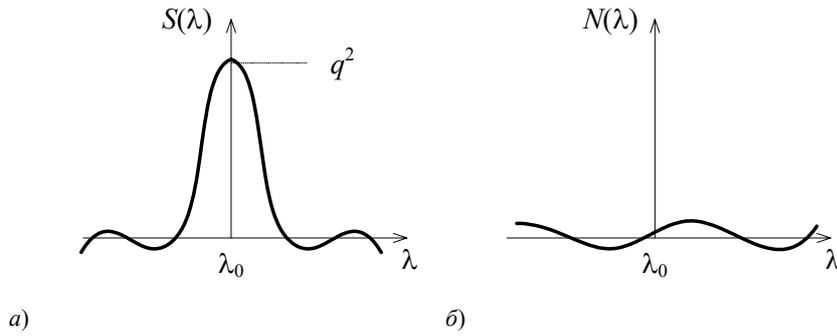


Рис. 6.3. Графики сигнальной и шумовой функций

Максимум  $S(\lambda)$  достигается при  $\lambda = \lambda_0$ , соответствующая квадрату отношения сигнал/шум:

$$S(\lambda)|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{2}{N_0} \int_0^T s^2(t, \lambda_0) dt = \frac{2E_s}{N_0} = q^2 = \max. \quad (6.22)$$

Так как максимум  $S(\lambda)$  достигается при  $\lambda = \lambda_0$ , то

$$\frac{dS(\lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=\lambda_0} = 0 \cdot \frac{d^2S(\lambda)}{d\lambda^2}|_{\lambda=\lambda_0} < 0. \quad (6.23)$$

Функция  $S(\lambda)$  симметрична относительно вертикальной прямой, проходящей через точку  $\lambda = \lambda_0$ , так что

$$S(\lambda - \lambda_0) = S(\lambda_0 - \lambda). \quad (6.24)$$

Шумовая функция  $N(\lambda)$  представляет собой корреляционный интеграл между шумом  $n(t)$  и сигналом  $s(t, \lambda)$  с оцениваемым параметром, играющим роль аргумента. Для гауссовского стационарного шума  $n(t)$  шумовая функция является стационарным гауссовским случайным процессом параметра  $\lambda$  с нулевым математическим ожиданием

$$\langle N(\lambda) \rangle = 0 \quad (6.25)$$

и корреляционной функцией, определяемой сигнальной функцией

$$R_N(\lambda_2 - \lambda_1) = \langle N(\lambda_1)N(\lambda_2) \rangle = S(\lambda_2 - \lambda_1). \quad (6.26)$$

С помощью сигнальной функции можно оценить разрешающую способность измерителя. Действительно, если на входе действуют два сигнала  $s(t, \lambda_{01})$  и  $s(t, \lambda_{02})$ , отличающиеся между собой истинными значениями параметров  $\lambda_{01}$  и  $\lambda_{02}$ , то на выходе измерителя появятся два сигнала  $s_1(\lambda)$  и  $s_2(\lambda)$  в области  $\lambda$ .

Два сигнала  $s(t, \lambda_{01})$  и  $s(t, \lambda_{02})$  могут быть надежно выделены и их параметры отдельно измерены, если разность  $|\lambda_{02} - \lambda_{01}|$  превышает разрешающую способность измерителя  $\delta\lambda$ :

$$|\lambda_{02} - \lambda_{01}| \geq \delta\lambda. \quad (6.27)$$

Разрешающая способность  $\delta\lambda$ , согласно критерию Релея, определяется как разность  $(\lambda_{02} - \lambda_{01})$ , которая соответствует ширине сигнальной функции (рис. 6.4). Уровень, на котором определяется  $S(\lambda)$ , может быть различным. На рисунке 6.4 уровень для определения  $\delta\lambda$  выбран нулевым.

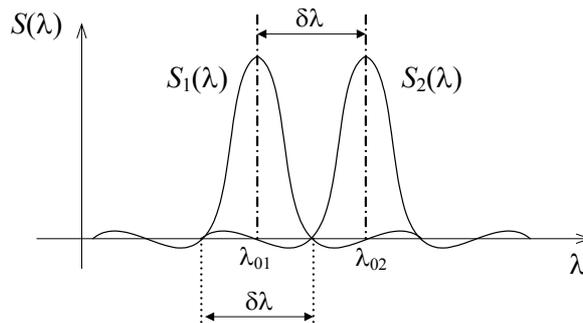


Рис. 6.4. Определение разрешающей способности различителя

Сигнальная функция  $S(\lambda)$  используется также для нахождения степени разброса оценки вокруг  $\lambda_0$ , если  $\hat{\lambda}$  является несмещённой оценкой.

При выполнении этого условия степень разброса оценки вокруг  $\lambda_0$  будет определяться дисперсией оценки

$$D_{\hat{\lambda}} = \langle (\hat{\lambda} - \lambda_0)^2 \rangle. \quad (6.28)$$

На практике, вместо дисперсии, для характеристики степени разброса  $\hat{\lambda}$  вокруг  $\lambda_0$  используется среднее квадратическое отклонение (СКО), равное корню из дисперсии, так как размерности оценки и СКО совпадают. Можно показать, что дисперсия правдоподобной оценки параметра сигнала обратно пропорциональна взятой с обратным знаком кривизне сигнальной функции в точке истинного значения параметра

$$D_{\hat{\lambda}} = -\frac{1}{S''(\lambda_0)}, \quad (6.29)$$

где  $S''(\lambda_0) = \left. \frac{d^2 S(\lambda)}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=\lambda_0}$  – кривизна  $S(\lambda)$ .

Формула (6.29) имеет важное значение. С её помощью можно определять потенциальную точность оптимального измерителя, располагая только отношением сигнал/шум  $q$ , формой сигнала  $s(t, \lambda)$  и выбором оцениваемого параметра  $\lambda$ , не прибегая к анализу работы конкретного измерителя.

## 7. ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

### 7.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В общем случае задача фильтрации формулируется следующим образом. Наблюдается процесс  $\xi(t)$ , являющийся детерминированной функцией от полезного сигнала  $s(t, \bar{\lambda}(t))$  и некоторой помехи  $n(t)$ .

Полезный сигнал  $s(t, \bar{\lambda}(t))$  является функцией времени  $t$  и многокомпонентного параметра (сообщения)  $\bar{\lambda}(t) = [\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)]$ , представляющего собой векторный случайный процесс. Предполагаются известными функциональная зависимость сигнала от аргумента  $t$  и  $\bar{\lambda}(t)$ , а также все необходимые вероятностные характеристики случайного процесса  $\bar{\lambda}(t)$  и помехи  $n(t)$ .

