ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Методические рекомендации и контрольные задания
для студентов 2 курса инженерно-технических специальностей
дневной формы обучения

Тамбов
Издательство ТГТУ
2007

УДК 517.445
ББК В161.56я73-5
П305

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Рецензент

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики ТГТУ
А.В. Медведев

Составитель

Е.А. Петрова

П305 Элементы операционного исчисления : методические рекомендации и контрольные задания / сост. Е.А. Петрова. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 24 с. – 100 экз.

Представлены методические рекомендации и контрольные задания по основным вопросам операционного исчисления.

Предназначены для студентов 2 курса инженерно-технических специальностей дневной формы обучения.

УДК 517.445
ББК В161.56я73-5

Учебное издание

ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО
ИСЧИСЛЕНИЯ

Методические рекомендации и контрольные задания

Составитель

ПЕТРОВА Елена Анатольевна

Редактор Е.С. М о р д а с о в а
Компьютерное макетирование Е.В. К о р а б л е в о й

Подписано в печать 08.11.07
Формат 60 × 84/16. 1,39 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 707

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические рекомендации позволяют помочь изучить операционное исчисление как один из методов решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений. Каких-либо решающих преимуществ этот метод перед другими не имеет; в то же время его простота сделала его основным инструментом при решении задачи Коши в целом ряде прикладных наук (механике, радиотехнике, электротехнике и т.д.).

Методические рекомендации содержат теоретический материал и задачи по основным вопросам операционного исчисления: какие функции могут быть функциями-оригиналами и каковы свойства функций-изображений; каковы правила перевода оригиналов в изображения и обратно; какие изображения имеют основные элементарные функции (таблица стандартных изображений).

В заключительном параграфе обсуждается возможность применения операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений и их систем. Данное издание также содержит ряд типовых задач, рекомендованных в качестве контрольных по данному курсу.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ-ОРИГИНАЛА И ЕЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПО ЛАПЛАСУ

***Определение* 1.** *Функцией-оригиналом* называется любая комплекснозначная или действительнозначная функция $f(t)$ действительного аргумента *t*, удовлетворяющая следующим трем условиям:

1. $f(t) = 0$ при $t < 0$.

2. $f(t)$ имеет ограниченный рост, т.е. возрастает не быстрее показательной функции: существуют такие постоянные $M > 0$ и $\sigma_0 \ge 0$, что $|f(t)| \le Me^{\sigma_0 t}$ при $t > 0$.

Число σ_0 называется показателем роста функции $f(t)$.

3. На любом отрезке $[a, b]$ $(0 \le a < b < \infty)$ функция удовлетворяет условиям Дирихле, т.е. непрерывна или имеет конечное число устранимых разрывов и разрывов первого рода; монотонна или имеет конечное число экстремумов.

Простейшей функцией-оригиналом является *единичная функция* (*функция Хевисайда*)

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0; \\ 1, \ t \ge 0. \end{cases}$$

Очевидно,

$$f(t)\eta(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0; \\ f(t), \ t \ge 0, \end{cases}$$

если $f(t)$ удовлетворяет условиям 1, 3, то $f(t)\eta(t)$ уже удовлетворяет всем условиям функции оригинала.

Далее под заданной с помощью аналитической формулы функцией $f(t)$ будем понимать произведение этой функции на функцию Хевисайда, а множитель $\eta(t)$ опускать.

***Пример* 1.** Проверить, являются ли функции оригиналами

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0; \\ 3e^{5t}, \ t \ge 0, \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0; \\ \dfrac{1}{t-5}, \ t \ge 0, \end{cases} \quad f_3(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0; \\ 2^{3^t}, \ t \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Функция $f_1(t)$ является оригиналом, так как удовлетворяет условиям 1 и 3: $M = 3, \sigma_0 = 5$; функция $f_2(t)$ не является оригиналом, так как в точке $t = 5$ имеет разрыв второго рода (не выполняется условие 1); $f_3(t)$ так же не является оригиналом, так как растет быстрее показательной функции: $2^{3^t} > Me^{\sigma_0 t}$ для любых M и σ_0, $t > 0$ (не выполняется условие 3).

***Определение* 2.** *Изображением по Лапласу* функции-оригинала $f(t)$ (или *преобразованием Лапласа* функции $f(t)$) называется функция комплексной переменной *p*, определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt.$$

Будем употреблять обозначение: $f(t) \overset{\bullet}{\longrightarrow} F(p)$, $F(p) \overset{\bullet}{\longleftarrow} f(t)$.

Функции $F(p)$, являющиеся изображениями, удовлетворяют *необходимому условию*: если $F(p)$ есть изображение, то $F(p) \to 0$ при $\operatorname{Re} p \to +\infty$.

***Пример* 2.** Найти изображение функции:

а) функции Хевисайда; б) $f(t) = e^{\alpha t}$; в) $f(t) = \sin t$.

Решение.

а) $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} 1\,dt = -\dfrac{e^{-pt}}{p}\Big|_0^{+\infty} = \dfrac{1}{p}$, так как $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-pt} = 0$, при $\operatorname{Re} p > S_0 = 0$. Итак, $\eta(t) \overset{\bullet}{\longrightarrow} \dfrac{1}{p}$.

б) $e^{\alpha t} \overset{\bullet}{\longrightarrow} \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}e^{\alpha t}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t}\,dt = -\dfrac{1}{p-\alpha}e^{-(p-\alpha)t}\Big|_0^{+\infty} = \dfrac{1}{p-\alpha}$.

