Н.П. ПУЧКОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть вторая

Издательство ТГТУ

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

Н.П. ПУЧКОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть вторая

Утверждено Ученым советом университета в качестве
учебного пособия для студентов I курса
специальностей 080111, 080301, 080502, 080507

Тамбов
Издательство ТГТУ
2007

УДК 51(075)
ББК В11я73-2
П909

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук,
профессор ТГУ им. Г.Р. Державина

А.И. Булгаков

Доктор педагогических наук, профессор ТГТУ

Е.А. Ракитина

Пучков, Н.П.

П909 Высшая математика : учебное пособие / Н.П. Пучков. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – Ч. 2. – 68 с. – 150 экз. –
ISBN 978-5-8265-0671-4.

Представлены конспекты лекций и задачи по курсу «Высшая математика», содержащие основные понятия дифференциального исчисления функции нескольких переменных, интегрального исчисления, теории дифференциальных уравнений, теории рядов и теории вероятностей.

Предназначено студентам экономических специальностей, изучающих курс «Высшая математика» во втором семестре.

УДК 51(075)
ББК В11я73-2

ISBN 978-5-8265-0671-4

Учебное издание

ПУЧКОВ Николай Петрович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть вторая

Учебное пособие

Редактор Е.С. М о р д а с о в а
Компьютерное макетирование Е.В. К о р а б л е в о й

Подписано в печать 27.12.07.
Формат 60 × 84/16. 3,95 усл. печ. л. Тираж 150 экз. Заказ № 844

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ЛЕКЦИЯ 1

Функции нескольких переменных. Основные понятия: предел, непрерывность, частные производные, дифференциалы

Определение 1.1. Если каждой точке $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ множества D n-мерного пространства по некоторому закону поставлено в соответствие определенное действительное число z, то говорят, что на множестве D определена функция $z(M)$ точки M или функция от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$: $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Множество D называется областью определения (существования) функции.

В частном случае, при $n = 2$.

Определение 1.2. Если каждой точке $M(x, y)$ множества D плоскости OXY соответствует определенное действительное число z, то говорят, что на множестве D определена функция двух независимых переменных x и y: $z = f(x, y), \quad z = f(M)$.

С понятием функции двух переменных мы встречаемся: в геометрии – если x – ширина, y – длина прямоугольника, то $z = f(x, y) = xy$ – его площадь, $z = \varphi(x, y) = 2(x + y)$ – его периметр; в экономике – если K – производственные фонды, L – трудозатраты, то $Y = f(K, L)$ – двухфакторная производственная функция.

Как и функцию одной переменной $z = f(x, y)$ можно задать в виде таблицы, графика, аналитически, описательно (словесно). Графиком функции двух переменных является поверхность в пространстве как множество точек координатного пространства (x, y, z). Например, $z = ax + by + c$ – плоскость, $z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения.

Определение 1.3. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ *, кроме, может быть, самой точки M_0. Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, зависящее только от ε, что для всех точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют условию $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$, выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$:

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y).$$

Основные свойства пределов функции одной переменной сохраняются и для пределов функции многих переменных.

Определение 1.4. Пусть $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D плоскости XOY и $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ принадлежат этой области. Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, то $f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Определение 1.5. Полным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется разность значений этой функции в точках $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ и M_0.

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

где Δx и Δy – приращения аргументов.

Условие непрерывности в точке M_0 теперь можно определить в виде $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$.

П р и м е р 1.1. $z = x^2 y$, тогда, выбрав точки $M(x, y)$ и $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$, принадлежавшие области определения функции z, имеем:

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y) - x^2 y = x^2 y + 2x\Delta x y + \Delta x^2 y + 2x\Delta x\Delta y + \Delta x^2 \Delta y +$$
$$+ x^2 \Delta y - x^2 y = 2xy\Delta x + x^2 \Delta y + y\Delta x^2 + 2x\Delta x\Delta y + \Delta x^2 \Delta y.$$

При $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ Δz всюду стремится к нулю, следовательно $z = x^2 y$ всюду непрерывна.

Определение 1.6. Частными приращениями $\Delta_x z$ и $\Delta_y z$ функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменной x и по переменной y называются

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0), \quad \Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Для функции $z = x^2 y$, рассмотренной в примере 1.1:

---

* Например, множество точек, удовлетворяющих условию

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2.$$

$$\Delta_x z = (x+\Delta x)^2 y - x^2 y = 2xy\Delta x + y\Delta x^2 \, ;$$

$$\Delta_y z = x^2(y+\Delta y) - x^2 y = x^2\Delta y \, .$$

Для рассмотренного примера $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$. Для линейной функции $z = ax + by + c$: $\Delta z = a\Delta x + b\Delta y = \Delta_x z + \Delta_y z$.

Определение 1.7. Частными производными $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называются пределы (если они существуют) $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left.\frac{\Delta_x z}{\Delta x}\right|_{M_0}$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \left.\frac{\Delta_y z}{\Delta y}\right|_{M_0}$.

Кроме указанных обозначений используются также z'_x и z'_y . Приведем пример нахождения частных производных. Пусть, по-прежнему, $z = x^2 y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2xy\Delta x + y\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (xy + y\Delta x) = 2xy \, ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2\Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} x^2 = x^2.$$

Справедливо следующее правило нахождения частных производных: в процессе нахождения частной производной по x переменная y предполагается постоянной; аналогично при нахождении частной производной по y переменная x предполагается постоянной (только в процессе!).

Пример 1.2. $z = x^2 y + y^3 - 5$.

$$z'_x = y(x^2)'_x + (y^3)'_x - (5)'_x = y2x + 0 \cdot 0 = 2xy;$$

$$z'_y = x^2(y)'_y + (y^3)'_y - (5)'_y = x^2 + 3y^2 - 0 = x^2 + 3y^2.$$

Определение 1.8. Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0)$, если существуют такие два числа A и B, что полное приращение функции $\Delta z = f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\, \Delta y)\Delta y,$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$ – бесконечно малые функции своих аргументов.

Определение 1.9. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то линейная функция $A\Delta x + B\Delta y$ (линейная, главная часть приращения Δz) называется полным дифференциалом, или просто дифференциалом этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ и обозначается $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Функция, дифференцируемая в точке M_0, непрерывна в этой точке.

Выражения $d_x z = A\Delta x$ и $d_y z = B\Delta y$ называются, соответственно, частными дифференциалами функции z по переменной x и по переменной y, при этом $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$.

Теорема 1.1. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, причем ее дифференциал равен $dz = A\Delta x + B\Delta y$, то в этой точке существуют частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y} = B \, .$$

Теорема 1.2. (условие дифференцируемости). Если функция $z = f(x, y)$ имеет в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, которые непрерывны в точке $M_0(x_0, y_0)$, то $z = f(x, y)$ дифференцируема в этой точке.

Теорема 1.3. Если $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то при малых Δx и Δy справедливо приближенное равенство $\Delta z \cong dz$, откуда $f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) \cong f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y$.

Эта формула дает алгоритм применения дифференциала в приближенных вычислениях.

Пример 1.3. Вычислить приближенно $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}97)^2}$. Искомое число будем рассматривать как значение функции $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, если $x_0 = 4,\ y_0 = 3,\ \Delta x = 0{,}05,\ \Delta y = -0{,}03$. Имеем: $f(4{,}3) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$; $df(x,y) = \dfrac{x\Delta x + y\Delta y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$: $df(4{,}3) = 0{,}022$.

Следовательно, $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}97)^2} \cong 5 + 0{,}022 = 5{,}022.$

Лекция 2

Функции двух переменных. Дифференцирование сложных и неявно заданных функций. Производная по направлению, градиент. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемы в точке t_0, а функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$. Тогда сложная функция от t $z = F(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ определена в некоторой окрестности точки t_0 и имеет в этой точке производную

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{2.1}$$

Если функция y неявно зависит от x, и задана уравнением

$$F(x,y) = 0, \tag{2.2}$$

где $y = y(x)$, то, используя правило (2.1) продифференцируем равенство (2.2) по x: $\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{dx}{dx} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0$, откуда $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}$, если $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} \neq 0$.

Если $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ дифференцируемы в точке $N_0(u_0, v_0)$, а $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, то имеют место частные производные сложной функции $z = F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$; $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$; $\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}$.

Если функция z неявно зависит от x и от y и задана уравнением $F(x,y,z) = 0$, то его дифференцирование по x и по y:

$$F'_x\, x'_x + F'_y\, y'_x + F'_z\, z'_x = 0 \quad \text{и} \quad F'_x\, x'_y + F'_y\, y'_y + F'_z\, z'_y = 0.$$

Учитывая, что $y'_x = 0$ и $x'_y = 0$, то

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}};\quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}}.$$

Пример 2.1. Найти частные производные функции z, заданной уравнением $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2x + 3 = 0$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3xy} = -\frac{x^2 - yz}{z^2 - xy};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{6y^2 - 3xz - 2}{3z^2 - 3xy}.$$

Производная по направлению.

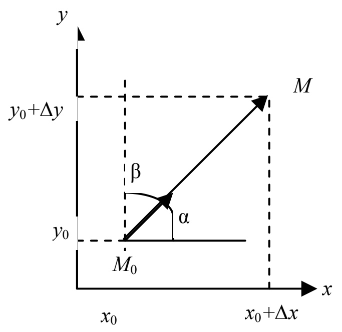


Рис. 2.1

Пусть на плоскости XOY (рис. 2.1) заданы точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Обозначим через α и β углы, которые вектор $\overline{S}=\overline{M_0M}$ образует с положительными направлениями координатных осей $(\alpha+\beta=\pi/2)$. Тогда $\overrightarrow{n_0}=\dfrac{\vec{S}}{|\vec{S}|}=\{\cos\alpha, \cos\beta\}$ – единичный вектор, задающий направление от точки M_0 к M. Приращение $\Delta z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y$ (см. определение 1.8).

Обозначим расстояние $\left|\overrightarrow{M_0M}\right|=\Delta S=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. Очевидно, что при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$ $\Delta S\to 0$; справедливо и обратное.

Имеем $\dfrac{\Delta z}{\Delta S}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\Delta x}{\Delta S}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\Delta y}{\Delta S}+\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\dfrac{\Delta x}{\Delta S}+\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\dfrac{\Delta y}{\Delta S}$.

Так как $\dfrac{\Delta x}{\Delta S}=\cos\alpha;\ \dfrac{\Delta y}{\Delta S}=\cos\beta$ и $\lim\limits_{\Delta S\to 0}\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)=\lim\limits_{\Delta S\to 0}\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)=0$, то $\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta S}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$.

$\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta S}$ называют производной функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ в направлении вектора $\vec{S}$ и обозначают $\dfrac{\partial z}{\partial \overline{S}}$.

Выражение $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$ можно представить как результат скалярного произведения векторов с координатами $\left\{\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}\right\}$ и $\overline{n_0}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$.

Определение 2.1. Градиентом функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ называется вектор с координатами $\dfrac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y}$. Этот вектор обозначается так: $\overline{\operatorname{grad}}\, z(x_0,y_0)$.

Таким образом: $\dfrac{\partial z}{\partial \overline{S}}=\left(\overline{\operatorname{grad}}\, z,\overline{n_0}\right)=\left|\overline{\operatorname{grad}}\, z\right|\left|\overline{n_0}\right|\cos\left(\overline{\operatorname{grad}}\,\hat{z},\overline{n_0}\right)$. Если направление $\overline{\operatorname{grad}}\, z$ совпадает с $\overline{n_0}$, то $\dfrac{\partial z}{\partial \overline{S}}=\left|\overline{\operatorname{grad}}\, z\right|$ максимальное значение производной по направлению.

Таким образом, если в точке $M_0(x_0,y_0)$ градиент функции существует, то он указывает направление максимального изменения функции.

Определение 2.2. Частными производными второго порядка функции $z=f(x,y)$ называются соответствующие частные производные от частных производных. Это $\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right),\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right),\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right),\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$. Частные производные $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ и $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ называются повторными производными функции $z=f(x,y)$ по переменным x и y соответственно; частные производные $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ и $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ называются смешанными частными производными второго порядка.

Частные производные второго порядка обозначают так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=f''_{xx}(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{xy}=f''_{xy}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{yx}=f''_{yx}(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{yy}(x,y).$$

Аналогичным образом можно определить производные третьего (и более высокого) порядка.

Существует доказательство утверждения, что если $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$ непрерывны в некоторой точке $M_0(x_0,y_0)$, то они равны в этой точке.

Если $dz = f'_x dx + f'_y dy$ дифференциал первого порядка функции $z = f(x, y)$, то $d(dz) = d^2 z$ – дифференциал второго порядка.

Очевидно, что $d^2 z = d(dz) = (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy =$

$= f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2$.

Аналогично определяются дифференциалы более высоких порядков.

П р и м е р 2.2. Найти производную функции $z = x^2 + 2xy - y$ в точке $M_0(2,1)$ в направлении к точке $M(6,4)$. Чему равен модуль градиента функции z в точке M_0?

Имеем: направляющий вектор $\bar{s} = \overline{M_0 M} = 4i + 3j, |\bar{s}| = 5;$ $\cos\alpha = 0{,}8; \cos\beta = 0{,}6.$ $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = (2x + 2y)\big|_{M_0} = 6;$

$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = (2x - 1)\big|_{M_0} = 3.$ $\frac{\partial z}{\partial \bar{s}} = 6 \cdot 0{,}8 + 3 \cdot 0{,}6 = 6{,}6$. $\left|\overline{grad\, z}\right|\Big|_{M_0} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

П р и м е р 2.3. Доказать, что если $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, то

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Имеем: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + y^2/x^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Таким образом $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$.