Общая задача фильтрации заключается в том, чтобы на основании априорных сведений и по наблюдаемой реализации  $x(t)$  процесса  $\xi(t)$  для каждого момента времени  $t$  сформировать апостериорную плотность вероятности сообщения  $\bar{\lambda}(t)$ .

В большинстве случаев инженерной практики обычно требуется получить текущую оценку  $\bar{\lambda}(t)$ , наилучшую в соответствии с выбранным критерием оптимальности. Различают несколько модификаций задачи построения оптимальных оценок. При наблюдении процесса  $\xi(t)$  на текущем интервале времени  $[0, T]$  определяется оценка  $\bar{\lambda}(t + \tau)$ ; если  $\tau = 0$ , имеет место задача текущей фильтрации; если  $\tau > 0$  – задача фильтрации с предсказанием, или задача экстраполяции; при  $\tau < 0$  – задача фильтрации с запаздыванием, или задача интерполяции.

Априорные сведения о вероятностных характеристиках сообщения  $\bar{\lambda}(t)$  и помехи  $n(t)$  задаются либо в форме многомерных плотностей вероятности, либо в виде дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями.

При дальнейшем рассмотрении полагаем уравнение наблюдения процесса  $\xi(t)$  в виде

$$\xi(t) = s[t, \lambda(t)] + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7.1)$$

где  $n(t)$  – гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием  $\langle n(t) \rangle = 0$  и  $\delta$ -функцией корреляции  $\langle n(t_1) n(t_2) \rangle = (N_0/2) \delta(t_2 - t_1)$ .

Считаем, что сообщение  $\lambda(t)$  – однокомпонентный случайный процесс, который формируется из белого гауссовского шума  $n_\lambda(t)$ , имеющего нулевое математическое ожидание и одностороннюю спектральную плотность  $N_{0\lambda}$ .

Формирование сообщения  $\lambda(t)$  определяется дифференциальным уравнением (уравнением сообщения)

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = g(t, \lambda) + n_\lambda(t), \quad \lambda(0) = \lambda_0, \quad (7.2)$$

где  $g(t, \lambda)$  – известная функция аргументов  $t$  и  $\lambda$ .

В зависимости от вида уравнения наблюдения (7.1) и уравнения сообщения (7.2), следует различать два класса задач фильтрации:

1. *Линейная фильтрация* – уравнения (7.1) и (7.2) являются линейными относительно сообщения  $\lambda(t)$ .
2. *Нелинейная фильтрация* – уравнения (7.1) или (7.2) содержат нелинейные функции сообщения  $\lambda(t)$ .

Очевидно, что линейная фильтрация является частным случаем нелинейной фильтрации. Основополагающие результаты по теории нелинейной фильтрации получены Р.Л. Стратоновичем.

Наблюдение и обработка принятого колебания  $\xi(t)$  могут осуществляться двумя методами: в непрерывном времени (*аналоговая фильтрация*) и в дискретном времени (*дискретная фильтрация*). При дискретной обработке берутся временные отсчёты  $\xi(t_v)$  с соблюдением теоремы Котельникова, например, через равноотстоящие промежутки времени  $t_{v+1} - t_v = \Delta = \text{const}$ .

В дискретном времени уравнения наблюдения и сообщения имеют следующий вид

$$\xi_v = s(t_v, \lambda_v) + n_v; \quad (7.3)$$

$$\lambda_v = g(t_v, \lambda_{v-1}) + n_{\lambda_v}. \quad (7.4)$$

## 7.2. КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ

Рассмотрим критерии оптимальности, применяемые в теории фильтрации. Пусть на входе фильтра наблюдается реализация процесса (7.1)

$$x(t) = s[t, \lambda(t)] + n(t), \quad (7.5)$$

где  $\lambda(t)$ ,  $n(t)$  – являются реализациями соответственно сообщения и шума.

Фильтр будет оптимальным, если на его выходе формируется процесс  $y(t)$ , являющийся оптимальной, т.е. наилучшей в определённом смысле, оценкой сообщения  $\hat{\lambda}(t)$ .

То, что вкладывается в понятие оптимальной оценки  $\hat{\lambda}(t)$ , определяется выбранным критерием оптимальности. Критерий оптимальности сформулируем, исходя из апостериорной плотности вероятности  $p(\lambda, t | x(t))$ , определяемой на интервале наблюдения  $[0, t]$ . Интервал наблюдения за счет роста  $t$  непрерывно увеличивается. Это приводит к увеличению объёма выборки и к сужению апостериорной плотности вероятности  $p(\lambda, t | x(t))$ , характеризующей плотность вероятности сообщения  $\lambda(t)$  в конечной точке интервала наблюдения. Сужение  $p(\lambda, t | x(t))$  соответствует уменьшению дисперсии оценки сообщения  $R(t) = D_{\hat{\lambda}}(t)$ , что является самым важным результатом фильтрации.

При гауссовском белом шуме  $n(t)$  и достаточно высоком отношении сигнал/шум  $q = \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}$ , апостериорная плотность вероятности  $p(\lambda, t | x(t))$ , приближается к гауссовскому закону, для которого мода, медиана и математическое ожидание совпадают.

Это означает, что если в качестве критерия оптимальности рассматривать получение оценки  $\hat{\lambda}$  по максимуму апостериорной плотности вероятности

$$p(\lambda, t | x(t)) = \max, \quad (7.6)$$

то найденная таким образом оценка  $\hat{\lambda}(t)$  является оптимальной также в том смысле, что обеспечивается в каждый момент времени минимум среднего значения квадрата ошибки между оценкой и передаваемым сообщением:

$$\left\langle (\lambda(t) - \hat{\lambda}(t))^2 \right\rangle = \min. \quad (7.7)$$

Таким образом, если согласно (7.6) в качестве оценки выбрать траекторию координаты максимума плотности вероятности  $p(\lambda, t | x(t))$ , то оценка  $\hat{\lambda}(t)$  будет наилучшим образом совпадать с передаваемым сообщением  $\lambda(t)$ , т.е. критерии оптимальности (7.6) и (7.7) приводят к одной и той же оценке.