в)
$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin t\,dt = -\frac{1}{p}e^{-pt}\sin t\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos t\,dt =$$
$$= \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos t\,dt = -\frac{1}{p^2}e^{-pt}\cos t\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{p^2}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin t\,dt =$$
$$= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin t\,dt.$$

Как видим, с помощью двукратного интегрирования по частям интеграл свели к самому себе. Таким образом, для $F(p)$ получено уравнение

$$F(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}F(p)\Rightarrow (p^2+1)F(p)=1\Rightarrow F(p)=\frac{1}{p^2+1}.$$

Итак, $\sin t \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p^2+1}$.

2. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

1. *Линейность.* Пусть $f(t)\xrightarrow{\bullet}F(p)$, $g(t)\xrightarrow{\bullet}G(p)$ и λ, μ – произвольные комплексные числа. Тогда имеет место соотношение

$$\lambda f(t)+\mu g(t)\xrightarrow{\bullet}\lambda F(p)+\mu G(p).$$

Это свойство непосредственно следует из свойства линейности несобственного определенного интеграла. С его помощью можно просто вывести изображения функций $f(t)=\sin\omega t$, $f(t)=\cos\omega t$, исходя из изображения $e^{\alpha t}\xrightarrow{\bullet}\frac{1}{p-\alpha}$.

$$\sin\omega t=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\xrightarrow{\bullet}\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\frac{(p+i\omega)-(p-i\omega)}{(p-i\omega)(p+i\omega)}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2};$$

$$\cos\omega t=\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\xrightarrow{\bullet}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(p+i\omega)+(p-i\omega)}{(p-i\omega)(p+i\omega)}=\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Далее, $\operatorname{sh}\omega t=\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\xrightarrow{\bullet}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}-\frac{1}{p+\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$;

$$\operatorname{ch}\omega t=\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\xrightarrow{\bullet}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}+\frac{1}{p+\omega}\right)=\frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

2. *Теорема подобия.* Если $f(t)$ – функция-оригинал и $f(t)\xrightarrow{\bullet}F(p)$, то для любого $\lambda>0$ справедливо соотношение

$$f(\lambda t)\xrightarrow{\bullet}\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Суть утверждения состоит в том, что умножение аргумента t оригинала на положительное число λ приводит к делению аргумента p и самого $F(p)$ на то же число λ.

Проиллюстрируем применение теоремы подобия.

***Пример* 3.** Найти изображение функции $f(t)=\sin\omega t$.

Решение. Из примера 2 пункта в) следует, что $\sin t\xrightarrow{\bullet}\frac{1}{p^2+1}$. Тогда по теореме подобия $\sin\omega t\xrightarrow{\bullet}\frac{1}{\omega}\frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2+1}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

3. *Теорема смещения.* Если $f(t)\xrightarrow{\bullet}F(p)$, то $e^{at}f(t)\xrightarrow{\bullet}F(p-a)$. Здесь a – произвольное комплексное число.

Суть утверждения состоит в том, что умножение оригинала на функцию e^{at} приводит к смещению на величину a аргумента p изображения $F(p)$.

***Пример* 4.** Найти изображение функции $f(t)=e^{\alpha t}\sin\omega t$.

Решение. Из примера 3 следует $\sin\omega t\xrightarrow{\bullet}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$. Тогда по теореме смещения $e^{\alpha t}\sin\omega t\xrightarrow{\bullet}\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$.

4. *Теорема запаздывания.* Если $f(t)\xrightarrow{\bullet}F(p)$, то для любого $\tau>0$ имеет место соотношение

$$f(t-\tau)\xrightarrow{\bullet}e^{-p\tau}F(p).$$

Суть утверждения состоит в том, что начало процесса в момент τ (в сравнении с процессом, начинающимся в момент $t=0$ и описываемым оригиналом $f(t)$), т.е. его запаздывание на время τ влечет за собой умножение изображения на $e^{-p\tau}$.

***Пример* 5**. Найти изображение функции $f(t)=\sin(t-2)$.

Решение. В примере 2 пункте в) получено $\sin t \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p^2+1}$. Тогда по теореме запаздывания при $\tau = 2$ имеем

$$\sin(t-2) \xrightarrow{\bullet} e^{-2p}\frac{1}{p^2+1}.$$

5. *Теорема дифференцирования оригинала.* Если $f(t)$, $f'(t)$, …, $f^{(n)}(t)$ являются оригиналами и $f(t) \xrightarrow{\bullet} F(p)$, то

$$f'(t) \xrightarrow{\bullet} pF(p) - f(0)$$

и

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{\bullet} p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Под $f^{(k)}(0)$ понимается $\lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$.

***Пример* 6.** Найти изображение $f'(t)$, если $f(t) = e^{-3t}\sin 2t$.

Решение. Из примера 4 следует, что при $\alpha = -3,\ \omega = 2$ имеем

$$e^{-3t}\sin 2t \xrightarrow{\bullet} \frac{2}{(p+3)^2+4}.$$

Найдем $f(0) = \lim\limits_{t\to+0} e^{-3t}\sin 2t = 0$. Согласно теореме дифференцирования оригинала

$$f'(t) \xrightarrow{\bullet} pF(p) - f(0) = p\frac{2}{(p+3)^2+4} - 0 = \frac{2p}{(p+3)^2+4}.$$

6. *Теорема интегрирования оригинала.* Если $f(t)$ является оригиналом и $f(t) \xrightarrow{\bullet} F(p)$, то

$$\int_0^t f(t)dt \xrightarrow{\bullet} \frac{F(p)}{p},$$

т.е. интегрированию оригинала соответствует деление изображения на p.

***Пример* 7.** Найти изображение интеграла $\int_0^t \sin\tau d\tau$.

Решение. Из примера 2 имеем $\sin t \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p^2+1}$. Тогда

$$\int_0^t \sin\tau d\tau \xrightarrow{\bullet} 1-\cos t \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p^3+p},$$

т.е.
$$1-\cos t \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p^3+p}.$$

7. *Теорема дифференцирования изображения.* Если $f(t)$ является оригиналом и $f(t) \xrightarrow{\bullet} F(p)$, то

$$F^{(n)}(p) \xleftarrow{\bullet} (-1)^n t^n f(t).$$

Таким образом, дифференцирование изображения влечет за собой умножение оригинала на $(-t)$.