ЛЕКЦИЯ 3

Экстремумы функции двух переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточное условие экстремума. Задачи на наибольшее и наименьшее значение функции. Условный экстремум ФДП

1. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

Определение 3.1. Точка M_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(x, y)$, если существует такая окрестность точки M_0, в которой для любой точки $M(x, y)$ выполняется неравенство $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ $\left(f(x, y) > f(x_0, y_0)\right)$.

Точки локального максимума и локального минимума называются точками локального экстремума (или просто точками экстремума).

Согласно такому определению локального экстремума полное приращение функции $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ удовлетворяет одному из условий в окрестности точки M_0:

$\Delta z < 0$, если M_0 – точка локального максимума;

$\Delta z > 0$, если M_0 – точка локального минимума.

Пример 3.1. $z = x^2 + y^2$, очевидно, что $z \ge 0$ и $z = 0$ в точке $M_0(0,0)$. В то же время $\Delta z = (x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta y)^2 - x_0^2 - y_0^2 =$
$= (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 + (y_0 + \Delta y)^2 - y_0^2 = \Delta x(2x_0 + \Delta x) + \Delta y(2x_0 + \Delta y)$.

Если $x_0 = y_0 = 0$, то $\Delta z = \Delta x^2 + \Delta y^2 > 0$; считаем $\Delta x > 0$ и $\Delta y > 0$.

Таким образом, $M_0(0,0)$ – точка локального минимума.

Пример 3.2. $z = 1 - (x-1)^2 - (y+2)^2$. Очевидно, что в точке $M_0(1,-2)$ $z = 1$ – максимальное значение функции.

$$\Delta z = \left[1 - (x_0 + \Delta x - 1)^2 - (y_0 + \Delta y + 2)^2\right] - \left[1 - (x_0 - 1)^2 - (y_0 + 2)^2\right].$$

При $x_0 = 1$, $y_0 = -2$:

$$\Delta z = \left(1 - \Delta x^2 - \Delta y^2\right) - 1 = -\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right) < 0 .$$

2. Необходимые условия существования локального экстремума.

Теорема 3.1. Если функция $f(x, y)$ имеет частные производные первого порядка в точке локального экстремума $M_0(x_0, y_0)$, то $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$.

Итак, «подозрительными» на экстремум являются те точки M_0, в которых все частные производные первого порядка равны нулю и $\overline{\text{grad}} f(M_0) = 0$.

Как и в случае функции одной переменной, такие точки называются стационарными; для функции $f(x, y)$ их можно найти, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0; \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Возвратимся к примерам 3.1 и 3.2. Пусть $z = x^2 + y^2$, тогда $z'_x = 2x;\quad z'_y = 2y$. Имеем $\begin{cases} 2x = 0; \\ 2y = 0, \end{cases}$ следовательно (0, 0) – стационарная точка.

2. Если $z = 1 - (x-1)^2 - (y+2)^2$, то $z'_x = -2\cdot(x-1),\quad z'_y = -2\cdot(y+2)$. Имеем $\begin{cases} -2\cdot(x-1) = 0; \\ -2\cdot(y+2) = 0, \end{cases}$ следовательно, $(1, -2)$ – стационарная точка.

Пример 3.3. Найти стационарные точки функции

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y .$$

Имеем систему $\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0; \\ z'_y = 6xy - 12 = 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5; \\ xy = 2. \end{cases}$ Решив систему, найдем стационарные точки: $M_1(2, 1);\ M_2(1, 2);\ M_3(-2, -1);\quad M_4(-1, -2)$.

Условия теоремы 3.1 не являются достаточными условиями су-ществования экстремума. Например, для функции $z = xy$ частные производные $z'_x = y$, $z'_y = x$ равны нулю в точке (0, 0). Однако $\Delta z = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - x_0 y_0 = x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y$. В точке (0, 0) $\Delta z = \Delta x \Delta y$. Если Δx и Δy имеют одинаковые знаки, то $\Delta z > 0$, если различные, то $\Delta z < 0$. Поэтому (0, 0) не может быть точкой экстремума.

3. Достаточные условия экстремума.

Теорема 3.2. Пусть функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности стационарной точки $M_0(x_0, y_0)$. Положим $\Delta = f''_{xx}(M_0) f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2$. Тогда:

1) Если $\Delta > 0$, то в точке M_0 функция имеет локальный экстремум, причем при $f''_{xx}(M_0) > 0$ – локальный минимум; при $f''_{xx}(M_0) < 0$ – локальный максимум.

2) Если $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет.

3) Если $\Delta = 0$, то требуются дополнительные исследования.

Если обозначить: $A = f''_{xx}(M_0)$, $B = f''_{xy}(M_0)$, $C = f''_{yy}(M_0)$, тогда $\Delta = AC - B^2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$.

Исследуем функции, рассмотренные в примерах 3.1 – 3.3.

1. $z = x^2 + y^2$, (0, 0) – стационарная точка.

Имеем : $z'_x = 2x$, $z''_{xx} = 2$; $z''_{xy} = 0$; $z'_y = 2y$, $z''_{yy} = 2$.

$\Delta = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0$ в любой точке, как и в (0, 0). Так как $\Delta > 0$, то экстремум есть; $z''_{xx} = 2 > 0$. Следовательно $M_0(0, 0)$ – точка минимума.

2. $z = 1 - (x-1)^2 - (y+2)^2$; стационарная точка (1, –2);

$z'_x = -2 \cdot (x-1)$; $z''_{xx} = 0$, $z''_{xy} = 0$; $z'_y = -2 \cdot (y+2)$; $z''_{yy} = -2$.

$\Delta = (-2) \cdot (-2) - 0^2 = 4 > 0$; $z''_{xx} < 0$, (1,–2) – точка максимума.

3. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, стационарные точки $M_1(2, 1)$, $M_2(1, 2)$, $M_3(-2, -1)$, $M_4(-1, -2)$.

$z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15$; $z''_{xx} = 6x$; $z''_{xy} = 6y$;

$z'_y = 6xy - 12$; $z''_{xy} = 6x$.

- В точке $M_1(2, 1)$: $A = 12; B = 6; C = 12$, $\Delta = 144 - 36 = 108 > 0$. Так как $A > 0$, то $M_1(2, 1)$ – точка минимума.
- В точке $M_2(1, 2)$: $A = 6; B = 12; C = 6$, $\Delta = 36 - 144 < 0$, экстремума нет.
- В точке $M_3(-2, -1)$: $A = -12; B = -6; C = -12$, $\Delta = 108 > 0$, так как $A < 0$, то $M_3(-2, -1)$ – точка максимума.
- В точке $M_4(-1, -2)$: $A = -6; B = -12; C = -6$, $\Delta = -108 < 0$, экстремума нет.

4. Задача на условный экстремум функции двух переменных: найти экстремум функции $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$. Условие $\varphi(x, y) = 0$ называют уравнением связи, так как оно связывает значения переменных x и y. Если бы x и y не были связаны, то задача решалась бы путем исследования стационарных точек функции $f(x, y)$. В данном случае точкам условного экстремума функции $f(x, y)$ соответствуют стационарные точки другой функции.

Теорема 3.3. (необходимое условие условного экстремума). Пусть функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ определены и имеют непрерывные частные производные в окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$. Тогда, если P_0 – *точка условного экстремума* функции $f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$, то найдется число λ для которой P_0 – стационарная точка функции

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y).$$

Функция L называется функцией Лагранжа, число λ – множителем Лагранжа.

Таким образом, координаты стационарных точек определяются при решении системы уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} L'_x = f'_x + \lambda \varphi'_x = 0; \\ L'_y = f'_y + \lambda \varphi'_y = 0; \\ \varphi(x, y) = 0. \end{array}\right\}$$

П р и м е р 3.4. Пусть $z = 2 - x^2 - y^2$; уравнение связи: $x + y - 1 = 0$. Имеем $L(x, y) = 2 - x^2 - y^2 + \lambda(x + y - 1)$.

$$\left.\begin{aligned} L'_x &= -2x + \lambda = 0; \\ L'_y &= -2y + \lambda = 0; \\ x + y - 1 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x &= \lambda/2; \\ y &= \lambda/2; \\ \lambda/2 + \lambda/2 &= 1. \end{aligned} \qquad \text{Следовательно:}$$

$$\lambda = 1, \quad x = 1/2,\ y = 1/2.$$

$P_0(1/2;\ 1/2)$ – стационарная точка функции L.

Достаточные условия условного экстремума связаны с изучением знака определителя

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(P_0) & \varphi'_y(P_0) \\ \varphi'_x(P_0) & L''_{xx}(P_0, \lambda_0) & L''_{xy}(P_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(P_0) & L''_{xy}(P_0, \lambda_0) & L''_{yy}(P_0, \lambda_0) \end{vmatrix},$$

где $P_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка функции L; λ_0 – соответствующее значение множителя Лагранжа.

Если $\Delta < 0$, то $f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ условный максимум; если $\Delta > 0$ – то условный минимум.

Для примера 3.4: $\varphi'_x(P_0) = 1$; $\varphi'_y(P_0) = 1$; $L''_{xx}(P_0) = -2$; $L''_{xy}(P_0) = 0$; $L''_{yy}(P_0) = -2$,

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Следовательно, $P_0(1/2;\ 1/2)$ – точка максимума функции $z = 2 - x^2 - y^2$ на прямой $x + y - 1 = 0,\ \ (z = 1{,}5)$.

5. Пусть $z = f(x, y)$ задана в замкнутой области *D*, ограниченной линией $l : \varphi(x, y) = 0$. Тогда наибольшее и наименьшее значения функции z в этой области находят путем сравнения значений этой функции в стационарных точках области D и стационарных точках функции Лагранжа: $L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$.

Примечание. Если уравнение связи разрешимо относительно переменной y: $\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow y = \varphi_1(x)$, то $z = f(x, \varphi_1(x)) = F(x)$ и стационарные точки f – стационарные точки функции одной переменной $F(x)$. В примере 3.4 $y = 1 - x$, тогда $z = 2 - x^2 - (1 - x)^2 = 2 - x^2 - 1 + 2x - x^2 = 1 + 2x - 2x^2$; $z' = 2 - 4x$, $z' = 0$ при $x = 1/2$. Из уравнения связи $y = 1 - 1/2 = 1/2$. Таким образом $P_0(1/2;\ 1/2)$ – стационарная точка.

Лекция 4

Основы интегрального исчисления.

Неопределенный интеграл и его свойства

В математике, часто возникает задача, обратная той, которая решалась в дифференциальном исчислении, а именно: дана функция $y = f(x)$, найти функцию $y = F(x)$ такую, что $F'(x) = f(x)$, т.е. по производной находят первоначальную функцию.

Определение 4.1. Дифференцируемая функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на заданном интервале (a,b), или в каждой точке x этого интервала, если $F'(x) = f(x)$.

Пример 4.1. Пусть $f(x) = \cos x$, тогда за первообразную можно взять $F(x) = \sin x$, поскольку $(\sin x)' = \cos x$.

Пример 4.2. Пусть $f(x) = x^2$, тогда можно положить $F(x) = \frac{x^3}{3}$, поскольку $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$.

Заметим, что в примере 4.1. мы могли вместо первообразной $\sin x$ взять, например, $F_1(x) = \sin x + 1$, или $F_2(x) = \sin x - 100$, поскольку $(\sin x + 1)' = \cos x$ и $(\sin x - 100)' = \cos x$.

Теорема 4.1. (Об общем виде первообразной). Если $F(x)$ первообразная для функции $y = f(x)$ на множестве X (например, на интервале (a,b)), то все первообразные для функции $f(x)$ имеют вид $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Доказательство. Дано: $F'(x) = f(x)$, тогда и $(F(x) + C)' = f(x)$. С другой стороны, если $F_1(x)$ также первообразная, то $(F_1(x))' = (F(x))' = f(x)$ и $[F_1(x) - F(x)]' = 0$. Таким образом $F_1(x) - F(x) = C$ или $F_1(x) = F(x) + C$.

Эта теорема позволяет ввести основное понятие интегрального исчисления.

Определение 4.2. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то выражение $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$.

Теорема 4.2. (Существования). Для всякой непрерывной функции существует неопределенный интеграл.

Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ обозначается так: $\int f(x)dx$ (читается «интеграл эф от икс дэ икс»). При этом символ $\int$ называется знаком неопределенного интеграла; $f(x)$ – подынтегральной функцией; $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, а процесс нахождения первообразной функции $F(x)$ называется интегрированием.

Таким образом, если $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$.

График первообразной $F(x)$ называется интегральной кривой. Неопределенный интеграл представляет собой множество всех интегральных кривых, каждая из которых сдвинута относительно графика функции $y = F(x)$ вверх или вниз в зависимости от знака постоянной C.

Интегрирование является операцией, обратной дифференцированию, поэтому, как всякая обратная операция, интегрирование – более сложное действие, чем дифференцирование.

Для того, чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, надо взять производную от полученного результата и убедиться, что получена подынтегральная функция. Например:

$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$, так как $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$, то интегрирование выполнено верно.

Учитывая это обстоятельство, можно составить Таблицу неопределенных интегралов.