При этом оптимальной оценкой является апостериорное математическое ожидание

$$\hat{\lambda}(t) = \int_{(\lambda)} \lambda p[\lambda, t | x(t)] d\lambda. \quad (7.8)$$

Погрешность получаемой оценки можно характеризовать апостериорной дисперсией

$$R(t) = D_{\hat{\lambda}}(t) = \int_{(\lambda)} (\lambda - \hat{\lambda})^2 p[\lambda, t | x(t)] d\lambda. \quad (7.9)$$

### 7.3. ПОЛУЧЕНИЕ СООБЩЕНИЯ ИЗ БЕЛОГО ШУМА С ПОМОЩЬЮ ФОРМИРУЮЩЕГО ФИЛЬТРА

Для синтеза алгоритмов фильтрации необходимо, прежде всего, располагать априорными сведениями о возможном поведении  $\lambda(t)$ , т.е. моделью сообщения  $\lambda(t)$ . Очень удобной и адекватной многим реальным ситуациям оказывается модель  $\lambda(t)$  в виде марковского случайного процесса, частным случаем которого является гауссовский случайный процесс с нормированной корреляционной функцией

$$r(\tau) = \exp \{-\alpha |\tau|\},$$

где  $\alpha$  – некоторый постоянный коэффициент.

Строго говоря, для нахождения вероятностных характеристик  $\lambda(t)$  необходимо произвести статистическую обработку реализаций процесса  $\lambda(t)$ , получаемого на выходе какого-нибудь датчика, например, микрофона, измерителя скорости полёта, высоты и т.д. В теории фильтрации поступают иначе. Реальный датчик заменяют моделью, являющейся формирователем сообщения. Формирователь сообщения представляет собой известный фильтр, на вход которого поступает белый шум  $n_{\lambda}(t)$  с заданной односторонней спектральной плотностью  $N_{\lambda}$ . Этот шум  $n_{\lambda}(t)$ , называемый *информационным* (либо формирующим), пройдя через формирующий фильтр, создаёт на его выходе случайный процесс с заданными вероятностными характеристиками. Самым простым является формирующий фильтр, представляющий собой интегрирующую RC-цепь (рис. 7.1, а) и предназначенный для формирования модели сообщения, используемого в телевизионных и телеметрических системах связи.

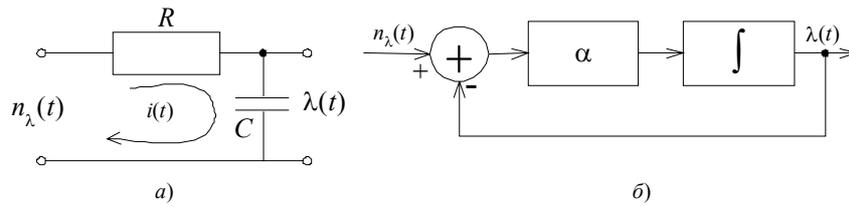


Рис. 7.1. Схемы формирующих фильтров

При белом гауссовском шуме  $n_{\lambda}(t)$  сообщение  $\lambda(t)$ , являющееся выходным процессом фильтра (рис. 7.1, а), также будет гауссовским процессом с корреляционной функцией и спектральной плотностью, соответственно равными

$$R_{\lambda}(\tau) = \frac{\alpha N_{0\lambda}}{4} e^{-\alpha|\tau|}; \quad S_{\lambda}^{+}(f) = \frac{N_{0\lambda}}{1 + 4\pi^2 f^2 / \alpha^2}, \quad (7.10)$$

где  $\alpha = \Delta\omega_{0,5} = 1/RC$  – параметр, соответствующий полосе пропускания фильтра на уровне 0,5.

Однако, использование в дальнейшем характеристик (7.10) для нахождения структурной схемы оптимального фильтра оказалось неудобным, так как при этом приходится сталкиваться со значительными математическими трудностями, связанными с решением интегро-дифференциальных уравнений. Оказалось, что для преодоления этих трудностей удобнее задавать вероятностное описание сообщения  $\lambda(t)$  в виде дифференциального уравнения, связывающего  $\lambda(t)$  с  $n_{\lambda}(t)$ .

Согласно уравнению Кирхгофа, имеем

$$n_{\lambda}(t) = i(t)R + \lambda(t), \quad (7.11)$$

где  $i(t)$  – ток через  $R$  и  $C$ .

В свою очередь, ток через ёмкость

$$i(t) = C \frac{d}{dt} \lambda(t). \quad (7.12)$$

Подставив (7.12) в (7.11) и разрешив равенство относительно производной, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} \lambda(t) = \alpha [n_{\lambda}(t) - \lambda(t)]. \quad (7.13)$$

Дифференциальное уравнение (7.13) может быть смоделировано, согласно методам автоматики, с помощью аналогового вычислителя (рис. 7.1, б).

Таким образом, уравнение (7.13) позволяет не только определить процесс  $\lambda(t)$  из информационного шума  $n_\lambda(t)$ , но и содержит в неявной форме вероятностные характеристики получаемого случайного процесса  $\lambda(t)$ , являющегося моделью сообщения.

В качестве модели речевого сообщения часто применяется процесс  $\lambda(t)$ , определяемый с помощью системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -\alpha\lambda - \alpha_1\lambda_1 + \alpha_1 n_\lambda(t); \\ \dot{\lambda}_1 = -\alpha_1\lambda_1 + \alpha_1 n_\lambda(t), \end{cases} \quad (7.14)$$

где  $\alpha$  и  $\alpha_1$  – постоянные коэффициенты.

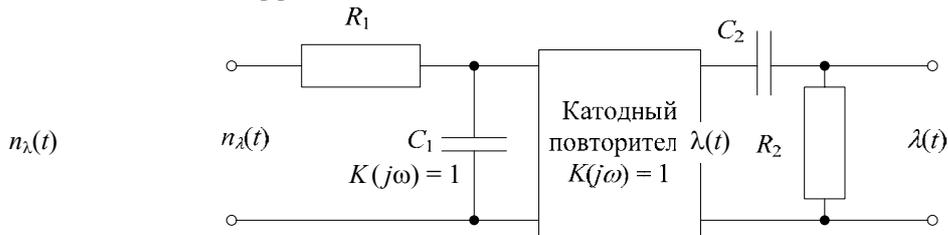


Рис. 7.2. Схема формирующего фильтра речевого сообщения

Сообщение  $\lambda(t)$ , согласно уравнениям (7.14), можно рассматривать как случайное напряжение на выходе последовательно соединённых (без учёта взаимной реакции)  $RC$ -фильтра нижних частот и  $CR$ -фильтра верхних частот (рис. 7.2), когда на входе действует белый шум  $n_\lambda(t)$ . Постоянные времени  $RC$  и  $CR$ -фильтров соответственно равны:  $1/\alpha_1 = R_1 C_1$  и  $1/\alpha = R_2 C_2$ .