***Пример* 8.** Найти изображение степенной функции $f(t) = t^n$.

Решение. $1 \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p} \Rightarrow -t \xrightarrow{\bullet} \left(\frac{1}{p}\right)' = -\frac{1}{p^2}$ или $t \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p^2}$; $-t\,t \xrightarrow{\bullet} \left(\frac{1}{p^2}\right)' = -\frac{2}{p^3}$ или $t^2 \xrightarrow{\bullet} \frac{2}{p^3}$;

$-t\,t^2 \xrightarrow{\bullet} \left(\frac{2}{p^3}\right)' = -\frac{2\cdot 3}{p^4}$ или $t^3 \xrightarrow{\bullet} \frac{3!}{p^4}$, и $t^n \xrightarrow{\bullet} \frac{n!}{p^{n+1}}$.

8. *Теорема интегрирования изображения.* Если функция $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом, то из $f(t) \xrightarrow{\bullet} F(p)$ следует

$$\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{\bullet} \int_p^\infty F(z)dz.$$

***Пример* 9.** Найти изображение интегрального синуса $\operatorname{Si} t = \int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau$.

Решение. Из примера 2 следует, что $\sin t \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p^2+1}$, тогда по теореме интегрирования изображения получаем $\sin t \xrightarrow{\bullet} \int\limits_p^\infty \frac{dq}{q^2+1} = \quad = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{q}\right)\Big|_p^\infty = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{p}\right)$. Используя теорему интегрирования оригинала, имеем $\operatorname{Si} t = \int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{p}\right)$.

9. *Теорема умножения изображений* (теорема Бореля). Произведение двух изображений $F_1(p) \xleftarrow{\bullet} f_1(t)$ и $F_2(p) \xleftarrow{\bullet} f_2(t)$ также является изображением, причем

$$F_1(p)F_2(p) \xleftarrow{\bullet} \int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau .$$

Интеграл в правой части называется *сверткой* функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и обозначается символом $f_1 * f_2$.

***Пример* 10.** Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)(p-2)} .$$

Решение. Здесь $F_1(p) = \frac{1}{p+1} \xleftarrow{\bullet} e^{-t}$, $F_2(p) = \frac{1}{p-2} \xleftarrow{\bullet} e^{2t}$, поэтому

$$F(p) = F_1(p)F_2(p) \xleftarrow{\bullet} e^{-t} * e^{2t} = \int\limits_0^t e^{-\tau} e^{2(t-\tau)} d\tau = e^{2t} \int\limits_0^t e^{-3\tau} d\tau =$$

$$= -\frac{1}{3} e^{2t} e^{-3\tau}\Big|_0^t = \frac{e^{3t}\left(1-e^{-3t}\right)}{3}.$$

3. ТАБЛИЦА СТАНДАРТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Сведем в таблицу полученные ранее изображения элементарных функций и некоторые другие.

Таблица 1

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\dfrac{1}{p}$	3	$e^{\alpha t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
2	C	$\dfrac{C}{p}$	4	$e^{\alpha t}\cos\omega t$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
5	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	12	$e^{\alpha t}\,\mathrm{sh}\,\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\alpha)^2-\omega^2}$
6	$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$	13	$e^{\alpha t}\,\mathrm{ch}\,\omega t$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\omega^2}$
7	$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	14	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
8	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	15	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
9	$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$	16	$t\,\mathrm{sh}\,\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
10	$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$	17	$t\,\mathrm{ch}\,\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
11	$e^{\alpha t}t^n$	$\dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	18	$\mathrm{Si}\,t=\int\limits_0^t\dfrac{\sin\tau}{\tau}d\tau$	$\dfrac{1}{p}\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{p}\right)$

Проиллюстрируем, как можно применять результаты, содержащиеся в табл. 1.

***Пример* 11.** Найти изображения функций

а) $f(t)=4+2e^{-2t}$; б) $f(t)=4t^3e^{4t}$; в) $f(t)=cht\sin 2t$; г) $f(t)=\sin^3 t$;

д) $f(t)=2t^3+5t^2-t+3$; е) $f(t)=\cos(2t-1)$; ж) $f(t)=te^{3t}\cos 2t$.

Решение.

а) Используя свойство линейности оригинала $f(t)=4\eta(t)+2e^{-2t}$ и формулу 4 (табл. 1) при $a=-2$, получаем $F(p)=4\dfrac{1}{p}+2\dfrac{1}{p+2}$.

б) Применяя формулу 9 (табл. 1) и свойство линейности, находим $F(p)=4\dfrac{4!}{(p-3)^5}=\dfrac{96}{(p-3)^5}$.

в) Применяя формулу $cht=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$, запишем оригинал в виде суммы:

$$f(t)=\mathrm{ch}\,t\sin 2t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\sin 2t=\frac{1}{2}e^t\sin 2t+\frac{1}{2}e^{-t\sin 2t}.$$

Используя свойство линейности и формулу 10 (табл. 1), находим

$$F(p)=\frac{1}{2}\frac{2}{(p-1)^2+4}+\frac{1}{2}\frac{2}{(p+1)^2+4}.$$

г) Учитывая, что

$$f(t)=\sin^3 t=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\sin t=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos 2t\sin t=$$
$$=\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t=\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t$$

и используя свойство линейности и табл. 1, получаем

$$F(p)=\frac{3}{4}\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{4}\frac{3}{p^2+9}.$$

д) Используя свойство линейности и табл. 1, имеем

$$F(p)=2\frac{3!}{p^4}+5\frac{2!}{p^3}-\frac{1}{p^2}+\frac{3}{p}.$$

е) Используя формулу косинуса разности, запишем оригинал в виде суммы: $f(t)=\cos(2t-1)=\cos 2t\cos 1+\sin 2t\sin 1$. По табл. 1 и свойству линейности получаем: $F(p)=\cos 1\dfrac{p}{p^2+4}+\sin 1\dfrac{2}{p^2+4}$.