1. $\int dx = x + C$;
2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1;$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1;$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C;$
9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C;$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C;$
11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C.$

Проверим, например, формулу (3). Действительно, при $x>0$ $\ln|x|=\ln x$ и $(\ln x)'=\frac{1}{x}$; при $x<0$ $\ln|x|=\ln(-x)$ и $(\ln(-x))'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$, что и требовалось доказать.

Проверим еще справедливость формулы (11). Правую часть представим в виде:

$$\frac{1}{2a}\left(\ln|x-a|-\ln|x+a|\right)+C$$

и после дифференцирования имеем

$$\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)=\frac{1}{2a}\ \frac{x+a-x+a}{x^2-a^2}=\frac{1}{x^2-a^2},$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

Интегралы, содержащиеся в этой таблице, принято называть табличными.

При решении задач интегрирования бывает удобно использовать следующие свойства неопределенного интеграла:

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x); \quad d\int f(x)dx=f(x)dx.$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, т.е.

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

3. Постоянный множитель можно вынести из под знака неопределенного интеграла, точнее, если $k\neq 0$, то

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx.$$

4. Неопределенный интеграл от суммы функции равен сумме интегралов от слагаемых, т.е.

$$\int\left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx$$

Пример 4.3. Найти $\int\frac{2+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}\,dx$.

Разделим почленно числитель на знаменатель и применим сначала свойства 3 и 4, а затем табличные интегралы (2) и (3).

$$\int\frac{2+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx=2\int x^{-\frac{3}{2}}dx+3\int x^{-\frac{5}{6}}dx+5\int\frac{dx}{x}=$$

$$=2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+3\frac{x^{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{6}}+\ln|x|+C=-\frac{4}{\sqrt{x}}+18\sqrt[6]{x}+\ln|x|+C.$$

Пример 4.4. Найти $\int\frac{dx}{x^4+x^2}$.

Сначала преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{1}{x^4+x^2}=\frac{x^2+1-x^2}{x^2(x^2+1)}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}.$$

Теперь запишем исходный интеграл как разность табличных интегралов (2) и (9) (при $a=1$)

$$\int \frac{dx}{x^4 + x^2} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \int x^{-2} dx - \mathrm{arctg} x = -\frac{1}{x} - \mathrm{arctg} x + C .$$

Пример 4.5. Найти $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

Используя формулу $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, представим данный интеграл в виде разности табличных интегралов (8) и (7):

$$\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\mathrm{ctg} x - \mathrm{tg} x + C .$$

Пример 4.6. Найти $\int \mathrm{tg}^2 x dx$.

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg} x - x + C .$$

Лекция 5

Неопределенный интеграл. Методы интегрирования

1. Интегрирование методом замены переменной.

Во многих случаях введение новой переменной позволяет упростить подынтегральное выражение и свести интеграл к линейной комбинации табличных. Такой метод носит название метода замены переменной. Он основан на следующей теореме.

Теорема 5.1. Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на промежутке T и X – множество ее значений, на котором определена функция $f(x)$. Тогда если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на X, то $F(\varphi(t))$ – первообразная для $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ на T, т.е.

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)}=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt,\quad t\in T, x\in X .$$

Пример 5.1. Найти $\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$.

Положим $x=t^2$ (чтобы избавиться от иррациональности), тогда $dx=2tdt$ и наш интеграл примет вид

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx\Big|_{x=t^2}=\int\frac{t}{1+t^2}2tdt=2\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt=2\cdot\left(\int dt-\int\frac{dt}{1+t^2}\right)=$$

$$=2\cdot(t-\mathrm{arctg}t)\Big|_{t=\sqrt{x}}+C=2\cdot(\sqrt{x}-\mathrm{arctg}\sqrt{x})+C.$$

Пример 5.2. Найти $\int\sqrt{4-x^2}dx$. Очевидно, что $|x|\le 2$. Положим $x=2\sin t,\ 0\le x\le\pi/2$, тогда $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\sqrt{\cos^2 t}=2\cos t$, а $dx=2\cos tdt$. Имеем

$$\int\sqrt{4-x^2}dx\Big|_{x=2\sin t}=\int 2\cos t\ 2\cos dt=$$

$$=2\int 2\cos^2 tdt=2\int(1+\cos 2t)dt=2t+\sin 2t+C .$$

Если $x=2\sin t$, то $t=\arcsin\frac{x}{2}$, а

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} .$$

Таким образом, $\int\sqrt{4-x^2}dx=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+C$.

Пример 5.3. Найти $\int\frac{dx}{(x-4)\ln^5(x-4)}$.

Положим $\ln(x-4)=t$, тогда $dt=\frac{1}{x-4}d(x-4)=\frac{dx}{x-4}$ и

$$\int\frac{dx}{(x-4)\ln^5(x-4)}=\int\frac{dt}{t^5}=\int t^{-5}dt=\frac{t^{-4}}{-4}+C=-\frac{1}{4t^4}+C=-\frac{1}{\ln^4(x-4)}+C .$$

2. Метод интегрирования по частям.

Этот метод основан на использовании формулы дифференцирования произведения двух функций $u=u(x)$ и $v=v(x)$

$$d(uv)=udv+vdu .$$

Тогда $\int d(uv)=\int udv+\int vdu$ или $uv=\int udv+\int vdu$.

Теорема 5.2. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – две дифференцируемые функции на промежутке X. Тогда на X выполняется формула интегрирования по частям: $\int udv=uv-\int vdu$.

Эта формула позволяет свести нахождение неопределенного интеграла $\int udv$ к неопределенному интегралу $\int vdu$, который может оказаться более простым.

Пример 5.4. Найти $\int \ln xdx$.

Обозначим $\ln x = u,\ dv = dx$, тогда $du = \dfrac{dx}{x},\ v = x$ и

$$\int \ln xdx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C .$$

Пример 5.5. Найти $\int (x+5)\cos xdx$.

Обозначим $x+5 = u,\ \cos xdx = dv$, тогда $du = dx,\ v = \int \cos xdx = \sin x$. (Достаточно одной первообразной).

$$\int (x+5)\cos xdx = (x+5)\sin x - \int \sin xdx = (x+5)\sin x + \cos x + C .$$

Следует отметить, что успех применения формулы интегрирования по частям существенно зависит от способа разбиения подынтегрального выражения $f(x)dx$ на произведение $u \cdot dv$.

Пример 5.6. Найти $\int x\cos xdx$.

Обозначим $u = \cos x,\ dv = xdx$, тогда $du = -\sin xdx,\ v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2}$. Тогда $\int x\cos xdx = \dfrac{x^2}{2}\cos x - \int \dfrac{x^2}{2}(-\sin x)dx$.

Очевидно, что новый интеграл «сложнее» исходного. В то же время, если обозначить $u = x,\ du = \cos xdx$, то (см. пример 5.5) результат будет иным.

В математике разработаны приемы интегрирования некоторых конкретных классов функции.

3. Интегрирование рациональных функций.

Обозначим $R(x)$ – рациональную функцию, т.е. функцию, которую можно записать в виде отношения двух многочленов $R(x) = P(x)/Q(x)$.

Если эта дробь неправильная, т.е. степень многочлена $P(x)$ не меньше степени многочлена $Q(x)$, то можно выполнить деление с остатком и представить $R(x)$ в виде некоторого многочлена (целой части) и правильной дроби, числителем которой является остаток, например

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x}{x^2-4} .$$

В курсе алгебры доказывается

Теорема 5.3. Всякая правильная дробь может быть представлена в виде алгебраической суммы простейших дробей вида

$$\frac{A_1}{x-a};\ \frac{A_2}{(x-a)^n};\ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q};\ \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^m},$$

где $A_1, A_2, M_1, M_2, N_1, N_2, a, p, q$ – действительные числа; n и m – натуральные числа.

Рассмотрим некоторые частные примеры применения этой теоремы.

Пример 5.7. Найти $\int \dfrac{4xdx}{(x^2-1)(x+1)}$.

Подынтегральную функцию можно представить

$$\frac{4x}{(x^2-1)(x+1)} = \frac{4x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{x+1}.^*$$

Таким образом:

---

* Если знаменатель содержит кратные множители $(x+a)^k$, то такому множителю соответствует сумма k дробей $\dfrac{A_1}{x+a} + \dfrac{A_2}{(x+a)^2} + \ldots + \dfrac{A_k}{(x+a)^k}$.

$$\frac{4x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A_1x^2+2A_1x+A_1+A_2x-A_2+A_3x^2-A_3}{(x-1)(x+1)^2}.$$

Откуда $4x=(A_1+A_3)x^2+(2A_1+A_2)x+A_1-A_2-A_3$.

Это равенство справедливо при любых значениях x.

$$\text{При}\quad \left.\begin{array}{ll} x=0; & 0=A_1-A_2-A_3; \\ x=1; & 4=A_1+A_3+2A_1+A_2+A_1-A_2-A_3=4A_1; \\ x=-1; & -4=A_1+A_3-2A_1-A_2+A_1-A_2-A_3=-2A_2. \end{array}\right\}$$

Решая эту систему находим, что $A_1=1;\quad A_2=2;\quad A_3=-1$. Окончательно имеем:

$$\int\frac{4xdx}{(x^2-1)(x+1)}=\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{2dx}{(x+1)^2}-\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x-1|-\frac{2}{x+1}-\ln|x+1|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{2}{x+1}+C.$$

Пример 5.8. Найти $\int\frac{x^2+4}{x^3-4x}dx$.

Разложим знаменатель подынтегральной функции на множители $x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2)$. Согласно теореме 5.3 правильная дробь должна разлагаться в сумму простейших дробей

$$\frac{x^2+4}{x^3-4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Найдем коэффициенты A, B и C следующим образом. Приведем все слагаемые правой части к общему знаменателю и приравняем числители:

$$x^2+4=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2).$$

Это равенство выполняется при любых значениях x.

Заметим, что у каждого слагаемого в правой части отсутствует в точности один сомножитель, так что при подстановке корней знаменателя все слагаемые правой части, кроме одного, обратятся в ноль:

$$\begin{array}{lll} x=0: & 4=A(-2)(2), & A=-1; \\ x=2: & 4=B\cdot 2\cdot 4, & B=1; \\ x=-2: & 4+4=C(-2)(-4), & C=1. \end{array}$$

Таким образом, искомое разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{x^2+4}{x^3-4x}=\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2},$$

так что интеграл представляется в виде суммы интегралов, которые легко находятся

$$\int\frac{x^2+4}{x^3-4x}dx=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{dx}{x+2}=-\ln|x|+\ln|x-2|+\ln|x+2|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x^2-4}{x}\right|+C.$$

Математиками разработаны приемы интегрирования и других классов функций (тригонометрических, иррациональных и др.).

Нахождение неопределенных интегралов – задача, существенно более сложная по сравнению с дифференцированием. Ее решение можно облегчить, применяя математические справочники и компьютерные программы, например Mathcad.

Задача нахождения первообразной элементарной функции – это вторая знаменитая математическая проблема, которая считается неразрешимой принципиально (первой была задача решения алгебраических уравнений в радикалах). Оказалось, что для очень многих элементарных функций первообразные не являются элементарными. Таковы, например, функции

$e^{-x^2}, \frac{1}{\ln x}, \frac{\sin x}{x}$ и т.д., хотя первообразные этих функций существуют и играют значительную роль в математике и приложениях. Свойства этих первообразных хорошо изучены, существуют подробные таблицы их значений.

ЛЕКЦИЯ 6

Дифференциальные уравнения

1. Общие понятия и примеры.

Различные вопросы математики, естествознания, экономики приводят к необходимости решения уравнений, содержащих в качестве неизвестной некоторую функцию $y(x)$, наряду с которой в уравнении присутствуют и ее производные различных порядков. Различают обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных. Обыкновенные дифференциальные уравнения содержат искомую функцию одной переменной, ее производные различных порядков и независимую переменную. Если в уравнении искомая функция зависит от нескольких переменных и это уравнение содержит частные производные, то это уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных. Порядком дифференциального уравнения называется наибольший порядок входящих в него производных.

Далее мы будем изучать обыкновенные дифференциальные уравнения. С одним из наиболее простых таких уравнений, уравнением вида $y'=f(x)$, мы уже встречались в интегральном исчислении. Его решением является неопределенный интеграл от $f(x)$: $y=\int f(x)dx$. Приведем другие примеры обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$y'+2y=x^2,\quad y'''+y'=0,\quad y''=xy.$$

Определение 6.1. Равенство, связывающее независимую переменную x с неизвестной функцией $y(x)$ и ее производными до некоторого порядка n включительно, называется дифференциальным уравнением n-го порядка.

Приведенные выше уравнения являются, соответственно, дифференциальными уравнениями первого, третьего и второго порядков.

Любое дифференциальное уравнение может быть записано в виде $F(x,\ y,\ y',\ ...,\ y^{(n)})=0$.

Определение 6.2. Решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция $y(x)$, имеющая производные до n-го порядка включительно, и такая, что ее подстановка в уравнение обращает его в тождество.

Например, решением уравнения $y'=2y$ или $dy=2ydx$ является функция $y=e^{2x}$. Действительно $y'=2e^{2x}=2y$.