Спектральная плотность и корреляционная функция процесса  $\lambda(t)$  соответственно имеют вид

$$S_\lambda(\omega) = \frac{\alpha_1^2 \omega^2 N_\lambda}{2(\omega^2 + \alpha_1^2)(\omega^2 + \alpha^2)}; \quad (7.15)$$

$$R_\lambda(\tau) = \frac{\alpha_1^2 N_\lambda}{4(\alpha^2 - \alpha_1^2)} (\alpha e^{-\alpha|\tau|} - \alpha_1 e^{-\alpha_1|\tau|}). \quad (7.16)$$

Дисперсия такого процесса  $\lambda(t)$  равна  $D_\lambda = \sigma_\lambda^2 = \frac{\alpha_1^2 N_\lambda}{4(\alpha_1 + \alpha)}$ .

#### 7.4. АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОЙ АНАЛОГОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

При рассмотрении алгоритма фильтрации остановимся лишь на теории фильтрации одномерных марковских гауссовских процессов. Для этого частного случая уравнение наблюдения задаётся в виде (7.1), а уравнение сообщения – в виде (7.2).

Поскольку процесс  $\lambda(t)$ , описываемый уравнением (7.2), является диффузионным марковским, изменения во времени его априорной плотности вероятности  $p(\lambda, t)$  определяются уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\lambda, t) = -\frac{\partial}{\partial \lambda} [g(t, \lambda) p(t, \lambda)] + \frac{N_{0\lambda}}{4} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} p(t, \lambda) = L\{p(t, \lambda)\}. \quad (7.17)$$

Здесь через  $L(\bullet)$  обозначен оператор преобразования Фоккера-Планка-Колмогорова. Заметим, что в рассматриваемом случае имеет место однозначное соответствие между описаниями процесса  $\lambda(t)$  в виде уравнения (7.2) либо (7.17).

Располагая этими априорными данными, нужно синтезировать устройство, которое бы с наименьшей погрешностью воспроизводило изменяющееся во времени случайное сообщение  $\lambda(t)$ .

Для вычисления оптимальной оценки  $\lambda(t)$  и её погрешности, необходимо знать апостериорную плотность вероятности  $p(\lambda, t | x(t))$ , которая, согласно формулы Байеса, определяется двумя сомножителями:  $p(\lambda, t)$  и  $p(x(t))$

$|\lambda$ ). Плотность вероятности  $p(\lambda, t)$  фильтруемого процесса  $\lambda(t)$ , удовлетворяющего уравнению сообщения (7.2), определяется из (7.17). Условная плотность вероятности  $p(x(t) | \lambda)$  (функция правдоподобия) легко находится из уравнения наблюдения. Так как сигнал  $s(t, \lambda(t))$  является известной функцией аргументов  $t$  и  $\lambda$ , а шум  $n(t)$  имеет гауссовское распределение, то и  $p(x(t) | \lambda)$  также будет гауссовской.

В работах Р.Л. Стратоновича показано, что апостериорная плотность вероятности  $p(\lambda, t | x(t))$  параметра  $\lambda(t)$  в конечный момент времени наблюдения определяется следующим дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\lambda | x(t)) = L \{p(\lambda | x(t))\} + [F(t, \lambda) - \langle F(t, \lambda) \rangle] p(\lambda | x(t)), \quad (7.18)$$

где  $F(t, \lambda)$  – производная по времени от логарифма функции правдоподобия

$$F(t, \lambda) = \frac{d}{dt} \ln p(x(t) | \lambda), \quad (7.19)$$

$\langle F(t, \lambda) \rangle$  – усреднение  $F(t, \lambda)$  по информационному параметру  $\lambda$

$$\langle F(t, \lambda) \rangle = \int_{(\lambda)} F(t, \lambda) p(\lambda | x(t)) d\lambda. \quad (7.20)$$

Начальные условия для уравнения Стратоновича (7.18) определяются априорной плотностью вероятности  $p(\lambda, 0)$  начальной координаты сообщения  $\lambda(0) = \lambda_0$ .

Апостериорная плотность вероятности  $p(\lambda, t | x(t))$  содержит всю доступную информацию о параметре  $\lambda(t)$ , которую можно извлечь из наблюдения реализации  $x(t)$  процесса  $\xi(t)$  на интервале  $[0, t]$  и из априорных сведений о  $\lambda(t)$ . Определив апостериорную плотность  $p(\lambda, t | x(t))$ , можно получить другие требуемые характеристики, например, математическое ожидание  $\lambda(t)$ , представляющее оптимальную оценку сообщения по критерию минимума среднего квадрата ошибки или оценку, оптимальную по критерию максимума апостериорной плотности вероятности.

Таким образом, уравнение Стратоновича (7.18) определяет полную процедуру фильтрации сообщения  $\lambda(t)$  на фоне белого шума. В общем случае аналитическое решение этого уравнения оказывается трудной задачей, схемы оптимального фильтра при этом весьма сложны. Для получения более простых схем целесообразно использовать различные упрощающие предположения.

## 8. ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СООБЩЕНИЙ

### 8.1. ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ АНАЛОГОВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ. ФИЛЬТР КАЛМАНА

Рассмотрим случай линейной аналоговой фильтрации, когда наблюдаемый процесс на входе фильтра задан уравнением

$$\xi(t) = H(t) \lambda(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8.1)$$

а сообщение  $\lambda(t)$  – уравнением

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\alpha\lambda(t) + n_\lambda(t); \quad (8.2)$$

здесь  $H(t)$  – известная функция (несущее колебание);  $H(t) \lambda(t) = s[t, \lambda(t)]$  – передаваемый сигнал;  $n(t)$  – белый гауссовский шум (не обязательно стационарный) с нулевым средним значением и односторонней спектральной плотностью  $N_0$ ;  $\alpha$  – постоянный коэффициент, определяющий ширину спектра сообщения  $\lambda(t)$ .

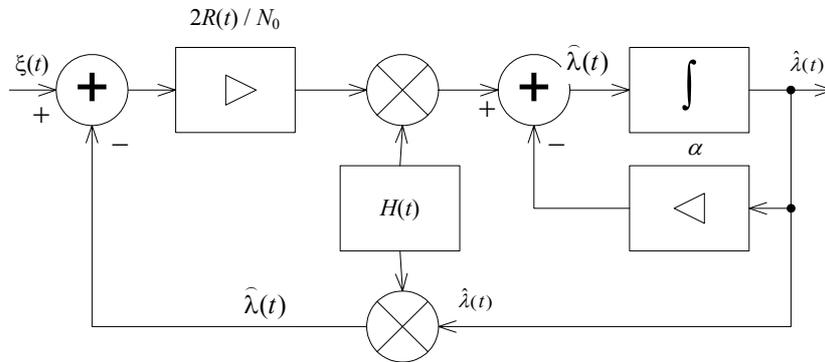
Если сообщение  $\lambda(t)$  рассматривают, как результат прохождения формирующего стационарного белого шума  $n_\lambda(t)$  через интегрирующую цепочку  $RC$ , то коэффициент  $\alpha = 1/(RC)$ .