ж) Используя формулу 15 (табл. 1), получаем $t\cos 2t \xrightarrow{\bullet} \dfrac{p^2-4}{\left(p^2+4\right)^2}$. По теореме смещения имеем $te^{3t}\cos 2t \xrightarrow{\bullet} \dfrac{(p-3)^2-4}{\left((p-3)^2+4\right)^2}$.

4. ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Формула Римана-Меллина. Если функция $F(p)$ – изображение функции-оригинала $f(t)$, то $f(t)$ может быть найдена по формуле

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)e^{pt}dp.$$

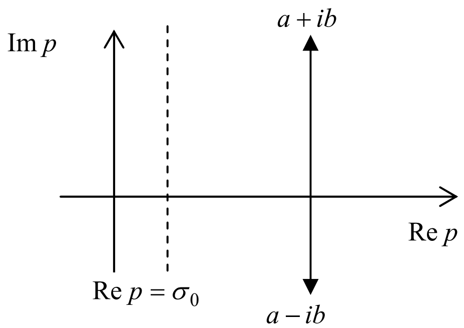

Рис. 1

Это равенство имеет место в каждой точке, в которой $f(t)$ непрерывна. В точках разрыва функции $f(t)$ значение правой части равно $\dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$. Интеграл в правой части формулы называют интегралом Меллина; интегрирование может вестись по любой вертикальной прямой $p=a+ib$, где $a=\text{const}>\sigma_0$, $-\infty<b<+\infty$ (рис. 1), и интеграл понимается в смысле главного значения:

$$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{a-ib}^{a+ib}F(p)e^{pt}dp.$$

Вычисление оригинала по формуле Римана-Меллина довольно трудоемко, поэтому на практике при решении задач применяют *теоремы разложения* и *правила преобразования* к виду, представленному в табл. 1 с применением свойств преобразования Лапласа.

Приведем ряд таких известных правил нахождения оригинала.

Правило 1. Если изображение отличается от табличного на постоянный множитель, то его следует умножить и одновременно поделить на этот множитель, а затем воспользоваться свойством линейности.

***Пример* 12.** Найти оригиналы для функций:

а) $F(p)=\dfrac{12}{(p+3)^4}$; б) $F(p)=\dfrac{3}{p^2-16}$.

Решение. а) Запишем изображение в виде $F(p)=\dfrac{12}{3!}\dfrac{3!}{(p+3)^4}$ и при $\alpha=-3,\ n=2$ по формуле 9 (табл. 1) получаем $f(t)=2t^2e^{-3t}$.

б) Представим изображение в виде $F(p)=\dfrac{3}{p^2-4^2}=\dfrac{3}{4}\dfrac{4}{p^2-4^2}$ и при в $\alpha=4$ формуле 7 (табл. 1) получаем $f(t)=\dfrac{3}{4}sh4t.$

Правило 2. Изображение, заданное в виде дроби $\dfrac{a\pm b}{c}$, разлагается на сумму дробей.

***Пример* 13.** Найти оригиналы для функции $F(p)=\dfrac{2p+4}{p^2+9}$.

Решение. Представим дробь в виде суммы двух слагаемых, а затем воспользуемся свойством линейности и формулами из табл.1:

$$F(p)=2\frac{p}{p^2+9}+4\frac{1}{p^2+9}=2\frac{p}{p^2+3^2}+\frac{4}{3}\frac{3}{p^2+3^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t)=2\cos 3t+\frac{4}{3}\sin 3t.$$

Правило 3. Если знаменатель дроби изображения содержит квадратный трехчлен, то в нем выделяется полный квадрат:

$$ap^2+bp+c=a(p+u)^2\pm\vartheta^2.$$

***Пример* 14.** Найти оригиналы для функции $F(p)=\dfrac{p}{p^2+4p+7}$.

Решение. Представляя изображение в виде $F(p)=\dfrac{p}{p^2+4p+7}=$

$=\dfrac{p}{(p+2)^2+3}=\dfrac{p+2-2}{(p+2)^2+3}=\dfrac{p+2}{(p+2)^2+3}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{3}}{(p+2)^2+3}$ и сравнивая эти выражения с формулами 10, 11 (табл. 1), находим оригинал

$$f(t)=e^{-2t}\cos\sqrt{3}t-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-2t}\sin\sqrt{3}t.$$

Правило 4. Если изображение представляет собой правильную рациональную дробь, то следует разложить ее на простейшие дроби и для каждой из полученных дробей найти оригинал.

***Пример* 15.** Найти оригиналы для функции $F(p)=\dfrac{2p}{(p+3)(p-1)^2}$.

Решение. Представим изображение в виде

$$F(p)=\frac{2p}{(p+3)(p-1)^2}=\frac{A}{(p+3)}+\frac{B}{(p-1)}+\frac{C}{(p-1)^2},$$

где A, B, C – неопределенные коэффициенты, откуда

$$A(p-1)^2+B(p-1)(p+3)+C(p+3)=2p.$$

Подставляя последовательно $p=1,\ p=-3,\ p=0,$ получаем $A=-\dfrac{3}{11}$, $B=\dfrac{9}{22}$, $C=\dfrac{1}{2}$ и, поэтому,

$$F(p)=-\frac{3}{11}\frac{1}{(p+3)}+\frac{9}{22}\frac{1}{(p-1)}+\frac{1}{2}\frac{1}{(p-1)^2}.$$

По формулам 4, 9 (табл. 1) получаем: $f(t)=-\dfrac{3}{11}e^{-3t}+\dfrac{9}{22}e^{t}+\dfrac{1}{2}te^{t}$.