Из интегрального исчисления известно, что наиболее общая функция y, удовлетворяющая уравнению $dy=f(x)dx$ имеет вид $y=\int f(x)dx+C$, C – произвольное постоянное. Таким образом, дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений, каждое из которых получится, если произвольному постоянному придать определенное числовое значение. Решение дифференциального уравнения, содержащее произвольное постоянное, называется общим решением, каждое решение, которое получается из общего, если дать постоянному C определенное числовое значение, называется частным решением.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка есть $F(x,\ y,\ y')=0$ (например $y'y+xy^2+3=0$). Если это уравнение можно разрешить относительно y', т.е. записать в виде $y'=f(x,y)$, то говорят, что уравнение записано в нормальной форме (или в форме Коши); $f(x,y)$ – функция, определенная в некоторой области D плоскости XOY.

Решением дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$ на некотором интервале (a,b) называется функция $y=y(x)$, определенная и дифференцируемая на этом интервале и удовлетворяющая условиям:

1) Точка $M\big(x,y(x)\big)\in D$;
2) $y'(x)=f\big(x,y(x)\big)$ при любом $x\in(a,b)$.

Решить (проинтегрировать) дифференциальное уравнение $y'=f(x,y)$ – значит найти все его решения в заданном конечном или бесконечном интервале (a,b).

Задача Коши при решении дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$ заключается в следующем: требуется найти его решение, удовлетворяющее (дополнительно) условию $y(x_0)=y_0$, где $M(x_0,y_0)\in D$.

Теорема 6.1. (Существования и единственности решения задачи Коши). Пусть задано дифференциальное уравнение $y'=f(x,y)$. Если функция $f(x,y)$ и ее частная производная $f'_y(x,y)$ определены и непрерывны в некоторой области D и точка $M_0(x_0,y_0)\in D$, то существует единственное решение $y=y(x)$ уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

Без доказательства.

На основании теоремы Коши можно уточнить понятие частного решения.

Определение 6.3. Если задача Коши имеет единственное решение, то это решение называется частным решением дифференциального уравнения.

3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными имеют вид $y'=p(x)q(y)$, где $p(x)$ и $q(y)$ – непрерывные функции.

Для отыскания решения этого уравнения необходимо разделить переменные x и y. Это возможно следующим образом:

$$y' = p(x)q(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = p(x)q(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{q(y)} = p(x)dx, \quad q(y) \neq 0.$$

$\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x)dx$ – общий интеграл дифференциального уравнения.

Пример 6.1. Решить уравнение $(1+x^2)y' + xy = 0$.

Решение: Перепишем уравнение в виде $(1+x^2)\frac{dy}{dx} = -xy$ или $\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{1+x^2}, \quad y \neq 0$.

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{xdx}{1+x^2} \Rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \ln C = \ln\frac{C}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Тогда $y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$; $y = 0$ также является решением.

4. Однородные дифференциальные уравнения.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка – это уравнения вида $y' = f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ является однородной функцией нулевой степени (равенство $f(tx, ty) = f(x, y)$ выполняется для любого $t > 0$.) Для решения однородного уравнения $y' = f(x, y)$ необходимо:

1) свести его к уравнению $y' = q\left(\frac{y}{x}\right)$;

2) полученное уравнение свести к уравнению с разделяющимися переменными: $xu'(x) = q(u) - u$, используя новую переменную $u(x) = \frac{y(x)}{x}$.

Действительно, если $y(x) = xu(x)$, то $y' = u + xu'$ и уравнение $y' = q\left(\frac{y}{x}\right)$ запишется в виде $u + xu' = q(u)$ или $xu' = q(u) - u$.

Пример 6.2. Решить уравнение $y - xy' = x\text{tg}\frac{y}{x}$.

Решение. Разрешим данное уравнение относительно производной y', полагая, что $x \neq 0$, $y' = \frac{y}{x} - tg\frac{y}{x}$. Это уравнение однородное, так как $q\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} - \text{tg}\frac{y}{x} = \frac{yt}{xt} - \text{tg}\left(\frac{yt}{xt}\right) = q\left(\frac{ty}{tx}\right)$. Введем переменную $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ далее $\left(u = \frac{y}{x}\right)$, тогда $u + xu' = u - \text{tg}u$ или $xu' = -\text{tg}u$.

Это уравнение – уравнение с разделяющимися переменными $x\frac{du}{dx} = -\text{tg}u \Rightarrow \frac{du}{tgu} = -\frac{dx}{x}, \quad \text{tg}u \neq 0$.

$$\int \frac{du}{\text{tg}u} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{\cos u du}{\sin u} = -\ln|x| + \ln C \Rightarrow \ln|\sin u| =$$

$$= \ln|C| - \ln|x| \Rightarrow \sin u = \frac{C}{x}.$$

Возвращаясь к переменным x и y можно записать $\sin\frac{y}{x} = \frac{C}{x}$ или $\frac{y}{x} = \arcsin\frac{C}{x}, \quad y = x\arcsin\frac{C}{x}$. Кроме того, $y = 0$ также решение.

Пример 6.3. Решить уравнение $x + xy + y'(y + xy) = 0$. Имеем $-x(1+y) = y'y(1+x)$ или $\frac{ydy}{1+y} = -\frac{xdx}{1+x}, \quad 1+y \neq 0, 1+x \neq 0$.

$$\int \frac{ydy}{1+y} = -\int \frac{xdx}{1+x}; \; y - \ln|1+y| = -x + \ln|1+x| + C.$$

ЛЕКЦИЯ 7

Линейные дифференциальные уравнения

1. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка – это уравнения вида

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{7.1}$$

где $x \in (a,b)$, функции $p(x)$ и $f(x)$ непрерывны на (a,b), причем $f(x) \neq 0$. (При $f(x)=0$ $y'+p(x)y=0$ – уравнение с разделяющимися переменными; его решение $y(x) = C\exp(-\int p(x)dx)$). Уравнение (7.1) решается двумя способами.

Метод Бернулли. Искомая функция $y(x)$ представляется в виде $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$ и искомое уравнение записывается в виде:

$$u'v + uv' + puv = f(x) \text{ или } u'v + u(v' + pv) = f(x).$$

Пусть $v(x)$ такова, что $v' + pv = 0$, тогда $u'v = f(x)$ и получаются два уравнения для нахождения функций $u(x)$ и $v(x)$ (а следовательно, можно найти $y(x) = u(x)\,v(x)$.

Уравнение $v' + pv = 0$ имеет решение $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$, тогда второе уравнение $u' = f(x)e^{\int p(x)dx}$, а $u(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$. Общее решение неоднородного линейного уравнения первого порядка (7.1) имеет вид:

$$y(x) = \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)e^{-\int p(x)dx}.$$

Эту формулу можно запомнить, а можно при решении каждого конкретного уравнения повторять указанный выше алгоритм.

Пример 7.1. Решить уравнение $y' + \mathrm{tg}x y = \dfrac{1}{\cos x}$. Здесь $p(x) = \mathrm{tg}\,x$; $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, тогда

$$y(x) = \left(\int \frac{1}{\cos x} e^{\int \mathrm{tg}x dx}dx + C\right)e^{-\int \mathrm{tg}x dx} = \left(\int \frac{1}{\cos x} e^{-\ln|\cos x|}dx + C\right)e^{\ln|\cos x|} =$$

$$= \left(\int \frac{dx}{\cos^2 x} + C\right)|\cos x| = (\mathrm{tg}x + C)\cos x.$$

Метод вариации произвольной постоянной (*метод Лагранжа*).

Этот метод состоит из двух этапов.

На первом этапе находится общее решение однородного линейного уравнения $y' + p(x)y = 0$: $y = Ce^{-\int p(x)dx}$, где $C - \mathrm{const}$.

На втором этапе ищется *общее* решение неоднородного уравнения в виде: $y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}$, где C – функция от x. После подстановки этого выражения в исходное уравнение (7.1) получаем

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

или $\quad C'(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$, откуда $C'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}$,

а $\quad C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1$,

где C_1 – произвольная постоянная.

Тогда $\quad y(x) = \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right)e^{-\int p(x)dx}.$

2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

где $p(x), q(x), f(x)$ – заданные (7.2) непрерывные функции переменной x, $x \in (a,b)$.

Этому уравнению соответствует однородное линейное уравнение

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0\,. \tag{7.3}$$

Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка (7.3) основано на использовании следующих свойств.

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два различных решения уравнения (7.3), т.е. выполнено $y_1'' + py_1' + qy = 0$ и $y_2'' + py_2' + qy = 0$, тогда:

1. Функция $C\,y_1$, где C – произвольная постоянная, является решением.
2. Сумма решений $y_1 + y_2$ также является решением.

• Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно независимыми на интервале (a,b), если составленный на их основе определитель Вронского не равен нулю.

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Пример: $y_1(x) = e^{k_1 x}$; $y_2(x) = e^{k_2(x)}$, $k_1 \neq k_2$, тогда

$$W = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = (k_2 - k_1)e^{(k_1+k_2)x} \neq 0\,.$$

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два линейно независимых частных решения уравнения (7.3), то общим решением этого уравнения является их линейная комбинация:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)\,,$$

где C_1 и C_2 – произвольная постоянная.

Пример: $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = e^{3x}$ являются частными решениями уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Действительно: $y_1' = 2e^{2x}$; $y_1'' = 4e^{2x}$; $4e^{2x} - 10e^{2x} + 6e^{2x} \equiv 0$.

$$y_2' = 3e^{3x}, \quad y_2'' = 9e^{3x}; \quad 9e^{3x} - 15e^{3x} + 6e^{3x} \equiv 0\,.$$

Следовательно:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \text{ – общее решение.}$$

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + Y(x)\,,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные; $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые частные решения соответствующего однородного уравнения (7.3); $Y(x)$ – любое частное решение неоднородного уравнения (7.2). При этом всегда можно подобрать значения постоянных C_1 и C_2 так, чтобы из общего решения получить частное решение, удовлетворяющее любым заданным начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеют вид

$$y'' + ay' + b = 0\text{, где } a \text{ и } b \in R\,. \tag{7.4}$$

Если искать частные решения этого уравнения в виде $y = e^{\lambda x}$, где $\lambda - \mathrm{const}$, то в силу $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ из уравнения (7.4) получаем уравнение относительно числа λ

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0 \text{ или } e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right) = 0 \text{ или } \lambda^2 + a\lambda + b = 0\,, \tag{7.5}$$

которое называется *характеристическим.*

Пусть $D = a^2 - 4b$ – дискриминант уравнения (7.5). Тогда общее решение уравнения (7.4) определяется следующим образом.

1) Если $D > 0$, то $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, где λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения (7.5).

2) Если $D = 0$, то $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$, где λ – кратный корень (7.5).

3) Если $D < 0$, то $y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x)$, где α и β – действительная и мнимая части корней характеристического уравнения (7.5).

$$D = a^2 - 4b = (-1)(4b - a^2) = i^2(4b - a^2), \quad i^2 = -1, \quad 4b - a^2 > 0 .$$

Тогда $\lambda_{1,2} = \dfrac{-a \pm i\sqrt{4b - a^2}}{2} = \alpha \pm \beta i$, $\alpha = -\dfrac{a}{2}$; $\beta = \dfrac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$.

Пример 7.1. $y'' - 4y' + 4 = 0$, тогда (7.4) $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. $\lambda_{1,2} = 2$, $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{2x}$.

Если дано неоднородное уравнение (7.2), то его частное решение (если известны $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения соответствующего ему однородного уравнения) находятся методом вариации произвольных постоянных, т.е. в виде $Y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$. Для нахождения неизвестных функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ необходимо решить систему двух уравнений $\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0; \\ C_1' y_1 + C_2' y_2' = f(x), \end{cases}$ относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, проинтегрировав которые определяют $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

Задачу нахождения частного решения можно решать методом неопределенных коэффициентов, если правая часть уравнения имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x) .^*$$

Пример 7.2. Решить уравнение $y'' - 5y' + 6y = -4e^{2x}$.

Общее решение однородного уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$ имеет вид $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

$f(x) = -4e^{2x} = e^{2x}(-4)$. Имеем $\alpha = 2;\ \beta = 0;\ P_n(x) = -4$. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде: $Y(x) = Axe^{2x}$, где A – неизвестный коэффициент. Имеем $Y'(x) = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$

$$Y''(x) = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} .$$

После подстановки в исходное уравнение

$$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 5Ae^{2x} - 10Axe^{2x} + 6Axe^{2x} = -4e^{2x}, \ -A = -4 \text{ или } A = 4 .$$

Таким образом

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + 4xe^{2x} .$$

* Если $\beta = 0$, то $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$. Частное решение ищется в виде $y(x) = x^k e^{\alpha x}[A_0 + A_1 x + ... + A_n x^n]$, где k – кратность корня $x = \alpha$ характеристического уравнения (7.5); $A_0, A_1, ..., A_n$ – числа, подлежащие определению.

ЛЕКЦИЯ 8

Определенный интеграл. Основные понятия и свойства

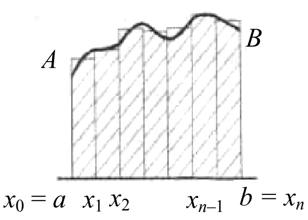


Рис. 8.1

1. К понятию определенного интеграла можно прийти, решая задачу о вычислении площади криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a,b]$, (рис. 8.1). Основой понятия определенного интеграла является интегральная сумма.

2. Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функции $y = f(x)$ (рис. 8.2). Для построения интегральной суммы разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, и будем говорить, что произведено разбиение T. На каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, где $i = 1, 2, ..., n$ выберем (произвольным образом) промежуточную точку ξ_i (рис. 8.2), и, обозначив $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $x_0 = a$, $x_n = b$ вычислим n чисел $S_i = f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

Сумма $S_T = I_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется интегральной суммой для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$, соответствующей разбиению T.

Интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, соответствующая каждому конкретному разбиению T, зависит от выбора промежуточных точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

3. Пусть функция $f(x)$ положительна на отрезке $[a,b]$. Рассмотрим рис. 8.2, где значение $S_i = f(\xi_i)\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$. Поэтому интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ равна площади ступенчатой фигуры, изображенной на рис. 8.1. Эта фигура ограничена сверху ступенчатой линией, которая на каждом из промежутков (x_{i-1}, x_i) совпадает с прямой $y = f(\xi_i)$, параллельной оси Ox (рис. 8.2).

4. Для каждого конкретного разбиения T отрезка $[a,b]$ на n частей найдем число λ, равное наибольшей длине отрезков $[x_{i-1}, x_i] : \lambda = \max \Delta x_i$. Пусть при стремлении λ к нулю существует конечный предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, который не зависит от разбиения отрезка $[a,b]$ точками x_i и от выбора промежуточных точек ξ_i. Тогда этот предел называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$, а сама функция $y = f(x)$ называется интегрируемой на этом отрезке. Обозначение определенного интеграла: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Здесь символ $\int_a^b$ называется знаком определенного интеграла, числа a и b нижним и верхним пределами интегрирования соответственно; x – переменной интегрирования, функция $f(x)$ – подынтегральной функцией, а выражение $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

5. Всякая функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, интегрируема на этом отрезке.

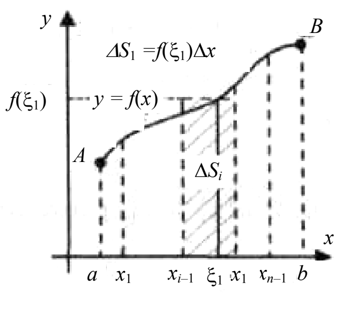


Рис. 8.2

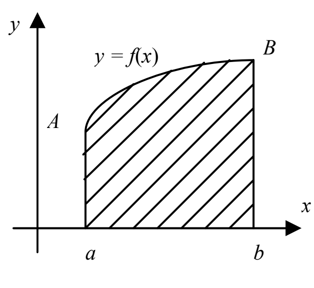


Рис. 8.3

6. *Геометрический смысл определенного интеграла.* Если функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то в этом случае определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции $aABb$ под кривой $y = f(x)$ (заштрихованная область на рис. 8.3).

7. Свойства определенного интеграла.

7.1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

7.2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

7.3. Если $k = \text{const}$, то $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_x^b f(x)dx$.

7.4. $\int\limits_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$.

7.5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

7.6. *Интегрирование неравенств*. Если $f(x) \le g(x)\ \forall x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$.

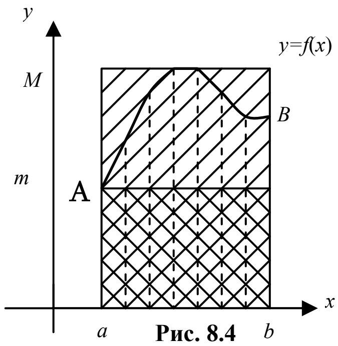
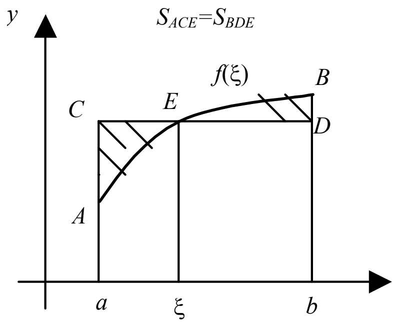


Рис. 8.4

7.7. *Оценка определенного интеграла.* Если функция $y = f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$, т.е. $m \le f(x) \le M$ при любом $x \in [a,b]$, то справедливо двойное неравенство (см. рис. 8.4)

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

7.8. *Теорема о среднем.* Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то найдется такое



число $\xi \in (a,b)$ (рис. 8.5), что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

ЛЕКЦИЯ 9

Формула Ньютона-Лебница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Вычисление площадей

1. Функция $S(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ называется определенным интегралом с переменным верхним пределом.

Аргументом этой функции является верхний предел интегрирования, а переменной интегрирования является t (рис. 9.1).

2. Геометрический смысл функции $S(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ при условии $f(x)\ge 0$ заключается в том, что ее значение $S(x)$ равняется площади фигуры, заштрихованной на рис. 9.1. Поэтому справедливы такие соотношения: $S(a)=0,\quad S(b)=\int\limits_a^b f(t)dt=\int\limits_a^b f(x)dx$.

3. *Основная теорема.* Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда значение производной функции $S(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ в каждой точке $x\in[a,b]$ равно значению подынтегральной функции $f(x)$, т.е. $S'(x)=f(x)$ и, таким образом, $S(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.

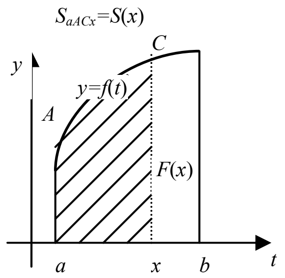


Рис. 9.1

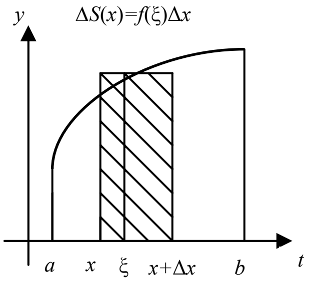


Рис. 9.2

Доказательство: Имеем (рис. 9.2):

$$S'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\leftarrow 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int\limits_a^x f(t)dt\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}f(\xi)(x+\Delta x-x)=f(x),$$

так как $f(x)$ – непрерывна.

4. *Формула Ньютона-Лейбница.* Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ – любая ее первообразная на этом отрезке. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ вычисляется по формуле

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\equiv F(x)\Big|_a^b .$$

Доказательство:

Пусть $S(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ и $F(x)$ две первообразные функции для $f(x)$. Тогда $S(x)=F(x)+C$ или

$$\int\limits_a^x f(t)dt=F(x)+C,\ \ x\in[a,b]. \tag{9.1}$$

При $x=a$ формула (9.1) принимает вид: $\int\limits_a^a f(t)dt=F(a)+C$, откуда $C=-F(a)$, так как интеграл равен нулю; при $x=b$ имеем:

$$\int\limits_a^b f(t)dt=F(b)+C=F(b)-F(a).$$

5. *Метод замены переменной.* Пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке $x = \varphi(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$. Тогда справедливо следующее равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

6. Если отрезок интегрирования симметричен относительно начала координат, а подынтегральная функция нечетная, то интеграл равен нулю.
Если же подынтегральная функция четная, то

$$\int_{-b}^b f(x)dx = 2\int_0^b f(x)dx .$$

7. *Интегрирование по частям.* Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu ;$$

где $uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

8. Пусть на плоскости Oxy (рис. 9.3) задана фигура, координаты каждой точки которой удовлетворяют двойным неравенствам $a \le x \le b$ и $f(x) \le y \le g(x)$. Тогда площадь этой фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx .$$

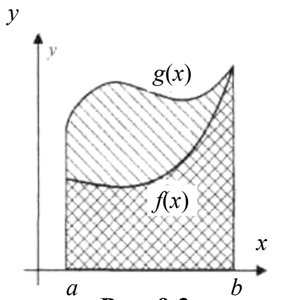


Рис. 9.3

Пример 9.1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^2$, $y = |x|$ (рис. 9.4).

Фигура симметрична относительно оси *OY*, поэтому достаточно найти площадь половины фигуры, расположенной в первой четверти. Координаты точки *B* найдем из системы уравнений

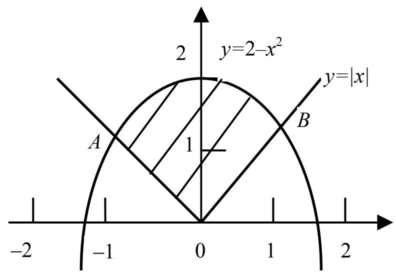


Рис. 9.4

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = x \end{cases} : B(1,1);$$

$$S = \int_0^1 (2 - x^2 - x)dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{6} \text{ (квадратных единиц).}$$

Площадь искомой фигуры $2S = 2\frac{1}{3}$ (квадратных единиц).

Лекция 10

Числовые ряды, основные понятия. Необходимое условие сходимости ряда; достаточные условия сходимости: сравнения, Даламбера

1. Пусть задана числовая последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Числовым рядом называется выражение

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ . \qquad (10.1)$$

Числа $a_1, a_2, ...$ называются членами ряда; a_n – общим (или n-м) членом ряда.

2. Ряд считается заданным, если задана числовая последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ т.е. если известен его общий член $a_n = f(n)$.

3. Сумма первых n членов ряда (10.1) называется n-й частичной суммой ряда: $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Числовые последовательности S_1, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, и т.д. называются последовательностью частичных сумм.

4. Ряд называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности частичных сумм: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. В этом случае число S называется суммой ряда: $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ряд называется расходящимся, если предел $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует.

5. Рассмотрим ряд геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... \ .$$

Он сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| > 1$. При $|q| < 1$ $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$.

6. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а его сумма равна S. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ также сходится, а его сумма равна kS.

7. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы соответственно равны S_1 и S_2, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, являющийся суммой данных рядов, сходится, и его сумма равна $S_1 + S_2$.

8. Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из исходного добавлением или отбрасыванием конечного числа членов.

9. Ряд, полученный из исходного отбрасыванием его первых n членов, называется n-м остатком ряда:

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ... a_{n+m} + ... = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \ .$$

10. Сумму любого числового ряда можно представить в виде

$$S = S_n + r_n \ .$$

11. Для того чтобы числовой ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$ остаток ряда r_n стремился к нулю: $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

12. (*Необходимое условие сходимости ряда*). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Следствие* (*достаточное условие расходимости ряда*). Если предел n-го члена ряда при $n \to \infty$ не равен нулю или не существует, то ряд расходится.

13. (*Первый признак сравнения*). Пусть даны два ряда с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если $0 < a_n \le b_n$ начиная с некоторого номера n_0 и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

14. (*Второй признак сравнения, предельный*). Пусть даны два ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Существует доказательство, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ сходится при $k > 1$ и расходится при $k \le 1$. Этот факт можно использовать при исследовании сходимости числовых рядов.

15. (*Признак Даламбера*). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ знакоположительный и если $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, то этот ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $r < 1$. Если же $r > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если $r = 1$, то вопрос о сходимости остается открытым.

Примеры. Исследовать на сходимость следующие числовые ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+3}{n+1}}$. Имеем $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+3}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{n+1}} = 1 \ne 0$. Ряд расходится.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$. По признаку Даламбера

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} : \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ряд сходится.

3. Исследовать на сходимость ряд:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$. Имеем: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$.

(Необходимый признак выполняется).

Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} : \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1 \ne 0$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то исходный ряд расходится.

Лекция 11

Абсолютно и условно сходящиеся числовые ряды. Функциональные ряды. Теорема Абеля. Ряды Тейлора и Маклорена

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ называется абсолютно сходящимся. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то такой ряд называется условно сходящимся.

3. Условно сходящиеся ряды весьма «капризны»: перестановка их членов может давать другие суммы.

Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-...=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}\right)+...=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+...\right)=\frac{1}{2}S.$$

Теорема Римана. Если ряд сходится условно, то в результате перестановки его членов можно получить любую сумму и даже расходящийся ряд.

Под знакочередующимся рядом понимается ряд, у которого соседние члены имеют разные знаки. Знакочередующийся ряд можно записать так:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \text{ где } a_n>0.$$

4. (*Признак Лейбница*). Пусть дан знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, причем: 1) $a_1\ge a_2\ge a_3\ge...\ge a_n\ge...$; 2) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Тогда этот ряд сходится, а его сумма не превосходит первого члена, т.е. $0<S\le a_1$.

5. *Следствие.* Абсолютная величина остатка знакочередующегося ряда не превосходит абсолютную величину первого отброшенного члена исходного ряда: $|r_n|\le a_{n+1}$.

Пример. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{1+\sqrt{n+1}}$.

Решение. Имеем:

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n+1}}=0$;

2) $\frac{1}{1+\sqrt{n+1}}>\frac{1}{1+\sqrt{n+1+1}}$ при любом n, следовательно (по признаку Лейбница) ряд сходится.

6. Пусть в некоторой области D заданы функции

$$u_1(x),\ u_2(x),\ ...,\ u_n(x),\ \dots .$$

Выражение $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется функциональным рядом.

7. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ сходится, то точка $x=x_0$ называется точкой сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$. Совокупность всех значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется областью его сходимости.

8. Функциональный ряд вида

$$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+...+c_n(x-x_0)^n...,$$

где $c_0,\ c_1,\ ...,\ c_n,\ ...$ – постоянные числа, называется степенным рядом.

9. (*Теорема Абеля*). Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в точке $x = a \neq 0$, то он сходится, и притом абсолютно, при всяком x, удовлетворяющем условию $|x| < |a|$.

10. *Следствие.* Если степенной ряд расходится при $x = a$, то он расходится при всех таких значениях x, что $|x| > |a|$.

11. Радиусом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ называется такое число R, что при всех значениях x, удовлетворяющих условию $|x| < R$, степенной ряд сходится, а для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > R$, ряд расходится. Интервал $(-R,\ R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда.

12. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится абсолютно при любом x, удовлетворяющем условию $|x| < R$, где $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$.

13. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ можно почленно дифференцировать и интегрировать внутри его интервала сходимости (при $x \in (-R, R)$). Пусть $x \in (-R, R)$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = S(x)$. Тогда

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots = S'(x);$$

$$\int_0^x \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots\right) dx = \int_0^x S(x)\, dx .$$

14. Рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 называется степенной ряд $c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots$, коэффициенты которого c_n вычисляются по формулам

$$c_0 = f(x_0), c_1 = f'(x_0), c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots, c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots$$

В частном случае $x_0 = 0$ ряд Тейлора называют рядом Маклорена.

15. Ряды Тейлора используются для приближенного вычисления значений функций в любой точке его области сходимости.

16. Ряды Маклорена для функции e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1 + x)$, $(1 + x)^m$ имеют вид:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, \infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, \infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots (-1)^k \frac{x^{1+2k}}{(1+2k)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, \infty);$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-1,\ 1];$$

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots;$$

$$x \in [-1,\ 1],\ m > 0; \quad x \in (-1,\ 1), m < 0.$$

ЛЕКЦИЯ 12

Основные понятия теории вероятностей

1. ***Некоторые формулы комбинаторики.***

Комбинаторика изучает операции над конечными множествами. Пусть задано конечное множество элементов некоторой природы. Из них можно составить определенные комбинации, количества которых изучает комбинаторика. Некоторые ее формулы используются в теории вероятностей.

Определение 12.1. Комбинации, состоящие из одной и той же совокупности n различных элементов и различающиеся только порядком их расположения, называются перестановками (операция – упорядочение множества). Их число определяется произведением чисел от 1 до n:

$$P_n = 1 \cdot 2 \ldots n = n!$$

Пример 12.1: Множество $N_1 = 1, 2, 3.$ $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Это: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Определение 12.2. Комбинации из m элементов, составленные из n различных элементов $(m \le n)$, отличающиеся друг от друга либо самими элементами, либо их расположением, называются размещениями (образование упорядоченных подмножеств данного множества). Их число определяется по формуле

$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$; очевидно, что $A_n^n = P_n = n!$

$A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$. Для множества N_1 (пример 12.1) это: 13, 23, 12, 31, 32, 21.

Определение 12.3. Комбинации, содержащие по m элементов каждая, составленные из n различных элементов $(m \le n)$ и различающиеся хотя бы одним элементом, называются сочетаниями (образование подмножеств данного множества). Число сочетаний определяется формулой:

$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$; очевидно, что $C_n^{n-m} = C_n^m$; $A_n^m = P_m \cdot C_n^m$.

$C_3^2 = \dfrac{3!}{2!1!} = 3$. Для множества N_1 (пример 12.1) это :12, 13, 23.

Последние комбинации (сочетания) участвуют в качестве коэффициентов в широко известной в математике формуле бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n q^0 + C_n^{n-1} p^{n-1} q + C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + \ldots + C_n^1 p q^{n-1} + C_n^0 p^0 q^n .$$

Два основных правила комбинаторики.

Правило суммы. Если a_1 из множества A можно выбрать n_1 способами, a_2 из A – n_2 способами (способ выбора a_1 не совпадает со способом выбора a_2), то a_1 или a_2 можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Пример 12.2. В студенческой группе 8 человек жители г. Тамбова, 4 – Тамбовского района, 2 – жители Моршанского района и т.д. Тогда можно выбрать жителя г. Тамбова – 8 способами, Тамбовского района – 4 способами, жителя Тамбова или Тамбовского района – 12 способами.

Правило произведения. Если a_1 из A можно выбрать n_1 способами, а элемент a_2 из A можно выбрать n_2 способами, то выбор a_1 и a_2 может быть осуществлен $n_1 \cdot n_2$ способами.

В примере 12.2 выбор жителя Тамбова и Тамбовского района может быть осуществлен $8 \cdot 4 =$ 32 способами.

2. ***Предмет теории вероятностей.***

В основе теории вероятностей лежит понятие случайного события и случайной величины. Предмет теории вероятностей – изучение закономерностей случайных событий (и случайных величин) при их массовом проявлении.

Определение 12.4. *Случайным* относительно комплекса условий S называется событие, которое при осуществлении указанного комплекса условий может либо произойти, либо не произойти.

Случайные события обозначают большими (прописными) буквами: $A, B, C, \ldots$.

Случайное событие трактуется как результат испытания.*

Например, экзамен – испытание, отличная оценка – событие; выстрел – испытание, попадание – событие.

---

* Испытание рассматривается как организованное (человеком) осуществление комплекса условий (подбрасывание монеты, экзамен в вузе, стрельба по мишени), так и «организованное» природой (метеоусловия, аварии).

Определение 12.5. События A и B называют несовместными, если в одном и том же испытании появление одного из них исключает появление другого.

Например, выпадение «орла» при подбрасывании монеты исключает появление «решки».

Определение 12.6. Несколько событий образуют полную группу, если в результате испытания появление хотя бы одного из них достоверно.

Например, при произведении выстрела по мишени (испытание) обязательно будет или промах или попадание. Эти два события образуют полную группу.

Каждый из возможных результатов испытания называют элементарным событием (или исходом). Те элементарные исходы, которые интересуют исследователя, называют благоприятными событиями.

Определение 12.7. (Классическое определение вероятности). Отношение числа благоприятствующих событию A элементарных исходов к общему числу равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу, называется вероятностью события A и обозначается $p(A)$.

Свойства $p(A)$.

1. Вероятность достоверного события равна единице.
2. Вероятность невозможного события равна нулю.
3. Вероятность случайного события $0 < p(A) < 1$.

Пример 12.3. В коробке лежит 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Найти вероятность того, что среди пяти наугад взятых шаров будет 3 белых и 2 черных.

Общее число исходов $C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 = 252$. Число благоприятных исходов согласно правила умножения

$$C_6^3 \cdot C_4^2 = \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 20 \cdot 6 = 120 \text{, а } p = \frac{120}{252} \approx 0{,}48 .$$

Обозначим: n – число испытаний; m – число появлений события A в этих испытаниях (частота события A).

Определение 12.8. Отношение частоты события к числу испытаний называется относительной частотой события.

Определение 12.9. (Статистическое определение вероятности).

Предельное значение относительной частоты появления события A при неограниченном возрастании числа испытаний называется вероятностью события A.

Лекция 13

Теория вероятностей. Основные теоремы

1. ***Умножение вероятностей.***

Определение 13.1. Произведением двух событий A и B называется событие AB, означающее совместное появление этих событий.

Пример 13.1. Абитуриент закончил школу с золотой медалью – событие A; абитуриент сдал первый экзамен на «отлично» – событие B. Событие AB – абитуриент подлежит зачислению в вуз.

Определение 13.2. Вероятность события B в предположении, что событие A произошло (B/A), называется условной вероятностью $p_A(B) = p(B/A)$.

(Если $p_A(B) = p(B)$, то вероятность называется безусловной).

Пример 13.2. Из 25 экзаменационных билетов студент выучил 20. Если он первым берет билет, то вероятность взять известный $p(B) = \frac{20}{25} = 0{,}8$. Студент выбирает билет вторым. Событие A – первый студент выбрал билет, известный второму, тогда $p_A(B) = \frac{19}{24}$.

Теорема 13.1. Вероятность произведения двух событий определяется формулой $p(AB) = p(A)p_A B = p(B)p_B(A)$.

Пример 13.3. В коробке 6 белых и 4 черных шара. Последовательно, без возврата вынимаются два шара. Какова вероятность, что оба окажутся белыми?

$$p(AB) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}.$$

Эта теорема допускает обобщение на случай произведения любого числа событий $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$.

$$p(A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n) = p(A_1)\, p_{A_1}(A_2)\, p_{A_1 A_2}(A_3) ... p_{A_1 ... A_{n-1}}(A_n).$$

Определение 13.3. Событие B называется независимым от события A, если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности $p_A(B) = p(B)$.

Для n независимых событий

$$p(A_1 A_2 ... A_n) = p(A_1)\, p(A_2)\ ...\ p(A_n).$$

Пример 13.4. Стреляют три стрелка. Вероятность поражения мишени первым стрелком $p(A_1) = 0{,}7$; вторым – $p(A_2) = 0{,}75$; третьим – $p(A_3) = 0{,}8$. Какова вероятность что в результате залпа мишень будет поражена трижды?

$$p(A_1 A_2 A_3) = p(A_1) p(A_2) p(A_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}42.$$

Теорема 13.2. Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий $A_1 A_2 ... A_n$, образующих полную группу, определяется формулой $p(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n$, где $q_i = 1 - p_i$ – вероятности соответствующих противоположных событий $\overline{A_i},\ i = \overline{1, n}$.

Если $p(A_1) = p(A_2) = ... = p(A_n) = p$, то $p(A) = 1 - q^n$.

В предыдущем примере вероятность, что хотя бы один стрелок поразит мишень, равна $p(A) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}015 = 0{,}985$.

2. ***Сложение вероятностей.***

Определение 13.4. События A и B называются совместными, если в одном и том же испытании появление одного из них не исключает появление другого.

Пример 13.5. Студент Иванов сдал экзамен – событие A, студент Петров сдал экзамен – событие B. A и B совместные события.

Определение 13.5. Суммой двух событий A и B называют событие $C = A + B$, которое состоит в появлении либо события A, либо события B, либо A и B одновременно. Сумма нескольких событий $\sum_{i=1}^{n} A_i$ состоит в появлении хотя бы одного из них.

Пример 13.6. Подбрасывается игральная кость. Событие A – выпало число 2, событие B – выпало число 4, событие C – выпало число 6. Событие $A + B + C$ – выпало число очков, кратное 2.

Теорема 13.3. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их произведения

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB).$$

Если A и B независимы, то

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A)p(B).$$

Если A и B зависимы, то

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A)p_A(B).$$

Если A и B несовместны, то

$$p(A+B)=p(A)+p(B).$$

В случае полной группы событий $A_1, A_2, ..., A_n$ сумма их вероятностей равна 1.

$$p(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

$$p(A)+P(\overline{A})=1.$$

3. Формула полной вероятности.

Пусть события $B_1, B_2, ..., B_n$ попарно несовместны и образуют полную группу событий $\sum p(B_i)=1$.

Пусть событие A может наступать при условии появления одного из событий B_i, причем известны как вероятности $p(B_i)$, так и условия вероятности $p_{B_i}(A),\quad i=\overline{1,n}$.

Теорема 13.4. Вероятность события *A*, появление которого возможно лишь при наступлении одного из несовместных событий B_i, образующих полную группу событий, равно сумме попарных произведений каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность появления события *A*.

$$p(A)=p(B_1)p_{B_1}(A)+p(B_2)p_{B_2}(A)+...+p(B_n)p_{B_n}(A).$$

Пример 13.7. С остановки транспорта можно уехать на автобусе, троллейбусе или на такси. В течении 5 минут через остановку проходят 1 троллейбус, 2 автобуса, 3 такси. Вероятность уехать на троллейбусе равна 0,5 (подошедший троллейбус идет в нужном для пассажира направлении); на автобусе 0,8; на такси – 0,3. Какова вероятность, что пассажир уехал с данной остановки в течение ближайших пяти минут с первым подошедшим транспортным средством.

$$p(A)=p(B_1)p_{B_i}(A)+p(B_2)p_{B_2}(A)+p(B_3)p_{B_3}(A)=$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 0{,}5+\frac{2}{6}\cdot 0{,}8+\frac{3}{6}\cdot 0{,}3=\frac{3}{6}=0{,}5.$$

4. ***Формула Байеса.*** Пусть заданы исходные условия формулы полной вероятности. События B_i называют гипотезами, так как заранее неизвестно, какое из них наступит. Пусть произведено испытание и в результате появилось событие *A*. Тогда возможно определить условные вероятности гипотез B_i по следующим формулам:

$$p_A(B_i)=\frac{p(B_i)p_{B_i}(A)}{p(A)};\quad i=\overline{1,n}.$$

Эти формулы называются формулами Байеса.

Возвращаясь к примеру 13.7 можно переоценить вероятности гипотез: $p_A(B_1)$ – пассажир уехал на троллейбусе; $p_A(B_2)$ – на автобусе; $p_A(B_3)$ – на такси:

$$p_A(B_1)=\frac{1/6\cdot 0{,}5}{0{,}5}=\frac{1}{6};\quad p_A(B_2)=\frac{2/6\cdot 0{,}8}{0{,}5}=\frac{8}{15};\quad p_A(B_3)=\frac{0{,}5\cdot 0{,}3}{0{,}5}=0{,}3.$$

Наиболее вероятным остается событие, что пассажир уехал на автобусе.

5. ***Формула Бернулли.***

Определение 13.6. Несколько испытаний называются независимыми относительно события A, если вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний.

Будем рассматривать такие независимые испытания, в которых событие A имеет одинаковую вероятность. Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью $p : p(A) = p$. Тогда $p(\overline{A}) = 1 - p = q$.

Теорема 13.5. Вероятность сложного события, состоявшего в том, что в n испытаниях событие A наступит ровно k раз и не наступит $n - k$ раз, подсчитывается по формуле:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \text{ (формула Бернулли).}$$

Пример 13.8. Какова вероятность, что при пяти подбрасываниях монеты герб выпадет 3 раза.

$$P_5^3 = \frac{5!}{3!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{16}.$$

Лекция 14

Теория вероятностей. Случайные величины

Определение 14.1. Величина называется случайной, если в результате испытания она примет лишь одно возможное решение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин.