При линейной фильтрации гауссовских процессов, каким является рассматриваемое сообщение  $\lambda(t)$ , апостериорная плотность вероятности  $p[\lambda | \xi(t)]$  представляется гауссовским законом. Параметрами такой плотности вероятности служат математическое ожидание  $\hat{\lambda}(t)$  и дисперсия  $R(t)$ . Подставляя гауссовскую плотность вероятности в уравнение Стратоновича, можно прийти к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} = -\alpha(t)\hat{\lambda}(t) + \frac{2H(t)R(t)}{N_0} [\xi(t) - H(t)\hat{\lambda}(t)]; & (8.3) \\ \frac{dR(t)}{dt} = -2\alpha(t)R(t) + \frac{N_{0\lambda}}{2} - \frac{2H^2(t)R^2(t)}{N_0}. & (8.4) \end{cases}$$

Уравнения (8.3) и (8.4) принято называть уравнениями фильтра Калмана для непрерывного времени. Уравнение (8.3) определяет алгоритм формирования оценки, а следовательно, и структурную схему фильтра, а (8.4) – ошибку фильтрации (дисперсию оценки сообщения)  $R(t)$ . Уравнение (8.4) принято в математике называть уравнением Риккати. Структурная схема фильтра, моделирующего уравнение (8.3), приведена на рис. 8.1.

Построение схемы удобно начинать с интегратора. Для этого обозначим правую часть (8.3) через  $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ , где  $y_1(t) = K(t)H(t) [\xi(t) - H(t)\hat{\lambda}(t)]$ ,  $y_2(t) = -\alpha\hat{\lambda}(t)$ ,  $K(t) = 2R(t) / N_0$ . Коэффициент  $K(t)$ , зависящий от дисперсии оценки сообщения  $R(t)$  и спектральной плотности  $N_0$  шумовой помехи  $n(t)$ , имеет смысл коэффициента передачи. Тогда уравнение (8.3) запишется как  $d\hat{\lambda}(t)/dt = y(t)$ . Отсюда следует, что если на вход интегратора подать напряжение  $y(t)$ , то на его выходе получим оценку сообщения  $\hat{\lambda}(t)$ . Для того чтобы сформировать напряжение  $y_1(t)$ , необходимо иметь генератор несущего колебания  $H(t)$ , два множителя, сумматор и усилитель с коэффициентом усиления  $K(t)$ .



**Рис. 8.1. Фильтр Калмана для гауссовского сообщения при линейной модуляции**

С помощью этих устройств осуществляются все операции, входящие в выражение для  $y_1(t)$ . Напряжение  $y_2(t)$  получается с помощью усилителя с коэффициентом усиления  $\alpha$ , на вход которого поступает напряжение оценки  $\hat{\lambda}(t)$ . Суммарное напряжение  $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$  с выхода сумматора поступает на вход интегратора, на выходе которого получаем оценку  $\hat{\lambda}(t)$ .

## 8.2. ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

Рассмотрим частный случай линейной фильтрации, когда уравнения наблюдения (8.1) и сообщения (8.2) являются линейными и заданы в виде скалярных разностных уравнений

$$\begin{cases} \xi_v = H_v \lambda_v + n_v; & (8.5) \\ \lambda_v = \beta_{v-1} \lambda_{v-1} + n_{\lambda v}; & (8.6) \end{cases}$$

$$\lambda(0) = \lambda_0.$$

Предполагается, что здесь  $H_v = H(t_v)$  и  $\beta_v = \beta(t_v)$  есть заданные функции времени;  $n_v$ ,  $n_{\lambda v}$  – гауссовские шумы с нулевыми средними значениями и дисперсиями  $D_v$  и  $D_{\lambda v}$ , соответственно; интервал времени  $\Delta = (t_v - t_{v-1})$  определяется временем дискретизации процессов.

Согласно (8.6), все значения  $\lambda_v$  получаются в результате линейного преобразования последовательности независимых распределённых по гауссовскому закону случайных величин  $n_{\lambda i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, v$ . Поэтому при гауссовском распределении начального значения  $\lambda_0$  случайная величина  $\lambda_v$  будет также распределённой по гауссовскому закону. Совместно гауссовскими будут являться также совокупности случайных величин  $\bar{\xi}_{v-1} = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{v-1}\}$  и  $\{\lambda_{v-1}, \bar{\xi}_{v-1}\}$ .

Известно, что условные плотности вероятности совместно гауссовских случайных величин являются гауссовскими. Поэтому плотность вероятности

$$p\{\lambda_{v-1} | \bar{\xi}_{v-1}\} = p\{\lambda_{v-1}, \bar{\xi}_{v-1}\} / p\{\bar{\xi}_{v-1}\}$$

на  $(v - 1)$ -м шаге является гауссовской и имеет вид

$$p\{\lambda_{v-1} | \bar{\xi}_{v-1}\} = c_1 \exp\left[-(\lambda_{v-1} - \hat{\lambda}_{v-1})^2 / 2D_{\hat{\lambda}_{v-1}}\right],$$

где  $c_1$  – нормировочная постоянная;  $D_{\hat{\lambda}_{v-1}} = R_{v-1}$  – апостериорная дисперсия;  $\hat{\lambda}_{v-1}$  – оптимальная оценка  $\lambda_{v-1}$ .

Путем соответствующих преобразований можно показать, что условная плотность вероятности на  $v$ -м шаге является также гауссовской и имеет вид

$$p(\lambda_v | \bar{\xi}_v) = c \exp\left\{-\left[\frac{(\lambda_{v-1} - \beta_{v-1}\hat{\lambda}_{v-1})^2}{2(\beta_{v-1}^2 R_{v-1} + R_v)} + \frac{(\xi_v - H_v \lambda_v)^2}{2D_v}\right]\right\}. \quad (8.7)$$

Из формулы (8.7) следуют результирующие уравнения для оценки  $\hat{\lambda}_v$  и дисперсии  $D_{\hat{\lambda}_v} = R_v$ , которые определяют дискретный фильтр Калмана. Они носят рекуррентный характер и имеют следующий вид:

$$\hat{\lambda}_v = \beta_{v-1}\hat{\lambda}_{v-1} + H_v \frac{R_v}{D_v} (\xi_v - H_v \beta_{v-1}\hat{\lambda}_{v-1}); \quad (8.8)$$

$$\frac{1}{R_v} = \frac{1}{\beta_{v-1}^2 R_{v-1} + D_{0v}} + \frac{H_v^2}{D_v}. \quad (8.9)$$

Структурная схема дискретного фильтра Калмана изображена на рис. 8.2, где  $K_v = H_v (R_v / D_v)$ .