Правило 5. Наличие степеней переменной p в знаменателе позволяет применить теорему об интегрировании оригинала.

***Пример* 16.** Найти оригиналы для функции

$$F(p)=\frac{1}{p^2\left(p^2+4p+7\right)}.$$

Решение. Получим изображение функции

$$\frac{1}{p^2+4p+7}=\frac{1}{(p+2)^2+3}\xleftarrow{\bullet}\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-2t}\sin\sqrt{3}t.$$

По теореме интегрирования оригинала получаем $\dfrac{1}{p\left(p^2+4p+7\right)}\xleftarrow{\bullet}$

$$\xleftarrow{\bullet}\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t e^{-2t}\sin\sqrt{3}tdt=-\frac{1}{7}e^{-2t}\cos\sqrt{3}t+\frac{2}{21}e^{-2t}\sin\sqrt{3}t+\frac{1}{7};$$

$$\frac{1}{p^2\left(p^2+4p+7\right)}\xleftarrow{\bullet}\int_0^t\left(-\frac{1}{7}e^{-2t}\cos\sqrt{3}t+\frac{2}{21}e^{-2t}\sin\sqrt{3}t+\frac{1}{7}\right)dt=$$

$$=\frac{4}{49}e^{-2t}\cos\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{147}e^{-2t}\sin\sqrt{3}t+\frac{t}{7}-\frac{4}{49}.$$

Правило 6. Возможность представить изображение в виде произведения позволяет применить теорему Бореля.

***Пример* 16.**

Представим изображение в виде произведения

$$F(p)=\frac{1}{p^2\left(p^2+4p+7\right)}=\frac{1}{p^2}\frac{1}{p^2+4p+7}=F_1(p)F_2(p),$$

где $$F_1(p)=\frac{1}{p^2},\ F_2(p)=\frac{1}{p^2+4p+7}.$$

Имеем $f_1(t)=t, f_2(t)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-2t}\sin\sqrt{3}t$. Далее по теореме Бореля

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t(t-\tau)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-2\tau}\sin\sqrt{3}\tau\right)d\tau=$$

$$=\frac{4}{49}e^{-2t}\cos\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{147}e^{-2t}\sin\sqrt{3}t+\frac{t}{7}-\frac{4}{49}.$$

Первая теорема разложения. Если функция $F(p)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки и ее разложение в ряд по степеням $\dfrac{1}{p}$

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{p^{n+1}},$$

то функция

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{t^n}{n!},\ t\geq 0$$

является оригиналом, соответствующим изображению $F(p)$.

***Пример* 17.** Найти оригиналы для функций:

а) $F(p)=\sin\left(\dfrac{1}{p}\right)$; б) $F(p)=\dfrac{1}{p}e^{\frac{2}{p^2}}$.

Решение. Условия теоремы выполнены. Лорановское разложение функции $F(p)$ в окрестности бесконечно удаленной точки, используя типовые разложения $\sin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$ есть:

а) $$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{p^{2n+1}}\Rightarrow f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{t^{2n}}{(2n)!};$$

б) $$F(p)=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{p^{2n}n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{p^{2n+1}n!}\Rightarrow f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n!}\frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

Вторая теорема разложения. Пусть функция $F(p)$ комплексной переменной p аналитична во всей плоскости за исключением конечного числа изолированных особых точек p_1, p_2, p_3, …, p_n, расположенных в полуплоскости $\operatorname{Re} p < \sigma_0$. Если $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$ и $F(p)$ абсолютно интегрируема вдоль любой вертикальной прямой $t\sin\omega t$, то $F(p)$ является изображением и

$$F(p) \longleftarrow\!\!\bullet\; \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p_k}\left\{F(p)e^{pt}\right\}.$$

***Пример* 18.** Найти оригиналы для функций $F(p) = \dfrac{p^2+p+1}{(p-1)(p+1)^2}$.

Решение. Применим вторую теорему разложения для обращения изображения $F(p) = \dfrac{p^2+p+1}{(p-1)(p+1)^2}$. Функция имеет два полюса: простой $p_1 = 1$ и полюс второго порядка $p_2 = -1$. Таким образом,

$$f(t) = \operatorname*{res}_{p_1=1} \frac{(p^2+p+1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2} + \operatorname*{res}_{p_2=-1} \frac{(p^2+p+1)}{(p-1)(p+1)^2}.$$

Находим вычеты:

$$\operatorname*{res}_{p_1=1}\left\{F(p)e^{pt}\right\} = \lim_{p\to1}\left[\frac{(p^2+p+1)(p-1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2}\right] = \lim_{p\to1}\frac{(p^2+p+1)e^{pt}}{(p+1)^2} = \frac{3}{4}e^t;$$

$$\operatorname*{res}_{p_2=-1}\left\{F(p)e^{pt}\right\} = \lim_{p\to-1}\frac{d}{dp}\left[\frac{(p^2+p+1)(p+1)^2e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2}\right] = \lim_{p\to-1}\left[\frac{(p^2+p+1)e^{pt}}{(p-1)}\right]' =$$

$$= \lim_{p\to-1}\frac{\left[(2p+1)e^{pt} + te^{pt}(p^2+p+1)\right](p-1) - (p^2+p+1)e^{pt}}{(p-1)^2} = \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t}.$$

Итак, получаем $\quad f(t) = \dfrac{3}{4}e^t + \dfrac{1}{4}e^{-t} - \dfrac{1}{2}te^{-t}$.