Обозначение – прописными буквами $X, Y, Z, ...,$ значения случайных величин – строчными: $x_1, x_2, ..., x_n;\ y_1, y_2, ..., y_m;\ z_1, z_2, ..., z_k;\ ...$.

Различают два вида случайных величин.

Определение 14.2. Случайная величина, принимающая отдельные возможные значения с определенными вероятностями, называется дискретной случайной величиной (ДСВ).

Пример: X – количество очков, выпадающих при подбрасывании игральной кости – $x_1 = 1,\ x_2 = 2, ...\ x_6 = 6;$ Z – число попаданий в мишень при 5 выстрелах.

Определение 14.3. Непрерывной называется случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого промежутка. Обозначение: НСВ.

Примеры: X – дальность полета снаряда; Y – возможный вес яблока; Z – возможный рост человека.

Определение 14.4. Соответствие между отдельными возможными значениями ДСВ и их вероятностями называется законом распределения ДСВ.

Задать ДСВ – перечислить ее возможные значения и указать их соответствующие вероятности, например, в виде таблицы

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2		p_n

Так как в одном испытании случайная величина принимает только одно возможное значение, то события $X = x_1,\ X = x_2, ..., X = x_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий, поэтому сумма их вероятностей равна 1: $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Пример 14.1. Из каждой сотни лотерейных билетов 50 – не имеют выигрыша, 25 имеют выигрыш 50 рублей, 15 – 150 рублей и 10 – 250 рублей. Записать закон распределения ДСВ X – стоимость выигравшего билета

X	0	50	150	250
p	0,5	0,25	0,15	0,1

Биномиальное распределение.

Пусть производится n независимых испытаний и в каждом из них событие A может появиться с одной и той же вероятностью p (не появиться с вероятностью $q = 1 - p$). В качестве ДСВ X рассмотрим число появлений события A в этих n испытаниях. Очевидно, что $x_1 = 0,\ x_2 = 1, ..., x_{n+1} = n$. Вероятности возможных (k) появлений в n испытаниях даются формулой Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, а соответствующий закон распределения называется биномиальным, (так как $C_n^k p^k q^{n-k}$ – общий член бинома Ньютона $(p+q)^n$)

X	0	1	2	…	n
p	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$		$C_n^n p^n q^0$

Пример 14.2. Монета брошена 5 раз. Написать закон распределения ДСВ X – числа появлений «герба».

Имеем:

$$P_5^k = C_5^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} = C_5^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = C_5^k \cdot \frac{1}{32}.$$

$C_5^0 = C_5^5 = \frac{5!}{0!\,5!} = 1$; $C_5^1 = C_5^4 = \frac{5!}{1!\,4!} = 5$; $C_5^2 = C_5^3 = \frac{5!}{2!3!} = 10$, поэтому

X	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Если n достаточно велико, а p – достаточно мало, то вместо формулы Бернулли используют формулу Пуассона

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!,$$

где $\lambda = np$ считается постоянной величиной. Формула Пуассона относится к числу приближенных.

Числовые характеристики ДСВ.

Хотя закон распределения полностью характеризует ДСВ, на практике часто используют числовые характеристики случайной величины, которые дают ее некоторое осредненное описание, получаемое на основе закона ее распределения.

Определение 14.5. Математическим ожиданием ДСВ называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Из данного определения следует, что $M(X)$ есть некоторая постоянная неслучайная величина. Вероятностный смысл $M(X)$ – оно приближенно равно среднему арифметическому значению X (особенно для большого числа испытаний).

Для примера 14.1

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}5 + 50 \cdot 0{,}25 + 150 \cdot 0{,}15 + 250 \cdot 0{,}1 = 0 + 12{,}5 + 22{,}5 + 25 = 60 .$$

Шестьдесят рублей – среднее значение выигрыша.

Для примера 14.2

$$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{5}{32} + 2 \cdot \frac{10}{32} + 3 \cdot \frac{10}{32} + 4 \cdot \frac{5}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} = \frac{80}{32} = 2{,}5 .$$

Герб, «в среднем», появится 2,5 раза.

Вообще для биномиального распределения $M(X) = np$.

Свойства $M(X)$:

1. $M(C) = C, \quad C - \text{const}.$
2. $M(CX) = CM(X).$
3. $M(X_1 + ... + X_n) = M(X_1) + ... + M(X_n)$.
4. Если $X_1, X_2, ..., X_n$ – независимые случайные величины, то $M(X_1 X_2 ... X_n) = M(X_1) M(X_2) ... M(X_n)$.

Определение 14.6. Разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием называется отклонением: $X - M(X)$.

Определение 14.7. Математическое ожидание квадрата отклонения (случайной величины от ее математического ожидания) называется дисперсией или рассеянием:

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2 ;$$

$$D[X] = \left[x_1 - M(X)\right]^2 p_1 + \left[x_2 - M(X)\right]^2 p^2 + ... + \left[x_n - M(X)\right]^2 p_n .$$

Используя свойства математического ожидания, можно также записать

$$\begin{aligned} D(X) &= M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] = M(X^2) - 2M(X)M(X) + \\ &+ M^2(X) = M(X^2) - M^2(X). \end{aligned}$$

Для примера 14.1

$$\begin{aligned} M(X^2) &= 0^2 \cdot 0{,}5 + 50^2 \cdot 0{,}25 + 150^2 \cdot 0{,}15 + 250^2 \cdot 0{,}1 = 0 + 625 + 3375 + \\ &+ 6250 = 10\,250; \ M^2(X) = 60^2 = 3600 ; \ D(X) = 10\,250 - 3600 = 6650 . \end{aligned}$$

Свойства $D(X)$:

1. $D(C) = 0$.
2. $D(CX) = C^2 D(X)$.
3. Если $X_1, X_2, ..., X_n$ – независимые случайные величины, то $D\left(\sum X_i\right) = \sum D(X_i)$.

Существует доказательство, что для биномиального распределения $D(X) = np(1-p) = npq$.

Определение 14.8. Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из ее дисперсии. $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Пусть все значения НСВ X сплошь заполняют отрезок $[a, b]$.

Определение 14.9. Функцией распределения X называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что X принимает значение, меньшее x.

$F(x) = p(X < x)$.

Свойства $F(x)$:

1. $0 \le F(x) \le 1$.
2. При $x_2 > x_1$ $\quad F(x_2) \ge F(x_1)$.
3. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } & x \le a; \\ 1, \text{ если } & x \ge b, \end{cases}$ если все значения случайной величины принадлежат отрезку $[a,b]$.

Следствия:

1. $P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.
2. $P(X = x_1) = 0.$
3. Если $-\infty < X < +\infty$, то $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0;\ \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Определение 14.10. Производная от $F(x)$ называется плотностью распределения вероятностей случайной величины X: $f(x) = F'(x)$.

Таким образом, $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ и

$P(\alpha \le X \le \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha)$. В то же время $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Свойства $f(x)$:

1. $f(x) > 0$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$; $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = 1$, если все значения X принадлежат отрезку $[a,b]$.

Для НСВ:

$$M(X) = \int\limits_a^b x f(x)dx; \quad D(X) = \int\limits_a^b \left[x - M(X)\right]^2 f(x)dx \text{ или}$$

$$D(X) = \int\limits_a^b x^2 f(x)dx - \left[M(X)\right]^2;\ \sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример 14.3. Плотность распределения вероятностей случайной величины X (м) – рост взрослого жителя города N задана функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1{,}5; \\ -24 \cdot (2x^2 - 7x + 6), & 1{,}5 \le x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найти $M(X)$.

$$M(X) = \int\limits_{1,5}^{2} -24x(2x^2 - 7x + 6)\,dx = -24 \cdot \left(2\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} \right)\Bigg|_{1,5}^{2} =$$

$$= -24 \cdot \left(0{,}5 \cdot (16 - 5{,}0625) - \frac{7}{3} \cdot (8 - 3{,}375) + 3 \cdot (4 - 2{,}25) \right) = 1{,}75.$$

Таким образом, «средневзвешенный» рост взрослого жителя города N составляет 1,75 м.

$$D(X) = \int\limits_{1,5}^{2} x^2 \left[-24 \cdot \left(2x^2 - 7x + 6\right)\right] dx - (1{,}75)^2 =$$

$$= 24 \cdot \left(\frac{2x^5}{5} - \frac{7x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} \right)\Bigg|_{1,5}^{2} - 3{,}0625 = -24 \cdot (0{,}4 \cdot (32 - 7{,}59375) -$$

$$-1{,}75 \cdot (16 - 5{,}0625) + 2 \cdot (8 - 3{,}375)) - 3{,}0625 = 3{,}075 - 3{,}0625 = 0{,}0075.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \cong 0{,}087.$$

Среднеквадратическое отклонение составляет около 9 см.

ЛЕКЦИЯ 15

Теория вероятностей. Основные законы распределения непрерывных случайных величин

Равномерное распределение.

Определение 15.1. Распределение называется равномерным, если на интервале возможных значений случайной величины плотность распределения является постоянной

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ 1/(b-a), & a<x\le b;\\ 0, & x>b.\end{cases} \qquad \text{если } x\in[a,b];$$

Для такой случайной величины X

$$M[X]=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2};$$

$$D[X]=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Big|_a^b-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{(a-b)^2}{12};\quad \sigma[X]=\frac{|a-b|\sqrt{3}}{6}\approx 0{,}3\cdot|a-b|.$$

Пример 15.1. Время прибытия поезда на железнодорожную станцию считается допустимым, если не превышает 2,5 минуты «досрочного» прибытия и 2,5 минуты опоздания и является равномерно распределенной случайной величиной, распределенной на отрезке [–2,5; 2,5]. Ее числовые характеристики:

$$M(X)=\frac{-2{,}5+2{,}5}{2}=0;$$

$$D(X)=\frac{(-2{,}5-2{,}5)^2}{12}=2\cdot\frac{1}{12};$$

$$\sigma(X)=0{,}3\cdot|-2{,}5-2{,}5|=1{,}5.$$

Нормальное распределение.

Определение 15.2. Общим нормальным распределением вероятностей НСВ X называется распределение с плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

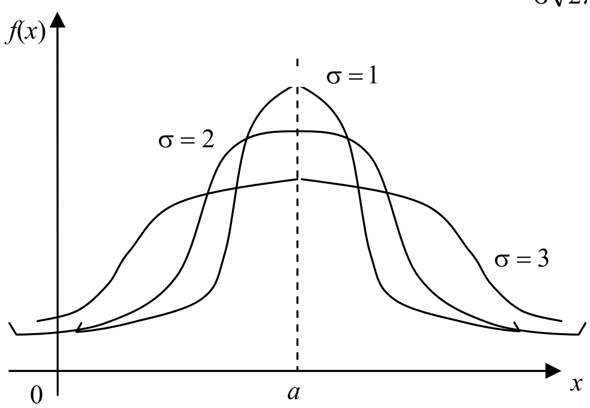


Рис. 15.1

Можно показать, что $M(X)=a;\quad D(X)=\sigma^2,\quad \sigma(X)=\sigma$ и то, что $f(x)$ имеет максимум при $x=a$, $f(a)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. График функции $f(x)$ для разных значений σ выглядит следующим образом:

При $x=a\pm\sigma$ имеют место точки перегиба графика $f(x)$.

Определение 15.3. Нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ называется нормированным; его плотность $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$.

На практике для нахождения $F(x)$ используется функция Лапласа

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$, для которой составлены таблицы.

Определение 15.4. Модой $M_0(X)$ называется возможное значение случайной величины *X*, при котором плотность распределения имеет максимум.

Определение 15.5. Медианой $M_0(X)$ называется такое возможное значение случайной величины *X*, что вертикальная прямая $x = M_0(X)$ делит пополам площадь, ограниченную кривой плотности распределения. Очевидно, что для нормального распределения $M_0(X) = a$.

В экономике наиболее часто, кроме рассмотренных выше равномерного и нормального распределений, используются распределение χ^2 Пирсона, распределения Стьюдента, Фишера.

Закон больших чисел.

Хотя поведение одной случайной величины описать достаточно сложно, поведение совокупности случайных величин может иметь вполне определенный (описываемый каким-либо законом) характер.

Теорема П.Л. Чебышева. Если последовательность попарно-независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ имеет конечные $M(X)$ и дисперсии этих величин равномерно ограничены (например, одним и тем же числом *C*), то среднее арифметическое случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Смысл: среднее арифметическое значений случайных величин (когда их много) – величина неслучайная.

Правило 3-х сигм: если *X* распределено нормально, то

$$P(|X - a| < 3\sigma) \cong 1.$$

Смысл. Если случайная величина подчиняется нормальному закону распределения, то с практической достоверностью можно считать, что все значения этой случайной величины расположены в интервале

$$[a - 3\sigma, a + 3\sigma].$$

Теорема Ляпунова. (центральная предельная теорема). Если случайная величина *X* есть сумма достаточно большого числа взаимно-независимых случайных величин, влияние каждой из которых на сумму ничтожно мало, то *X* имеет распределение, близкое к нормальному.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

I. Функции двух переменных.

1. Найти частные производные первого порядка для функций:

1.1. $5x + y^3 - 2x^5 y$; 1.2. $z = \cos(y^2 + 8x^3)$; 1.3. $z = \dfrac{y+x}{y-x}$;

1.4. $z = x^y$; 1.5. $z = \mathrm{tg}(x^3 + 4xy^2)$.

2. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если …

2.1. $z = xy^3,\ x = \cos t,\ y = \sin t$; 2.2. $z = 5x + y^3 - 2x^5 y,\ x = \ln t,\ y = e^t$.

3. Найти частные производные второго порядка от следующих функций:

3.1. $z = y^2 + 8x^3 - 6xy + 14$; 3.2. $z = yx^2 + 8x^3 + \cos(x + 3y)$.

3.3. $z = e^{xy}$; 3.4. $z = \sin(x^2 + y^2)$; 3.5. $z = \ln(x^2 + y)$.

4. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$, если:

4.1. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$; 4.2. $F(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 36$.

4.3. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$.

5. Найти в точке $M(4;\ 1)$ модуль и направляющие косинусы градиента функции $z = f(x, y)$, если

5.1. $f(x, y) = xy^2$; 5.2. $f(x, y) = x^2 + y^2$.

6. Найти в точке $A\ (1;\ 1)$ производную функции $z = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ по направлению вектора $\bar{e}$:

6.1. $\bar{e} = \{2;\ 1\}$; 6.2. $\bar{e} = \{1;\ 1\}$.

7. Исследовать на экстремумы следующие функции:

7.1. $z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 + 14x + 22y$; 7.2. $z = x^2 + 8y^3 - 6xy + 4$;

7.3. $z = x^2 + 4xy + 3y^2 + 6x + 6y$; 7.4. $z = x^3 + y^3 - 3xy + 5$;

7.5. $z = x^2 + y^2$; 7.6. $z = x^4 + y^4$;

7.7. $z = -(x - y)^2$; 7.8. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

8. Исследовать на экстремумы функции $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$.

8.1. $z = x^2 + y^2,\ \varphi(x, y) = 3x + 2y - 6$; 8.2. $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y},\ \varphi(x, y) = x + y - 6$;

8.3. $z = xy,\ \varphi(x, y) = 3x + 2y - 6$; 8.4. $z = x + 2y,\ \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 5$;

8.5. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y,\ \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 25$;

8.6. $z = x^2 - y^2,\ \varphi(x, y) = 2x - 6$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области *D*, если:

9.1. $f(x, y) = x(y + 5),\quad D: x^2 + y^2 \le 3$;

9.2. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2,\quad D: |x| + |y| \le 4$;

9.3. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy,\quad D: 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 2$;

9.4. $f(x, y) = xy - x - 2y,\quad D: y - x \le 0,\ y \le 4,\ x \ge 0$.

II. Интегралы.

1. Найти следующие интегралы:

1.1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2}$; 1.2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{x}dx$; 1.3. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x - 1}$;

1.4. $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{(1 - \cos x)^2}$; 1.5. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 1}}$; 1.6. $\displaystyle\int x\sqrt{1 - x^2}\,dx$;

1.7. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{e^x + 1}$; 1.8. $\displaystyle\int \frac{dx}{9 + x^2}$; 1.9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 16}$;

1.10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 3x - 10}$; 1.11. $\displaystyle\int x \sin 2x dx$; 1.12. $\displaystyle\int \mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx$;

1.13. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$; 1.14. $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x}dx$; 1.15. $\int \frac{dx}{(x-4)\ln^5(x-4)}$;

1.16. $\int (x+5)\cos\frac{x}{3}dx$; 1.17. $\int \frac{4x}{(x^2-1)(x+1)}$.

2. Вычислить интегралы:

2.1. $\int_1^2 \left(x^2+3x-4\right)dx$; 2.2. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx$; 2.3. $\int_0^{\pi} \cos 2xdx$;

2.4. $\int_1^e \ln xdx$; 2.5. $\int_0^1 xe^{-x}dx$; 2.6. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 xdx$.

3. Вычислить площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

3.1. $y=x^2;\quad y=\sqrt{x}$; 3.2. $y=x^2;\quad y=2-x^2$;

3.3. $y=x^2;\quad y=\frac{x^2}{2};\quad y=2x$;

3.4. $x^2-y^2=1;\quad x=2$;

3.5. $y^2=9x;\quad y=3x$.

III. Дифференциальные уравнения.

1. Решить следующие дифференциальные уравнения первого порядка:

1.1. $(x+1)^3dy-(y-2)^2dx=0$; 1.2. $2y'\sqrt{x}=y;\ y(4)=1$;

1.3. $x+xy+y'(y+xy)=0$; 1.4. $y'=\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}$;

1.5. $(x-y)xdy+y^2dx=0$; 1.6. $y'=\frac{y}{x}+x$;

1.7. $xy'-y=x^3$; 1.8. $y'-4y=e^{2x}$;

1.9. $y-xy'=x\mathrm{tg}\frac{y}{x}$; 1.10. $y'+y\mathrm{tg}x=\frac{1}{\cos x}$.

2. Решить следующие дифференциальные уравнения второго порядка.

2.1. $y''-4y'=0$;

2.2. $y''+9y=0$;

2.3. $y''-4y'+5y=x^3$ (метод неопределенных коэффициентов);

2.4. $y''+y=\mathrm{tg}x$ (метод вариации произвольной постоянной);

2.5. $y''+8y'=8x$.

3. Решить задачу Коши для уравнений:

3.1. $xy''+y'=0;\quad y(1)=0;\ y'(1)=1$;

3.2. $y''-5y'+6y=-4e^{2x},\quad y(0)=1,\quad y'(0)=6$.

IV. Ряды.

1. Исследовать на абсолютную сходимость следующие ряды:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{7n}$; 1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$; 1.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$;

1.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^{n-1}}$; 1.5. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$; 1.6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+3}{2n^2}$;

1.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{100n+1}$; 1.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$; 1.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+3}{n+1}}$;

1.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n+1}$; 1.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$; 1.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^3}$.

2. Найти интервалы сходимости следующих степенных рядов:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^4}{n2^n}$; 2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; 2.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$; 2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{1+\sqrt{n-1}}$.

V. Теория вероятностей.

1. Основные положения.

1.1. В ящике находится 10 красных и 6 синих пуговиц. Наугад вынимают две пуговицы. Какова вероятность того, что вынутые пуговицы будут одноцветные?

1.2. По данным социологов, в городе A данный кандидат в депутаты будет поддержан на выборах большей частью населения с вероятностью 0,6; в городе B – с вероятностью 0,7. Какова вероятность, что на выборах кандидат одержит победу хотя бы в одном из городов A и B?

1.3. Каждый из трех независимо работающих сигнализаторов своевременно сообщает о нарушении заданного режима работы реактора с вероятностью, соответственно, $p_1 = 0{,}9$; $p_2 = 0{,}8$; $p_3 = 0{,}75$. Какова вероятность того, что при нарушении заданного режима работы сигнала не поступит?

1.4. В урне находятся 4 белых шара, 5 красных и 3 синих. Наугад извлекаются по одному шару, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что в первый раз появится белый шар, во второй – красный, в третий – синий.

1.5. В первой урне находятся 4 белых и 5 красных шаров, во второй – 7 белых и 3 красных. Из второй урны наугад взяли шар и переложили его в первую урну. Найти вероятность того, что взятый после этого из первой урны шар будет белым.

1.6. Контрольный тест состоит из 4 вопросов. На каждый вопрос предлагается 4 варианта ответов, среди которых только один правильный. Найти вероятность правильного ответа на 2, 3 и 4 вопросы теста, если выбор ответа осуществляется наугад.

2. Случайные величины.

2.1. Из пяти человек, среди которых четыре знают английский язык, наудачу отобраны три. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – количества «англоговорящих» среди отобранных.

2.2. Найти дисперсию случайной величины X, заданной законом распределения

X	–5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

2.3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ 0{,}5x - 1, & 2 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что X примет значения: а) меньше 0,2; б) менее 3; в) не менее 3; г) не менее 5.

2.4. Случайная величина X задана на интервале (0,5) плотностью распределения $f(x) = 2x/25$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию X.

ОБРАЗЦЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

Билет № 1

1. Функции двух независимых переменных. Определение. Способы задания. Определение предела функции в точке и непрерывности.
2. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Биномиальный закон распределения случайной величины.
3. Найти общее решение уравнения $xyy' = 1 - x^2$.

Билет № 2

1. Частные и полное приращения функции $z = f(x, y)$, частные производные, частные и полный дифференциалы.
2. Зависимые и независимые события. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей и ее следствия.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$ и $y = \dfrac{x^3}{3}$.

Билет № 3

1. Экстремумы функции $z = f(x, y)$: определения, примеры нахо-ждения с использованием полного приращения функции.
2. Формула полной вероятности. Вероятность гипотез. Формула Байеса.
3. Найти общее решение однородного уравнения $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

Билет № 4

1. Необходимые условия экстремума функции $z = f(x, y)$, достаточные условия экстремума.
2. Частота события, свойства частоты. Статистическое и геометрическое определение вероятности. Примеры.
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{2^n}$.

Билет № 5

1. Производные сложной функции $z = f(u, v), u = \varphi_1(x, y), v = \varphi_2(x, y)$. Производные не явно заданной функции $F(x, y, z) = 0$.
2. Разложение функции в степенной ряд (постановка задачи, коэффициенты ряда, ряд Маклорена, условие разложимости). Ряд Маклорена для функции $y = e^x$.
3. Найти общее решение дифференциального уравнения $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$.

Билет № 6

1. Дифференциалы первого и второго порядков функции $z = f(x, y)$. Применение к приближенным вычислениям.
2. Числовые ряды. Основные понятия (определение, частичная сумма, остаточный член, сходимость). Геометрическая прогрессия, условия существования суммы.
3. Монета подброшена 5 раз. Какова вероятность, что герб выпадет не менее двух раз.

Билет № 7

1. Условный экстремум функции двух переменных (постановка задачи, необходимые условия, достаточное условие).
2. Функциональные ряды (общие понятия). Степенные ряды. Теорема Абеля.
3. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*, заданной распределением

X	2	3	4	5
p	0,1	0,4	0,35	0,15

Билет № 8

1. Производная по направлению. Градиент.
2. Закон больших чисел. Теорема Чебышева.

3. Найти $\int (x+2)\sin x dx$.

Билет № 9

1. Задача, обратная дифференцированию. Первообразная функции. Свойство первообразной.
2. Дифференциальная функция распределения. Свойства. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.
3. Показать, что функция $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x-y}$ удовлетворяет равенству $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$.

Билет № 10

1. Неопределенный интеграл функции $y = f(x)$ и его свойства.
2. Предмет теории вероятностей. Основные понятия (испытания, события; совместные, несовместные, достоверные, невозможные и случайные события). Полная группа событий. Примеры.
3. Найти экстремумы функции $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Билет № 11

1. Метод замены переменной в неопределенном интеграле.
2. Комбинаторика. Основные комбинации, их определения и формулы для нахождения. Бином Ньютона.
3. Найти экстремумы функции $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$.

Билет № 12

1. Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле.
2. Вероятность события. Классическое определение вероятности. Свойство вероятности. Вероятность событий, образующих полную группу.
3. Показать, что функция $z = e^x(x\cos y - y\sin y)$ удовлетворяет равенству $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Билет № 13

1. Свойства определенного интеграла.
2. Знакочередующиеся числовые ряды, признак Лейбница.
3. В лотерейном барабане осталось 30 билетов, из них 8 – выигрышных. Какова вероятность того, что один из трех вынутых билетов окажется выигрышным; какова вероятность отсутствия выигрышных билетов?

Билет № 10

1. Интегральная сумма для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, ее геометрический смысл. Определенный интеграл, его геометрический смысл. Теорема существования.
2. Теорема сложения вероятностей (обобщенная, несовместных событий).
3. Найти производную функции $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке $M(3,\ 1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $M_1(6,\ 4)$.

Билет № 15

1. Производная от интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница.
2. Абсолютно и условно сходящиеся числовые ряды. Теорема Римана.
3. Идя на экзамен, студент успел хорошо подготовить 25 из 30 вопросов. В каком случае вероятность сдать экзамен больше: если он возьмет билет первым или вторым?

Билет № 16

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия: определение, решение, порядок, общий интеграл, задача Коши.
2. Случайная величина. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины.
3. Найти $\int (x + \cos x - \operatorname{tg} x)dx$.

Билет № 17

1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Уравнения с разделяющимися переменными.
2. Равномерное распределение. Нормальный закон распределения. Их числовые характеристики.
3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в области $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Билет № 17

1. Формула полной вероятности. Вероятность гипотез. Формула Бейеса.
2. Числовые ряды с положительными членами. Достаточные условия сходимости (сравнения, Даламбера).
3. Найти $\int \frac{3x-1}{x^2+9} dx$.

Билет № 18

1. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
2. Интегральная функция распределения случайной величины. Свойства.
3. Экзамен принимают три преподавателя. Вероятность «попасть» к первому преподавателю равна 0,4, ко второму – 0,35, к третьему – 0,25. Какова вероятность сдать экзамен, если первый преподаватель имеет «результативность» – 0,75, второй – 0,85, третий – 0,9.

Билет № 20

1. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка (однородные и неоднородные). Методы решения.
2. Числовые характеристики случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины. Свойства.
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1}$.

Билет № 21

1. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка (однородные и неоднородные), схема решения.
2. Необходимые условия сходимости числового ряда. Необходимые и достаточные условия сходимости (Коши).
3. Вероятность попасть в цель для стрелка при одном выстреле равна 0,6. Написать закон распределения вероятностей величины X – числа попаданий в цель при трех выстрелах.

ОГЛАВЛЕНИЕ