Предположим, что наблюдения отсутствуют, т.е.  $H(t) \equiv 0$ . Тогда апостериорная плотность вероятности совпадает с априорной и из (8.8) имеем

$$\hat{\lambda}_v = \beta_{v-1}\hat{\lambda}_{v-1}.$$

Это есть уравнение прогноза  $\hat{\lambda}_v$  по априорным данным. При этом фильтр Калмана вырождается в фильтр, который обведён на рис. 8.2 штриховой линией. Это есть формирующий фильтр (ФФ) для передаваемого сообщения  $\lambda(t)$ . Следовательно, априорные сведения о сообщении "заложены в конструкцию" оптимального фильтра.

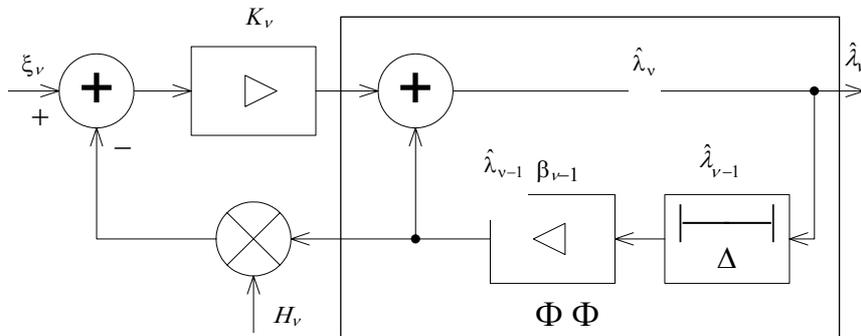


Рис. 8.2. Дискретный фильтр Калмана

На входе дискретного фильтра Калмана из принимаемого колебания  $\xi_v$  вычитается его предсказуемая часть  $H_v \beta_{v-1} \hat{\lambda}_{v-1}$ . Из этой разности с весовым коэффициентом  $K_v$  и из априорных сведений  $\beta_{v-1} \hat{\lambda}_{v-1}$  формируется оптимальная оценка  $\hat{\lambda}_v$ . Процедура образования оценки является рекуррентной (т.е. повторяющейся), очень удобной для реализации на ЭВМ.

### 8.3. ОСОБЕННОСТИ МНОГОМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СООБЩЕНИЙ

Приведённые результаты линейной фильтрации можно обобщить на многомерный случай. При этом априорные сведения о передаваемых сообщениях задаются системой стохастических дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \lambda_j + n_{\lambda_i}(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (8.10)$$

Эти уравнения удобно записать в виде одного векторно-матричного уравнения

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{n}_\lambda(t), \quad (8.11)$$

где  $\boldsymbol{\lambda}$  – вектор-столбец сообщения размерности  $n$ , который для удобства можно записать в виде транспонированной вектор-строки:  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$ ;  $\mathbf{A}(t)$  –  $n \times n$  матрица коэффициентов системы уравнений (8.10);  $\mathbf{n}_\lambda(t) = [n_{\lambda 1}, \dots, n_{\lambda n}]^T$  – вектор-столбец формирующих белых шумов с нулевыми математическими ожиданиями и матричной корреляционной функцией  $\langle \mathbf{n}_\lambda(t) \mathbf{n}_\lambda^T(t + \tau) \rangle = \mathbf{N}_\lambda(t) \delta(\tau)$ ;  $\mathbf{N}_\lambda(t)$  – симметрическая  $n \times n$  матрица делённых пополам спектральных плотностей.

Наблюдаемое колебание записывается в виде

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{H}(t)\boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{n}(t),$$

где  $\boldsymbol{\xi}(t)$  – вектор-столбец наблюдений размерности  $m$  ( $m$  – число каналов наблюдения);  $\mathbf{H}(t)$  – матрица наблюдений размерности  $m \times n$ ;  $\mathbf{n}(t)$  – вектор-столбец аддитивных белых шумов размерности  $m$  с характеристиками:

$$\langle \mathbf{n}(t) \rangle = 0; \quad \langle \mathbf{n}(t) \mathbf{n}^T(t + \tau) \rangle = \mathbf{N}_0(t) \delta(\tau),$$

$\mathbf{N}_0(t)$  – симметрическая  $m \times m$  матрица спектральных плотностей, делённых пополам.

Уравнения оптимальной многомерной линейной фильтрации имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\boldsymbol{\lambda}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{R}\mathbf{H}^T \mathbf{N}_0^{-1} (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\lambda}}); & (8.12) \\ \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A}^T - \mathbf{R}\mathbf{H}^T \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{H}\mathbf{R} + \mathbf{N}_\lambda, & (8.13) \end{cases}$$

где  $\mathbf{R}$  – корреляционная матрица ошибок фильтрации.

## ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Информация, сообщение, сигнал.
2. Общая модель радиотехнической системы.
3. Назначение и классификация радиотехнических систем.
4. Классификация радиотехнических сигналов и помех.
5. Случайные процессы и способы их описания.
6. Стационарные и нестационарные случайные процессы.
7. Эргодическое свойство стационарных случайных процессов.
8. Корреляционная функция стационарного процесса.
9. Спектральная плотность стационарного случайного процесса.
10. Узкополосные случайные процессы.
11. Основные статистические модели сигналов и помех.
12. Особенности анализа линейных систем при случайных воздействиях.
13. Вычисление математического ожидания и корреляционной функции случайного процесса на выходе линейной системы.
14. Вычисление спектральной плотности случайного процесса на выходе линейной системы.
15. Нормализация случайных процессов в узкополосных линейных системах
16. Помехоустойчивость и её основные задачи.
17. Функция правдоподобия при дискретном и непрерывном наблюдениях.
18. Корреляционный приём.
19. Оптимальный линейный фильтр по критерию минимума среднего квадрата ошибки.
20. Импульсная характеристика и отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра.
21. Комплексная частотная характеристика согласованного фильтра.
22. Согласованный фильтр как коррелятор.
23. Ошибки при обнаружении сигналов.
24. Критерии оптимального обнаружения и различения сигналов.
25. Обнаружение детерминированного сигнала на фоне гауссовского белого шума. Структурные схемы оптимальных обнаружителей.
26. Показатели качества обнаружения.
27. Постановка задачи на обнаружение сигнала со случайной начальной фазой на фоне гауссовского белого шума. Структурные схемы оптимальных обнаружителей.
28. Постановка задачи на обнаружения сигнала со случайными начальной фазой и амплитудой на фоне гауссовского белого шума. Структурные схемы оптимальных обнаружителей.
29. Различение двух детерминированных сигналов на фоне гауссовского белого шума. Структурные схемы оптимальных различителей.
30. Условные плотности вероятности достаточной статистики при различении детерминированных сигналов.
31. Потенциальная помехоустойчивость оптимальных различителей при различных видах манипуляции.
32. Точечная оценка. Основные требования к точечной оценке.
33. Основные методы оценки параметров сигнала.
34. Оценка энергетических параметров. Структурные схемы оптимальных измерителей амплитуды сигнала.
35. Оценка неэнергетических параметров. Структурные схемы оптимальных измерителей неэнергетических параметров сигнала.
36. Сигнальная и шумовая функции. Дисперсия правдоподобной оценки параметра сигнала.
37. Постановка задачи оптимальной фильтрации.
38. Критерии оптимальной фильтрации.
39. Получение сообщения из белого шума с помощью формирующего фильтра.
40. Оптимальная линейная аналоговая фильтрация сообщений. Фильтр Калмана.
41. Линейная фильтрация сообщений в дискретном времени.
42. Энтропия как среднее количество информации.
43. Энтропия дискретного сообщения.
44. Энтропия непрерывного сообщения.
45. Энтропия равномерного и гауссовского сообщений.
46. Производительность источника сообщения.
47. Информация на выходе канала связи.
48. Скорость передачи информации и пропускная способность цифрового канала связи.
49. Пропускная способность непрерывного канала связи.
50. Избыточность сообщений и её роль.
51. Кодирование сообщений в системах связи.
52. Теоремы кодирования для каналов без помех и с помехами.
53. Классификация кодов.
54. Основные характеристики помехоустойчивых кодов.

## ЗАДАЧИ

1. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку 5 м и среднеквадратическую ошибку  $\sigma$ . Вероятность того, что ошибка измерения, распределенная по гауссовскому закону, не превзойдет по абсолютной величине 5 м, равна 0,2. Определить среднеквадратическую ошибку  $\sigma$ .

2. Определить математическое ожидание и дисперсию случайного процесса, одномерная плотность вероятности которого равномерна в интервале от 0 до  $A$ .

3. На вход интегрирующей  $RC$  цепи поступает белый шум с физической спектральной плотностью  $N_0$ . Найти корреляционную функцию на выходе цепи.

4. На вход интегрирующей  $RC$  цепи поступает белый шум с физической спектральной плотностью  $N_0$ . Найти спектральную плотность на выходе цепи.

5. На вход интегрирующей  $LR$  цепи поступает белый шум с физической спектральной плотностью  $N_0$ . Найти дисперсию на выходе цепи.

6. Получить выражение комплексной частотной характеристики согласованного линейного фильтра для одиночного видеоимпульса с длительностью  $\tau_n = 1$  мкс,  $0 \leq t \leq \tau_n$ . Используя полученное выражение как алгоритм, построить структурную схему фильтра. Полагать время наблюдения  $T = \tau_n$ . Построить также график сигнала на выходе согласованного фильтра.

7. Получить выражение комплексной частотной характеристики согласованного линейного фильтра для пачки из двух видеоимпульсов с длительностью  $\tau_n = 1,5$  мкс и периодом повторения  $\tau = 5$  мкс,  $0 \leq t \leq \tau + \tau_n$ . Используя полученное выражение как алгоритм, построить структурную схему фильтра. Время наблюдения  $T = \tau + \tau_n$ . Построить также график сигнала на выходе согласованного фильтра.

8. Комплексная частотная характеристика согласованного линейного фильтра имеет вид

$$K_0(j\omega) = \frac{kU_m}{j\omega} \left(1 - e^{-j\omega\tau_n}\right) \left(1 + e^{-j\omega\tau} + e^{-j\omega 2\tau}\right).$$

Изобразить графически сигнал, с которым согласован данный фильтр. Чему равно время наблюдения?

9. На вход оптимального приёмника поступает сигнал и гауссовский белый шум. Вероятность правильного обнаружения сигнала  $P_{по} = 0,95$ ;  $q = 3$ . Определить величину порога  $h$  и вероятность ложной тревоги  $P_{лт}$ .

10. Какова вероятность правильного обнаружения и вероятность ложной тревоги оптимального обнаружителя, если он работает при отношении сигнала/шум  $q = 4$  и настроен на порог  $h = 5,12$ ?

11. Найти отношение сигнал/шум для оптимального обнаружителя, который производит правильное необнаружение с вероятностью 0,9 при вероятности пропуска цели 0,1.

12. На входе оптимального обнаружителя действует аддитивная смесь радиосигнала  $s(t) = U_m \cos(\pi t)$  с амплитудой  $U_m = 2$  мкВ и длительностью  $\tau_n = 0,2$  мс и белого гауссовского шума со спектральной плотностью  $N_0 = 10^{-16}$  В<sup>2</sup>/Гц либо только один шум. Рассчитать числовые характеристики достаточной статистики  $y$  и построить графики  $p_n(y)$  и  $p_{sn}(y)$ .

13. На входе оптимального обнаружителя по критерию Неймана-Пирсона действует аддитивная смесь видеосигнала  $s(t)$  с амплитудой  $U_m = 1,5$  мкВ и длительностью  $\tau_n = 0,2$  мс и белого гауссовского шума со спектральной плотностью  $N_0 = 10^{-16}$  В<sup>2</sup>/Гц либо только один шум. Рассчитать отношение сигнал/шум  $q$ , порог  $h$  и вероятность правильного обнаружения  $P_{по}$ , если вероятность ложной тревоги  $P_{лт} = 0,08$ .

14. Рассчитать числовые характеристики достаточной статистики  $y$  и построить графики  $p_{sn1}(y)$  и  $p_{sn2}(y)$  оптимального различителя по критерию идеального наблюдателя в двоичной системе связи. Различение проводится на фоне гауссовского белого шума с  $N_0 = 10^{-10}$  В<sup>2</sup>·с, а сигналами являются ЧМ-радиоимпульсы с одинаковыми амплитудами  $U_m = 2$  мВ и длительностями  $\tau_n = 0,4$  мс. Появление сигналов «1» и «0» – равновероятно.