Если $F(p)$ – несократимая дробно-рациональная функция: $F(p) = \dfrac{Q_{m_1}(p)}{R_{m_2}(p)}$, где $m_1 < m_2$, $Q_{m_1}(p)$ и $R_{m_2}(p)$ – многочлены соответствующих степеней, точка p_k – полюс порядка ν_k, то

$$\operatorname*{res}_{p_k}\left\{F(p)e^{pt}\right\} = \frac{1}{(\nu_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{\nu_k-1}}{dp^{\nu_k-1}}\left[(p-p_k)^{\nu_k}F(p)e^{pt}\right].$$

Производную произведения представим по формуле Лейбница

$$\frac{d^{\nu_k-1}}{dp^{\nu_k-1}}\left[(p-p_k)^{\nu_k}F(p)e^{pt}\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{\nu_k-1} C_{\nu_k-1}^{j}\frac{d^j}{dp^j}\left[(p-p_k)^{\nu_k}F(p)\right]\frac{d^{\nu_k-1-j}\,e^{pt}}{dp^{\nu_k-1-j}};$$

$$\frac{d^{\nu_k-1-j}\,e^{pt}}{dp^{\nu_k-1-j}} = t^{\nu_k-1-j}e^{pt},\; C_{\nu_k-1}^{j} = \frac{(\nu_k-1)!}{j!(\nu_k-1-j)!},$$

поэтому

$$\operatorname*{res}_{p_k}\left\{F(p)e^{pt}\right\} = \sum_{j=0}^{\nu_k-1}\frac{t^{\nu_k-1-j}e^{p_kt}}{j!\,(\nu_k-1-j)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^j}{dp^j}\left[(p-p_k)^{\nu_k}F(p)\right].$$

Если все особые точки дробно-рациональной функции $F(p)$ – простые полюса, то эта формула существенно упрощается:

$$\operatorname*{res}_{p_k}\left\{F(p)e^{pt}\right\} = \lim_{p\to p_k}\left[(p-p_k)F(p)e^{pt}\right] =$$

$$= \lim_{p\to p_k}\left[(p-p_k)\frac{Q_{m_1}(p)e^{pt}}{R_{m_2}(p)}\right] = \frac{Q_{m_1}(p_k)e^{p_kt}}{R'_{m_2}(p_k)}$$

и $$F(p) \xleftarrow{\bullet} f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_{m_1}(p_k)}{R'_{m_2}(p_k)} e^{p_k t} .$$

***Пример* 19.** Найти оригиналы для функций

$$F(p) = \frac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)} .$$

Решение. Здесь функция $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}$ имеет только простые полюсы. Значит,

$$R_4(p) = (p+1)(p+2)(p+3)(p+4) = p^4 + 10p^3 + 35p^2 + 50p + 24$$

имеет только простые нули, $R'_4(p) = 4p^3 + 30p^2 + 70p + 50$, поэтому

$$F(p) \xleftarrow{\bullet} f(t) = \left.\frac{p e^{pt}}{4p^3 + 30p^2 + 70p + 50}\right|_{p=-1} +$$

$$+ \left.\frac{p e^{pt}}{4p^3 + 30p^2 + 70p + 50}\right|_{p=-2} + \left.\frac{p e^{pt}}{4p^3 + 30p^2 + 70p + 50}\right|_{p=-3} + + \left.\frac{p e^{pt}}{4p^3 + 30p^2 + 70p + 50}\right|_{p=-4} = -\frac{1}{6}e^{-t} + e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{2}{3}e^{-4t} .$$

5. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = f \quad (1)$$
$$x(0) = x_0, \ x'(0) = x_1 \quad (2)$$

где $a_0, \ a_1, a_2 = \text{const}$, и $a_0 \neq 0$.

Начальные условия заданы в точке $t_0 = 0$. Если начальные условия задаются в другой точке $t_0 \neq 0$, то заменой аргумента $u = t - t_0$ их сдвигают в точку $u_0 = 0$.

Пусть $x(t) \xrightarrow{\bullet} X(p)$, и $f(t) \xrightarrow{\bullet} F(p)$. Применяя к обеим частям (1) преобразование Лапласа и используя теорему о дифференцировании оригинала и свойство линейности преобразования Лапласа, вместо дифференциального уравнения (1) с начальными условиями (2) получаем операторное уравнение (уравнение для изображений)

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)\, X(p) - (a_0 p x_0 + a_0 x_1 + a_1 x_0) = F(p). \qquad (3)$$

Из (3) следует

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0 p x_0 + a_0 x_1 + a_1 x_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} . \qquad (4)$$

Получено, как говорят, операторное решение задачи. Находя далее по $X(p)$ оригинал $x(t)$, мы приходим к решению исходной задачи Коши $x(t)$.

Общий случай решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами принципиально ничем не отличается от случая $n = 2$.

***Пример* 20.** Найти решение задачи Коши:
а) $x'' + x = 2\cos t, \ x(0) = 0, \ x'(0) = -1$;
б) $x''' + x' = 0, \ x(0) = 2, \ x'(0) = 0, \ x''(0) = -1.$

Решение. а) Пусть $x(t) \xrightarrow{\bullet} X(p)$, тогда по теореме о дифференцировании оригинала имеем

$$x'(t) \xrightarrow{\bullet} pX(p) - x(0) = pX(p), \ x''(t) \xrightarrow{\bullet} p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) + 1, \ \cos t \xrightarrow{\bullet} \frac{p}{p^2+1} .$$

Запишем операторное уравнение $p^2 X(p)+1+X(p)=\dfrac{2p}{p^2+1}$,

откуда $X(p)=\dfrac{2p}{(p^2+1)^2}-\dfrac{1}{p^2+1}$.

Находим оригинал для $X(p)$. Оригинал для функции $\dfrac{1}{p^2+1}$ находим, применяя формулу 6 (табл. 1):

$$\frac{1}{p^2+1} \xleftarrow{\bullet} \sin t .$$

Для нахождения оригинала для функции $\dfrac{2p}{(p^2+1)^2}$ воспользуемся, например, теоремой о дифференцировании изображения (см. п. 2):

$$\frac{2p}{(p^2+1)^2}=-\left(\frac{1}{p^2+1}\right)_p^{/} \xleftarrow{\bullet} t\sin t .$$

Таким образом, $X(p) \xleftarrow{\bullet} t\sin t-\sin t=(t-1)\sin t$, поэтому $x(t)=(t-1)\sin t$.

б) Пусть $x(t) \xrightarrow{\bullet} X(p)$. Тогда:

$$x'(t) \xrightarrow{\bullet} pX(p)-x(0)=pX(p)-2 ;$$

$$x''(t) \xrightarrow{\bullet} p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-2p ;$$

$$x'''(t) \xrightarrow{\bullet} p^3X(p)-p^2x(0)-px'(0)-x''(0)=p^3X(p)-2p^2+1 .$$

Запишем далее операторное уравнение

$$p^3X(p)-2p^2+1+pX(p)-2=0,$$

откуда

$$p^3X(p)+pX(p)=2p^2+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(p)=\frac{2p^2+1}{p^3+p}=\frac{p^2+1}{p(p^2+1)}+\frac{p^2}{p(p^2+1)}=\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+1}.$$

Применяя формулы 1,5 (табл. 1), находим оригинал для функции $X(p)$:

$$x(t)=1+\cos t .$$

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений. Система решается аналогично, поэтому сразу рассмотрим пример.

***Пример* 21.** Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} x'=-y+2; & x(0)=-1; \\ y'=x+1; & y(0)=0. \end{cases}$$

Решение. Пусть $x(t) \xrightarrow{\bullet} X(p)$, $y(t) \xrightarrow{\bullet} Y(p)$. Тогда $x'(t) \xrightarrow{\bullet} pX(p)-x(0)=pX(p)+1$, $y'(t) \xrightarrow{\bullet} pY(p)-y(0)=pY(p)$, $\eta(t) \xrightarrow{\bullet} \dfrac{1}{p}$.

Запишем систему уравнений для изображений:

$$\begin{cases} pX(p)+1=-Y(p)+\dfrac{2}{p}; \\ pY(p)=X(p)+\dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на p и подставляя во второе, получим $p^2 X(p) + p = -X(p) - \frac{1}{p} + 2$, откуда следует

$$X(p) = \frac{2}{1+p^2} - \frac{1}{p},\quad Y(p) = -\frac{2p}{1+p^2} + 1 - 1 + \frac{2}{p} = -\frac{2p}{1+p^2} + \frac{2}{p}.$$

По формулам 2, 5, 6 (табл. 1) находим оригиналы для функций $X(p)$, $Y(p)$:

$$x(t) = 2\sin t - 1,\quad y(t) = -2\cos t + 2.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1.

Найти изображения по оригиналам:

1.1. $f(t)=\mathrm{ch}t\cos 2t$;

1.2. $f(t)=\sin^2 3t$;

1.3. $f(t)=sh3t\cos 4t$;

1.4. $f(t)=\cos^3 t$;

1.5. $f(t)=\left(e^t+sht\right)\cos 2t$;

1.6. $f(t)=t^4+9t^3-3t^2+t-3$;

1.7. $f(t)=\cos(3t-9)$;

1.8. $f(t)=e^{2t}+\cos^2 2t$;

1.9. $f(t)=3+3t-3t^2e^t$;

1.10. $f(t)=\frac{1}{2}(t-2)^2e^{-(t-2)}\eta(t-2)$;

1.11. $f(t)=(t-1)^4+3(t-1)^3e^{t-1}$;

1.12. $f(t)=\eta(t-4)+\eta(t-4)\sin 3(t-4)$;

1.13. $f(t)=(t-1)^2e^{t-1}$;

1.14. $f(t)=t\mathrm{sh}3t$;

1.15. $f(t)=\sin^4 t$;

1.16. $f(t)=\sin mt\cos nt$;

1.17. $f(t)=\cos mt\cos nt$;

1.18. $f(t)=\frac{\sin t}{t}$;

1.19. $f(t)=\frac{e^t-1}{t}$;

1.20. $f(t)=\frac{2}{t}(1-\cos t)$;

1.21. $\int\limits_0^t \cos\tau d\tau$;

1.22. $\int\limits_0^t \mathrm{sh}\tau d\tau$;

1.23. $f(t)=te^{2t}\sin 3t$;

1.24. $\int\limits_0^t \cos^2\omega\tau d\tau$.

2.

Найти оригинал по изображению.

2.1. $F(p)=\frac{1}{p^2+5p+6}$;

2.2. $F(p)=\frac{1}{p^2+4p+3}$;

2.3. $F(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2}$;

2.4. $F(p)=\frac{p}{(p^2+1)^2}$;

2.5. $F(p)=\frac{p}{p^2-2p+5}$;

2.6. $F(p)=\frac{1}{p^3-8}$;

2.7. $F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+4)}$;

2.8. $F(p)=\frac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$;

2.9. $F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$;

2.10. $F(p)=\frac{p^2}{(p-1)(p+2)(p-3)}$;

2.11. $F(p)=\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$;

2.12. $F(p)=\frac{p-3}{p^2+2p+5}$;

2.13. $F(p)=\frac{1}{(p-1)^3}$;

2.14. $F(p)=\frac{3p}{(p+5)^2}$;

2.15. $F(p)=\frac{1}{p^2(p-2)^2}$;

2.16. $F(p)=\frac{3p}{2p^2-2p-4}$;

2.17. $F(p)=\frac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$;

2.18. $F(p)=\frac{e^{-3p}+e^{-p}}{p+2}$;

2.19. $F(p)=\frac{1}{(p-1)^2(p+2)}$;

2.20. $F(p)=\frac{p}{p^4-1}$;

2.21. $F(p)=\frac{p}{p^3+1}$;

2.22. $F(p)=\frac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$;

2.23. $F(p)=\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}$;

2.24. $F(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}\sin\frac{1}{\sqrt{p}}$.