15. Рассчитать отношение сигнал/шум  $q$ , порог  $h$  и вероятность ошибки  $P_{ош}$  оптимального различителя по критерию идеального наблюдателя в двоичной системе связи. Различение проводится на фоне гауссовского белого шума с  $N_0 = 10^{-10}$  В<sup>2</sup>·с, а сигналами являются ФМ<sub>n</sub>- радиоимпульсы с одинаковыми амплитудами  $U_m = 2$  мВ и длительностями  $\tau_n = 0,1$  мс. Появление сигналов «1» и «0» – равновероятно.

16. Рассчитать числовые характеристики достаточной статистики  $y$  и построить графики  $p_{sn1}(y)$  и  $p_{sn2}(y)$  для оптимального различителя по критерию идеального наблюдателя в двоичной системе связи. Различение проводится на фоне гауссовского белого шума с  $N_0 = 10^{-10}$  В<sup>2</sup>·с, а сигналами являются ФМ<sub>n</sub>-радиоимпульсы с одинаковыми амплитудами  $U_m = 2$  мВ и длительностями  $\tau_n = 0,4$  мс. Появление сигналов «1» и «0» – равновероятно.

17. На вход оптимального измерителя поступает аддитивная смесь гауссовского белого шума со спектральной плотностью  $N_0/2$  и детерминированного радиоимпульса

$$s(t, \varphi) = a \sin(\omega t + \varphi), \quad 0 \leq t \leq \tau_n,$$

где  $a$  и  $\omega$  – соответственно амплитуда и частота радиоимпульса;  $\tau_n$  – длительность радио импульса;  $\lambda = \varphi$  – начальная фаза радиосигнала, подлежащая оценке. Определить дисперсию оценки начальной фазы радиоимпульса.

18. Уравнения наблюдения и сообщения в непрерывном времени имеют вид

$$\xi(t) = \lambda(t) + n(t);$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\alpha\lambda(t) + n_\lambda(t).$$

Записать уравнения фильтрации и построить структурную схему фильтра.

19. Уравнения наблюдения и сообщения в дискретном времени имеют вид

$$\xi_v = H_v \lambda_v + n_v; \quad \lambda_v = \lambda_{v-1} + n_{\lambda v}.$$

Записать уравнения фильтрации и построить структурную схему фильтра.

20. Уравнения наблюдения и сообщения в непрерывном времени имеют вид

$$\xi(t) = \lambda(t) + n(t);$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\alpha\lambda(t).$$

Записать уравнения фильтрации и построить структурную схему фильтра.

21. Уравнения наблюдения и сообщения в дискретном времени имеют вид

$$\xi_v = H_v \lambda_v + n_v; \quad \lambda_v = \lambda_{v-1}.$$

Записать уравнения фильтрации и построить структурную схему фильтра.

22. Уравнение телеметрического сообщения имеет вид

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\alpha\lambda(t) + n_\lambda(t).$$

Построить структурную схему формирующего фильтра.

23. Известно, что энтропия русского текста составляет приблизительно  $0,5H_{\max}$ , где  $H_{\max}$  – максимальная энтропия. Какое количество информации получит читатель, прочтя произвольное слово из 8 букв?

24. Определить пропускную способность двоичного симметричного канала связи с полосой пропускания  $F = 8$  кГц и вероятностью ошибочного приема символа из-за помех  $P_e = 0,3$ .

25. Определить максимально возможную скорость передачи информации по каналу управления телеуправляемой ракетой, если его полоса пропускания равна 3 кГц, а отношение сигнал/шум по мощности в полосе канала равно 3.

26. Пропускная способность непрерывного радиоканала с полосой  $F = 10$  кГц равна 20 000 бит/с. Определить спектральную плотность белого шума, действующего в канале, если мощность передаваемого сигнала равна 1 Вт.

27. Самолет с равной вероятностью может находиться в одной из 520 зон. Какое количество информации будет получено при обнаружении самолёта в одной из зон, если вероятность правильного обнаружения равна 0,9846.

28. Определить энтропию сообщения, обладающего равномерным законом распределения на интервале  $[a, b]$ .

29. Первичный непрерывный сигнал путем дискретизации во времени и квантования по уровню превращается в импульсную последовательность с числом уровней  $K = 256$ . Каждый уровень квантованного сигнала кодируется 10-разрядным двоичным кодом. Чему равна избыточность и относительная скорость кода? Как изменяется избыточность и относительная скорость кода, если число разрядов в кодовой комбинации уменьшить на 2?

30. Сообщения источника, имеющего алфавит с объемом  $K = 32$ , кодируется двоичным блочным кодом. Число разрядов в каждой кодовой комбинации  $n = 8$ . Какое число информационных и проверочных символов содержится в каждой кодовой комбинации? Сколько разрешённых и запрещённых комбинаций в используемом коде?

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В настоящее время наблюдается повсеместный переход от аналоговых к цифровым способам передачи информации и цифровым методам обработки сигналов, при этом происходит всё большая интеграция радиотехнических устройств и информационно-вычислительных систем. Современная радиотехника и теория связи тесно связаны с применением компьютерных и информационных технологий для решения задач анализа и синтеза радиотехнических систем, работающих в условиях помех.

В учебном пособии рассмотрены современные методы решения задач оптимального радиоприёма. Изучены вопросы анализа помехоустойчивости и оптимального приёма сообщений, в том числе основы теории обнаружения, различения, оценки и фильтрации сигналов в радиотехнических системах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы / С.И. Баскаков. – М. : Высшая школа, 2000. – 462 с.
2. Нефедов, В.И. Основы радиоэлектроники и связи / В.И. Нефедов. – М. : Высшая школа, 2005. – 506 с.
3. Каганов, В.И. Основы радиоэлектроники и связи / В.И. Каганов, В.К. Битюгов. – М. : Горячая линия–Телеком, 2006. – 542 с.
4. Информационные технологии в радиотехнических системах : учебное пособие / В.А. Васин, И.Б. Власов, Ю.М. Егоров и др. ; под ред. И.Б. Федорова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 766 с.
5. Перов, А.И. Статистическая теория радиотехнических систем : учебное пособие / А.И. Перов. – М. : Радиотехника, 2003. – 400 с.
6. Радиотехнические цепи и сигналы. Задачи и задания / под ред. А.Н. Яковлева. – М. : ИНФРА–М, 2003. – 348 с.