3.

Найти решение задачи Коши:

3.1. $x'' + 2x' = t\sin t,$
$x(0) = x'(0) = 0;$

3.2. $x'' - 2x' + x = e^t,$
$x(0) = 0,\ x'(0) = 1;$

3.3. $x'' - 2x' + 2x = 1,$
$x(0) = x'(0) = 0;$

3.4. $x'' + 2x' + x = t^2,$
$x(0) = 1,\ x'(0) = 0;$

3.5. $x'' + 2x' + 5x = 3,$
$x(0) = 1,\ x'(0) = 0;$

3.6. $x'' + x' = \cos t,$
$x(0) = 2,\ \ x'(0) = 0;$

3.7. $x''' - 2x'' + x' = 4,$
$x(0) = 1,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = -2;$

3.8. $x''' + x' = 1,$
$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0;$

3.9. $x''' + 2x'' + 5x' = 0,$
$x(0) = -1, x'(0) = 2, x''(0) = 0;$

3.10. $x''' - x'' = \sin t,$
$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0;$

3.11. $x''' + x'' = t,$
$x(0) = -3,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 0;$

3.12. $x''' + x = e^t,$
$x(0) = 0,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = 0;$

3.13. $x'' + 4x = t,$
$x(0) = 1,\ x'(0) = 0;$

3.14. $x'' - x' + x = e^{-t},$
$x(0) = 0,\ x'(0) = 1;$

3.15. $x'' - 2x' + x = t - \sin t,$
$x(0) = x'(0) = 0;$

3.16. $x^{IV} - x'' = 1,$
$x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0;$

3.17. $x'' + x = 2\sin t,$
$x(0) = 1,\ \ x'(0) = -1;$

3.18. $x'' + 4x = t,$
$x(0) = 1,\ \ \ x'(0) = 0;$

3.19. $x^{IV} - 2x'' + x = \sin t,$
$x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0;$

3.22. $x'' + 3x' = 20e^{2t},$
$x(0) = 1,\ x'(0) = 7;$

3.21. $x'' - 2x' - 3x = e^{3t},$
$x(0) = x'(0) = 0;$

3.22. $x'' - 2x' + 5x = 1 - t,$
$x(0) = x'(0) = 0;$

3.23. $x'' - x' = te^t,$
$x(0) = x'(0) = 0;$

3.24. $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1,$
$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

4.

Найти решение задачи Коши:

4.1. $\begin{cases} x' = y - 1, & x(0) = 1; \\ y' = -x + 2, & y(0) = 0; \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} x' = y - 1, & x(0) = 1; \\ y' = -x - 2y, & y(0) = -1; \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1, & x(0) = 0; \\ x' + 4y' + 3y = 0, & y(0) = 0; \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} x' = 3x + 4y, & x(0) = 1; \\ y' = 4x - 3y, & y(0) = 1; \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} x' = -y, & x(0) = 1; \\ y' = 2x + 2y, & y(0) = 1; \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1, & x(0) = 1; \\ y' = x + y, & y(0) = 2; \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} x' = x + 4y, & x(0) = 1; \\ y' = 2x - y + 9, & y(0) = 0; \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} x' = 2y + 1, & x(0) = -1; \\ y' = 2x + 3, & y(0) = 0; \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} x' = 3y, & x(0) = 2; \\ y' = 3x + 1, & y(0) = 0; \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} x' = -2x + y, & x(0) = 0; \\ y' = 3x, & y(0) = 1; \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} x' = -2x + y + 2, & x(0) = 1; \\ y' = 3x, & y(0) = 0; \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} x' = -3x - 4y + 1, & x(0) = -1; \\ y' = 4x - 2y, & y(0) = 0; \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} x' = 2y, & x(0) = 2; \\ y' = 2x, & y(0) = 2; \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} x' = 2x - 2y, & x(0) = 3; \\ y' = -4x, & y(0) = 1; \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} x' = 3x + 5y + 2, & x(0) = 0; \\ y' = 3x + y + 1, & y(0) = 2; \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 2, & x(0) = 0; \\ y' = 4y + 1, & y(0) = 1; \end{cases}$

4.18. $\begin{cases} x' = x + 2y, & x(0) = 0; \\ y' = 2x + y + 1, & y(0) = 5; \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} x' = y + 3, & x(0) = 1; \\ y' = x + 2, & y(0) = 0; \end{cases}$

4.20. $\begin{cases} x' = -y - z, & x(0) = -1; \\ y' = -x - z, & y(0) = 0; \\ z' = -x - y, & z(0) = 1; \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} x' = y + z, & x(0) = 0; \\ y' = 3x + z, & y(0) = 1; \\ z' = 3x + y, & z(0) = 1; \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} x' = x + 3y, & x(0) = 1; \\ y' = x - y, & y(0) = 0; \end{cases}$

4.22. $\begin{cases} x' = 2x - y + z, & x(0) = 1; \\ y' = x + z, & y(0) = 1; \\ z' = -3x + y - 2z, & z(0) = 0. \end{cases}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краснов, М.Л. Операционное исчисление. Устойчивость движения / М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко. – М. : Наука, 1964. – 102 с.

2. Пантелеев, А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах : учебное пособие / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. – М. : Высшая школа, 2001. – 445 с.

3. Чудесенко, В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты) : учебное пособие для втузов / В.Ф. Чудесенко. – М. : Высшая школа, 1983. – 112 с.